AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

OPERATOR ƏMSALLI BƏZİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN İZLƏRİNİN TƏDQİQİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Həcər Füzuli qızı Mövsümova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Diferensial tənliklər" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nigar Məhər qızı Aslanova

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
Mahir Mirzəxan oğlu Səbzəliyev
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Elvin İbrahim oğlu Əzizbəyov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Misir Cumail oğlu Mərdanov

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi seminarın sədri: AMEA–nın həqiqi üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Dissertasiya işində qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənliklər üçün spektral məsələlərə baxılır. Bu məsələlər xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün bir çox sərhəd məsələlərini əhatə edir. Spektral parametr tənliklə yanaşı sərhəd şərtində də iştirak edən məsələlərə uyğun operatorların öz-özünə qoşmalıq şərtləri, spektrin təbiəti, asimptotikası öyrənilir və requlyarlaşmış izləri hesablanır. Öz-özünə qoşma operatorun xassələrindən həm spektrin araşdırılmasında, həm də iz düsturlarının alınmasında istifadə edilir. Qeyd edək ki, xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün sərhəd şərtində spektral parametr iştirak edən məsələlərin daha geniş fəzaya çıxmaqla öz-özünə qoşma operatorla əlaqələndirilməsi skalyar məsələlərdən daha əvvəl J.Odnoff və S.Erkolano, M.Sçeçter işlərində öyrənilmişdir. Qeyri-məhdud operator tənliklər üçün isə bu istiqamətdə bildiyimiz işlər V.İ.Qorbaçuk, M.Bayramoğlu, M.A.Rıbak, B.Ə.Əliyev, L.A.Oleynik, N.M.Aslanovanın işlərində aparılmışdır. Lakin bu istiqamətdə öyrənilməmiş bir çox məsələlər var ki, onların da bir qismi dissertasiya işinin mövzusudur.

Mexanika və xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri müxtəlif fəzalarda diferensial operator tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin öyrənilməsinə gətirilə bilər. Qeyri-məhdud operator əmsallı sərhəd məsələləri üçün məxsusi ədədlərin asimptotik paylanması ilk dəfə A.Q.Kostyuçenko və B.M.Levitan tərəfindən araşdırılıb. Bundan sonra operator əmsallı diferensial operatorların spektrinin araşdırılmasına həsr olunmuş bir çox işlər ortaya çıxdı. Spektri diskret olan diferensial-operator tənliklərin məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanması məsələsi kvant mexanikasında xüsusi önəmə sahibdir. Qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial operator tənliklər nəzəriyyəsi sonsuz adi diferensial tənliklər sisteminin, xüsusi törəməli diferensial tənliklərin və inteqro-diferensial tənliklərin öyrənilməsi üçün ümumi bir vasitədir. Bu nəzəriyyədə öyrənilən əsas məsələlərdən biri də məxsusi ədədlərin və məxsusi funksiyaların asimptotik davranışlarının müəyyən edilməsi, requlyarlaşmış izlərin hesablanmasıdır.

İz düsturları ilk məxsusi ədədlərin təqribi hesablanmasında, mexanikada, xətti operatorların indekslər nəzəriyyəsində və tərs məsələlərin həllində tətbiq edilir.

Cəbrdə matrisin izi anlayışının analoqu olan skalyar diferensial operatorların izinin hesablanmasına həsr olunmuş çoxlu sayda işlər var. Bu istiqamətdə diskret spektrli operator üçün ilk iş İ.M.Gelfand və B.M.Levitana məxsusdur. Skalyar diferensial operatorlar üçün iz düsturları İ.M.Gelfand və B.M.Levitan, L.A.Dikiy, C.J.Halberg və V.A.Kramer, A.M.Savçuk və A.A.Şkalikov və bir çox başqa alimlər tərəfindən araşdırılmışdır. Bütün bu mövzuya dair işlərin geniş icmalı N.M.Aslanovanın doktorluq dissertasiyasında (Bakı, 2013) da ətraflı şəkildə verilmişdir.

Kəsilməz spektrə malik olan öz-özünə qoşma abstrakt operatorların iz düsturları ilk dəfə İ.M.Lifşits, daha sonra S.Q.Kreyn, L.D.Faddeyev və başqaları tərəfindən araşdırılmışdır. Ilk dəfə məhdud operator əmsallı diferensial operatorlar üçün requlyarlaşmış iz düsturu R.Z.Xəlilova tərəfindən, qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvil operatoru üçün I tərtib iz düsturu F.Q.Maqsudov, M.Bayramoğlu və Ə.Ə.Adıgözəlov tərəfindən tapılmışdır. İlk dəfə bu işdə qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənlik üçün requlyarlaşmış izin tərifi verildi.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin əsas obyekti qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənliklərin spektral analizidir. Tədqiqatın predmeti qeyri-məhdud operator əmsallı tənliklər üçün sərhəd şərtində spektral parametr olan sərhəd məsələlərinin spektrinin araşdırılması və requlyarlaşmış izlərinin hesablanmasıdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi aşağıdakı əsas məsələlərin həllindən ibarətdir:

1. Sərhəd şərtində spektral parametrin xətti funksiyası həm axtarılan funksiyanın özünün, həm də törəməsinin qarşısında iştirak edən qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyinin

spektrinin təbiətinin öyrənilməsi və məxsusi ədədlərlər üçün asimptotik düsturun alınması;

2. Baxılan məsələsinin bir xüsusi halı üçün requlyarlaşmış izin hesablanması;

3. Sərhəd şərtinə spektral parametrin rasional funksiyası daxil olan qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyinin məxsusi ədədləri üçün asimptotik paylanma düsturunun və iz düsturunun əldə edilməsi;

4. Spektral parametr sərhəd şərtində törəmə qarşısında iştirak edən qeyri-məhdud operator əmsallı Bessel tənliyinə uyğun məsələnin spektral xassələrinin tədqiqi;

5. Qeyri-məhdud operator əmsallı Bessel tənliyi üçün birinci tərtib requlyarlaşmış izin alınması;

6. Əmsalı qeyri-məhdud operator olan iki tərtibli diferensial tənlik və sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan məsələlərin ikinci tərtib requlyarlaşmış iz düsturunun alınması;

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində diferensial tənliklər, funksional analiz, öz-özünə qoşma operatorların spektral nəzəriyyəsi, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi və həyəcanlanmalar nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

1. Spektral parametr funksiyanın özü və onun törəməsi qarşısında mövcud olan sərhəd şərtinə malik Şturm-Liuvill operator tənliyinin spektral xassələri araşdırılmış və bir xüsusi halı üçün requlyarlaşmış iz hesablanmışdır;

2. Qeyri-məhdud operator əmsallı və sərhəd şərtində spektral parametr rasional funksiya şəklində daxil olan iki tərtibli tənliyin məxsusi ədədlərinin paylanma funksiyası üçün asimptotik düstur və iz düsturu tapılmışdır;

3. Spektral parametr sərhəd şərtinə törəmə qarşısında daxil olan operator Bessel tənliyinə uyğun məsələnin spektral xassələri tədqiq edilmiş, fəzadan çıxmaqla baxılan məsələyə uyğun öz-özünə qoşma operator təyin edilmiş, məxsusi ədədlər üçün asimptotik düstur alınmışdır;

4. Bessel operator tənliyinin birinci requlyarlaşmış izi tapılmışdır;

5. Sərhəd şərtində spektral parametr olan və qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyi (iki fərqli məsələ) üçün ikinci tərtib requlyarlaşmış iz hesablanmışdır;

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində:

1) Sərhəd şərtinə spektral parametr xətti funksiya şəklində daxil olan Şturm-Liuvill operator tənliyinin məxsusi ədədlərinin asimptotik davranışı araşdırılmış və xüsusi bir halı üçün requlyarlaşmış iz hesablanmışdır;

2) Spektral parametr sərhəd şərtinə rasional funksiya kimi daxil olan qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyinin məxsusi ədədlərinin asimptotikası öyrənilmiş və requlyarlaşmış iz düsturu alınmışdır;

3) Sərhəd şərtində spektral parametr törəmə qarşısında iştirak edən qeyri-məhdud operator əmsallı Bessel tənliyi üçün məxsusi ədədlərin asimptotik paylanma düsturu çıxarılmış və birinci requlyarlaşmış iz tapılmışdır;

4) Sərhəd şərtində spektral parametr olan ikinci tərtib diferensial-operator tənliklərin ikinci tərtib requlyarlaşmış izləri hesablanmışdır;

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində aparılan tədqiqatlar nəzəri xarakterlidir. Dissertasiyada alınan yeni nə-ticələr bir sıra xüsusi törəməli diferensial tənlikləri əhatə edir və spek-tral analizdə müstəqil elmi maraq doğurur. İz düsturları ilk məxsusi ədədlərin hesablanmasında, mexanikada və tərs məsələlərdə tətbiqlərə malikdir.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşa-ğıdakı konfranslarda və vebinarda məruzə edilib: “Fundamental və tətbiqi elmlərin (yer, texnika və kimya elmləri) aktual problemlərinin həllində multidissiplinar yanaşmanın rolu” adlı Gənc Alim və Mütəxəssislərin I Beynəlxalq elmi konfransı (Bakı, 2014), akademik Y.Məmmədovun anadan olmasının 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq elmi konfrans (Bakı, 2015), “Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Azərbaycanın Ümummilli

Lideri H.Əliyevin anadan olmasının 93 illik yubileyinə həsr olunmuş Respublika elmi konfransı (Bakı, 2016), "Neftqazçixarmada İnnovativ Texnologiyaların və Tətbiqi Riyaziyyatin Müasir Problemləri" adlı akademik A.X.Mirzəcanzadənin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfrans (Bakı, 2018), Azərbaycanın ümummilli lideri H.Əliyevin 96 illik yubileyinə həsr olunmuş Gənc alimlərin III Beynəlxalq elmi konferansı (Baku 2019), BDU Tətbiqi Riyaziyyat Elmi Tədqiqat İnstitutunun vebinarı (Bakı, 2021), " HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications" 6-cı Beynəlxalq konfrans (Turkey, 2023), Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" (f.-r.e.d., prof. H.İ.Aslanov) və **"**Riyazi fizika tənlikləri**"** (f-r.e.n. Ə.F.Quliyev) şöbələrinin, Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universitetinin "Ali Riyaziyyat" kafedrasının seminarlarında (Bakı, 2023) məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhfəsi tədqiqat istiqamətinin seçilməsindədir. Eyni zamanda alınmış bütün nəticələr şəxsən iddiaçıya məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiya işinin əsas nəticələri Azərbay-can Respublikası Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının tövsiyə etdiyi jurnallarda 6 elmi məqalə (onlardan 1-i WOS, 1-i SCOPUS, 4-ü Zentralblatt MATH) və 6 tezis (5-i beynəlxalq və 1-i respublika miqyaslı, 1-i xaricdə) çap edilmişdir ki, bu elmi işlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Diferensial tənliklər" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, mündəricat, üç fəsil, nəticə və istinad olunmuş 84 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi - 213207 işarə sayıdır (titul səhifə- 333 işarə, mündəricat -2516 işarə, giriş - 45218 işarə, I fəsil– 62000, II fəsil– 46000, III fəsil– 56000, nəticə - 1140 işarə).

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, 3 fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.Girişdə tədqiqat mövzusunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri, elmi yeniliyi, tədqiqatın nəzəri əhəmiyyəti qeyd olunmuş və işin aprobasiyası haqqında məlumat verilmişdir. I fəsil sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill operator tənlikləri üçün sərhəd məsələlərinin spektral xassələrinin öyrənilməsinə və birinci requlyarlaşmış izlərinin tapılmasına həsr olunmuşdur və 6 yarım-fəsildən ibarətdir.

1.1-də $L_2(H,(0,1))$ fəzasında sərhəd şərtində spektral parametrin xətti funksiyası iştirak edən sərhəd məsələsinə baxılır:

$$l[y] \equiv -y''(t) + Ay(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t) \tag{1}$$

$$y'(0) = 0 \tag{2}$$

$$ay(1) + by'(1) = \lambda(cy(1) - dy'(1)),\ a,b,c,d \in R. \tag{3}$$

$L_2(H,(0,1))$ fəzası $\int_0^1 \|y(t)\|^2 dt < \infty$ münasibətini ödəyən $y(t)$ vektor funksiyalar fəzasıdır. H isə abstrakt seperabel Hilbert fəzasıdır. Bu fəzada skalyar hasil və normanı uyğun olaraq $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ və $\|\ \cdot\ \|$ kimi işarə etmişik. A operatoru H abstrakt seperabel Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur. $A > E$, E isə H fəza-sında vahid operatordur, $A^{-1} \in \sigma_\infty$. Bu şərtlər daxilində A operatoru-nun spektri diskretdir. A operatorunun məxsusi ədəd və məxsusi vektorlarını uyğun olaraq $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \ldots$ və $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$,ilə işarə edək.

$q(t)$ isə H fəzasında ixtiyari $t \in [0,1]$ üçün öz-özünə qoşma məhdud operator qiymətli funksiyadır. Fərz edək ki, $q(t)$operator funksiyası zəif ölçüləndir,$\| q(t) \|$ isə t arqumentinin funksiyası kimi $[0,1]$ parçasında məhduddur və bundan əlavə $q(t)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri də ödəyir:

1) $\forall t \in [0,1]$ üçün $q(t)$ funksiyasının ikinci tərtib zəif törəməsi var. $\left[q^{(k)}(t)\right]^* = q^{(k)}(t),\ k = 0,1,2;$

2) $\sum_{j=1}^{\infty}\left|(q^{(k)}(t)\varphi_j, \varphi_j)\right| < const$; (əgər $q^{(k)}(t) \in \sigma_1$ olarsa, onda $\left\|q^{(k)}(t)\right\|_{\sigma_1} < const$;)

3) $q'(0) = q'(1) = 0$

4) $\forall f \in H$ üçün $\int_0^1 (q(t)f, f)dt = 0$.

$L_2 = L_2(H,(0,1)) \oplus H$ fəzasını daxil edirik. Bu fəzada skalyar hasil aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$(Y,Z)_{L_2} = \int_0^1 (y(t), z(t))dt + \frac{1}{\rho}(y_1, z_1),\ \rho = \begin{vmatrix} c & -a \\ d & b \end{vmatrix} = bc + ad > 0,$$

burada $Y = \{y(t), y_1\} \in L_2$, $Z = \{z(t), z_1\} \in L_2$, $y(t), z(t) \in L_2(H,(0,1))$ $y_1, z_1 \in H$.

$q(t) \equiv 0$ olduqda L_2 fəzasında (1)-(3) məsələsinə uyğun öz-özünə qoşma L_0 operatorunu aşağıdakı şəkildə təyin edirik:

$D(L_0) = \{Y : Y = \{y(t), y_1\} / -y''(t) + Ay(t) \in L_2(H,(0,1)), y'(0) = 0,$
$y_1 = cy(1) - dy'(1)\},\quad L_0 Y = \{-y''(t) + Ay(t),\ ay(1) + by'(1)\}$

$q(t) \not\equiv 0$ şərtinə uyğun operator isə $L = L_0 + Q$ ilə işarə olunub, burada $Q : Q\{y(t), cy(1) - dy'(1)\} = \{q(t)y(t), 0\}$. Bu operator L_2 fəzasında öz-özünə qoşma məhdud operatordur. R_λ^0 və R_λ ilə uyğun olaraq L_0 və L operatorlarının rezolventlərini işarə edək.

Aşağıdakı lemma isbat olunur.

Lemma 1. L operatoru L_2 fəzasında simmetrikdir.

L_0 operatorunun spektri diskretdir. Q operatoru L_2

fəzasında məhdud olduğu üçün L operatoru da diskret spektrə malik olacaq.

1.2-də isə L_0 və L operatorlarının məxsusi ədədlərinin asimptotikası araşdırılır. Burada A operatorunun məxsusi ədədlərinin

$$\gamma_k \sim gk^{\alpha}, k \to \infty,\ g > 0, \alpha > 0 \tag{4}$$

şəkildə olduğu qəbul edilir.

Teorem 1. L_0 operatorunun məxsusi ədədləri iki müxtəlif ardıcıllıq əmələ gətirir:

$$\lambda_{k,n} \sim \gamma_k + \alpha_n^2,\ \ \alpha_n \sim \pi n,\ \ n \to \infty,$$

$$\lambda_k \sim -\frac{b}{d} + \frac{-c^2 \pm c\sqrt{c^2 + 4d(b + d\gamma_k)}}{2d^2}.$$

$R_\lambda(L) = R_\lambda(L_0) - R_\lambda(L)QR_\lambda(L_0)$ münasibəti L_0 və L operatorlarının rezolventləri üçün doğrudur. Teorem 1 və kompakt operatorların s-ədədlərinin xassələrindən istifadə etməklə aşağıdakı teoremi isbat edirik.

Teorem 2. Fərz edək ki, H fəzasında $A = A^* > E$, A^{-1} kompaktdır və (4) münasibəti doğrudur. Onda

$$\lambda_n(L_0) \sim \mu_n(L) \sim dn^{\delta}, \qquad \delta = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha+2}, \alpha > 2, \\ \dfrac{\alpha}{2}, \alpha < 2, \\ 1, \alpha = 2. \end{cases}$$

burada $\mu_n - L$, $\lambda_n -$lər isə L_0 operatorunun məxsusi ədədləridir.

1.3-də ümumi sərhəd şərtinin xüsusi halına uyğun operator üçün birinci tərtib requlyarlaşmış iz hesablanır. Belə ki, (3) şərtində $c = 0, b = d = 1$ olarsa, həmin şərt aşağıdakı şəklə düşür:

$$ay(1) + y'(1) = -\lambda y'(1) \quad . \tag{5}$$

Bu zaman $L_2 -$də skalyar hasil aşağıdakı şəkli alır :

$$(Y,Z)_{L_2}=\int_0^1 (y(t),z(t))dt+\frac{1}{a}(y_1,z_1) \quad , \quad a>0.$$

L_2 fəzasında $q(t)\equiv 0$ halında (1),(2),(5) məsələsinə uyğun L_0 operatorunun təyin oblastı aşağıdakı kimidir:

$$D(L_0)=\{Y:Y=\{y(t),y_1\}/-y''(t)+Ay(t)\in L_2(H,(0,1)),$$
$$y'(0)=0, y_1=-y'(1)\}$$

Aşağıdakı lemma doğrudur[1].

Lemma 2. Əgər $k\to\infty, \gamma_k \sim gk^{\alpha}, 0<g<\infty, 2<\alpha<\infty$ münasi-bətləri ödənilərsə, onda $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ ardıcıllığının elə $\lambda_{n_1}<\lambda_{n_2}<\ldots$ alt ardıcıllığı mövcuddur ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\lambda_p-\lambda_{n_m}\geq d_0\left(p^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}-n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), \; p=n_m,n_m+1,\ldots, \quad d_0>0\,.$$

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$\lambda^{(i)}=\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}\lambda_k\,, \quad \mu^{(i)}=\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}\mu_k\,, \quad i=1,2,\ldots, n_0=0 \qquad (6)$$

$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^{(i)}-\lambda^{(i)}\right)$ cəmini L operatorunun requlyarlaşmış izi adlandıraq. Bu sıranın cəmi aşağıda göstərildiyi kimi Lemma 2-nin şərtini ödəyən $n_1,n_2,\ldots$ natural ədədlərinin alt ardıcıllığının hansı qayda ilə seçil-məsindən asılı deyil. Bu paraqrafda bu sıranın cəmi düsturu alınıb.

Lemma 4. Fərz edək ki, $[0,1]$ parçasında $\|q(t)\|$ məhduddur və Lemma 2-nin şərtləri ödənilir. Onda böyük $m-$lər üçün

---

[1] Максудов, М.Г., Байрамоглы, М., Адыгезалов, А.А. О регуляризованном сле-де оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным опе-раторным коэффициентом // Доклады Академии наук СССР, -1984. 277 (4), – с. 795–799.

aşağıdakı bərabərlik ödənilir:

$$\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\sum_{j=i}^{N}(-1)^j M_m^j+\frac{(-1)^N}{2\pi i}\int_{|\lambda|<l_m}\lambda\, tr\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right]d\lambda,$$

$$`\, l_m=\frac{1}{2}\left(\mu_{n_m+1}-\mu_{n_m}\right),\ M_m^j=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=l_m} tr\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda,$$

$\mu_{n_m}, m=1,2,3,\ldots$ Lemma 2-nin şərtini ödəyən alt ardıcıllıqdır. (N ixtiyari natural ədəddir). L_0 operatorunun ortonormal məxsusi vektorlarını $\{\Psi_n\}$, $n=1,2,\ldots$ ilə işarə edək. Onları aşağıdakı şəkildə almışıq:

$$\psi_n=\sqrt{\frac{4ax_{k,n}}{2ax_{k,n}+a\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^3\sin^2 x_{k,n}}}\times$$

$$\times\left\{\cos(x_{k,n}t)\varphi_k,\ x_{k,n}\sin x_{k,n}\varphi_k\right\},\quad \begin{pmatrix} n=\overline{0,\infty}, k=\overline{N,\infty}\\ n=\overline{1,\infty}, k=\overline{1,\infty}\end{pmatrix}$$

burada $x_{k,n}$ isə $a\cos z-z\sin z-\left(z^2+\gamma_k\right)z\sin z=0$, $z=\sqrt{\lambda-\gamma_k}$ xarakteristik tənliyinin kökləridir və $x_{k,n}\sim\pi n$ asimptotikasına malikdir.

Lemma 4. $q(t)$ operator-qiymətli funksiyası üçün 1)-3) şərtləri ödənilərsə, onda aşağıdakı doğrudur:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2ax_{k,n}\int_0^1\cos(2x_{k,n}t)q_k(t)dt}{2ax_{k,n}+a\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^3\sin^2 x_{k,n}}\right|+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\frac{2ax_{k,0}\int_0^1\cos(2x_{k,0}t)q_k(t)dt}{2ax_{k,0}+a\sin 2x_{k,0}+4x_{k,0}^3\sin^2 x_{k,0}}\right|<\infty,\ q_k(t)=(q(t)\varphi_k,\varphi_k)$$

Teorem 3. Tutaq ki, Lemma 2–nin şərtləri ödənilir və əlavə olaraq $q(t)$ üçün 1)-3) şərtləri doğrudur. Onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\lim_{m\to\infty} M_m^1 = -\frac{tr\, q(0) + tr\, q(1)}{4} \; .$$

Teorem 4. Tutaq ki, Lemma 2–nin şərtləri ödənilir. Əgər $q(t)$ operator funksiyası 1)-3) şərtlərini ödəyirsə, onda $n \geq 2$ üçün $\lim\limits_{m\to\infty} M_m^n = 0.$

Lemma 2, Teorem 3 və Teorem 4–dən və (6) işarələməsindən istifadə etməklə alırıq ki:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}\right) = \frac{tr\, q(0) + tr\, q(1)}{4} \, . \tag{7}$$

Bununla, requlyarlaşmış iz haqqında aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 5. Tutaq ki, $q(t)$ operator funksiyası 1)-4) şərtlərini ödəyir. Onda Lemma 2-nin şərtləri daxilində requlyarlaşmış iz üçün (7) düsturu doğrudur.

1.4 paraqrafında sərhəd şərtinə spektral parametrin rasional funksiyası daxil olan qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyi üçün sərhəd məsələsi öyrənilir.(1) diferensial ifadəsi və

$$y'(0) = 0, \qquad y(1)(1+\lambda) = y'(1)(1+h+\lambda), \; h > 0. \; h \in R$$

sərhəd şərtlərinin doğurduğu məsələyə baxılır.

Tutaq ki, $q(t)$ funksiyası yuxarıdakı şərtləri ödəyir. Burada $L_2 -$də skalyar hasili aşağıdakı kimi təyin edək:

$$(Y,Z)_{L_2} = \int_0^1 (y(t), z(t))dt + \frac{1}{h}(y_1, z_1) \; .$$

$q(t) \equiv 0$ olduqda L_2 fəzasında baxılan məsələyə uyğun öz-özünə qoşma L_0 operatorunu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$D(L_0) = \{Y : Y = \{y(t), y_1\} / -y''(t) + Ay(t) \in L_2(H,(0,1)), \; y'(0) = 0,$$

$$y_1 = -y(1) + y'(1)\} \; , \; L_0 Y = \{-y''(t) + Ay(t), \; y(1) - (1+h)y'(1)\}$$

$q(t) \not\equiv 0$ halına uyğun operatoru $L = L_0 + Q$ ilə işarə edirik, burada

$Q:Q\{y(t),-y(1)+y'(1)\}=\{q(t)y(t),0\}$ operatoru L_2 fəzasında məhdud və öz-özünə qoşmadır .

Lemma 5. L_0 operatoru L_2 fəzasında simmetrik operatordur.

Lemma 5-dən istifadə etməklə göstərmək olar ki, L_0 operatoru öz-özünə qoşma müsbət-müəyyəndir. Rellix teoreminə görə L_0 diskret spektrə malikdir. $q(t)$ məhdud operator olduğuna görə L operatorunun $R_\lambda(L)-R_\lambda(L_0)=R_\lambda(L)QR_\lambda(L_0)$ münasibətindən spektrinin diskretliyi alınır.

1.5-də L_0 və L operatorlarının məxsusi ədədlərinin asimptotik təbiəti öyrənilir.

Teorem 6. L_0 operatorunun məxsusi ədədləri iki müxtəlif ardıcıllıq əmələ gətirir:

$$\lambda_k=\gamma_k+\alpha_{k,0}^2\ ,\left|\alpha_{k,0}\right|<M=const\ ;$$

$$\lambda_{k,n}\sim\gamma_k+\alpha_n^2\ \ ,\alpha_n\sim\pi n+O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty\,.$$

Lemma 6. Fərz edək ki, H fəzasında $A=A^*>E$ və A^{-1} operatoru kompaktdır. Bundan əlavə (4) münasibəti ödənilir. Onda L_0 operato-runun məxsusi ədədləri üçün aşağıdakı asimptotika doğrudur:

$$\lambda_n(L_0)\sim d_1 n^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}},\ d_1=const\,.$$

1.6-da isə 1.4-də təyin olunan operator üçün birinci tərtib requlyarlaşmış iz düsturu alınır. L_0 operatorunun ortonormal məxsusi vektorlarını aşağıdakı kimi tapmışıq:

$$\psi_n=\sqrt{\frac{4hx_{k,n}}{\mathrm{B}_{k,n}}}\left\{\cos(x_{k,n}t)\varphi_k,\left(-x_{k,n}\sin x_{k,n}-\cos x_{k,n}\right)\varphi_k\right\}$$

$$\mathrm{B}_{k,n}=2hx_{k,n}+h\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^3\sin^2 x_{k,n}+4x_{k,n}^2\sin 2x_{k,n}+$$

$$+4x_{k,n}\cos^2 x_{k,n} \qquad \begin{pmatrix} n=\overline{0,\infty}, k=\overline{N,\infty} \\ n=\overline{1,\infty}, k=\overline{1,N-1} \end{pmatrix}$$

burada $x_{k,n}$ $y_k(1)-(1+h)y_k'(1)=\lambda(-y_k(1)+y_k'(1))$ xarakteristik tənliyinin kökləridir , $z=\sqrt{\lambda-\gamma_k}$, $y_k(t)=(y(t),\varphi_k)$.

Lemma 7. Fərz edək ki, $q(t)$ üçün 1)-3) şərtləri ödənilir, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{2hx_{k,n}\int\limits_0^1\cos(2x_{k,n}t)q_k(t)dt}{\mathrm{B}_{k,n}}\right|<\infty, \quad q_k(t)=(q(t)\varphi_k,\varphi_k).$$

Teorem 7. Əgər $q(t)$ 1)-4) şərtlərini ödəyirsə, onda Lemma 6-nın şərtləri daxilində aşağıdakı iz düsturun doğrudur:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\frac{tr\,q(0)+tr\,q(1)}{4}$$

II fəsil 3 yarımfəsildən ibarətdir. Sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan qeyri-məhdud operator əmsallı Bessel tənliyi üçün sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin araşdırılmasına və birinci tərtib requlyarlaşmış izinin tapılmasına həsr olunmuşdur.

2.1-də $L_2(H,(0,1))$ fəzasında

$$l[y]\equiv -y''(t)+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}y(t)+Ay(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t), \nu\ge 1 \qquad (8)$$

diferensial ifadəsi və

$$-y(1)=\lambda y'(1) \qquad (9)$$

sərhəd şərtinə uyğun olan məsələnin doğurduğu operatorlar təyin olunur, burada A operatoru yuxarıdakı şərtləri ödəyir. Fərz edək ki, operator qiymətli $q(t)$ funksiyası zəif ölçüləndir, $\|q(t)\|$ isə $[0,1]$ parçasında məhduddur və aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $q(t)$ funksiyasının $[0,1]$ parçasında ikinci tərtib zəif törəməsi

mövcuddur və hər bir $t \in [0,1]$ üçün $q^{(j)}(t)$ $(j=0,1,2)$ operatorları H fəzasında öz-özünə qoşma operatorlardır:

$$\left[q^{(j)}(t)\right]^* = q^{(j)}(t),\ q^{(j)}(t) \in \sigma_1(H).$$

Burada $\sigma_1(H)$ H fəzasında sinqulyar qiymətləri yığılan sıra əmələ gətirən kompakt nüvə operatorlardır. $\sigma_1(H)$-də normanı $\|\cdot\|_1$ ilə işarə edək.

2) $\left\|q^{(j)}(t)\right\|_1$ $(j=0,1,2)$ funksiyaları $[0,1]$-də məhduddur.

3) ixtiyari $f \in H$ üçün $\int_0^1 (q(t)f, f)dt = 0$ doğrudur.

4) $T = T^* \in \sigma_1(H)$ bərabərliyini və ixtiyari $f \in H$, $(j=0,1,2)$ üçün sıfrın ətrafında $\left|\left(q^{(j)}(t)f, f\right)\right| \le |(Tf, f)|$ bərabərsizliyini ödəyən T operatoru vardır.

L_2 fəzasında skalyar hasili aşağıdakı kimi təyin edək:

$$(Y,Z)_{L_2} = \int_0^1 (y(t), z(t))dt + (y_1, z_1)$$

$q(t) \equiv 0$ olduqda L_2 fəzasında (8),(9) məsələsi ilə əlaqəli olan öz-özünə qoşma L_0 operatoru aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$D(L_0) = \{Y \in L_2, l[y] \in L_2(H,(0,1)),\ y_1 = y'(1)\}$$

$$L_0 Y = \{-y''(t) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} y(t) + Ay(t), -y(1)\}$$

L_0 operatoru diskret spektrə malikdir. Laqranj eyniliyində inteqraldan kənar hədlərin ifadənin sinqulyarlığı olan 0 nöqtəsindəki qiyməti sıfra bərabər olduğundan, minimal operatorun öz-özünə qoşma genişlənmələri 1 nöqtəsindəki sərhəd şərtləri ilə təyin edilir. $q(t) \not\equiv 0$ halına uyğun olan və $L = L_0 + Q$ təyin olunan operator L_2- də öz-özünə qoşma operatordur. Q operatoru $Q\{y(t), y'(1)\} =$

$\{q(t)y(t),0\}$ kimi təsir edir. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^{(i)}-\lambda^{(i)}\right)$ cəmi L operatorunun requlyarlaşmış izi adlandırırıq.

2.2-də isə spektrinə baxılan spektral məsələyə uyğun operator-
ların məxsusi ədədləri üçün asimptotik düstur tapılır.

A operatorunun spektral ayrılışını nəzərə alsaq L_0 operatorunun məxsusi ədədlərini təyin etmək üçün aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\left(z^2+\gamma_k\right)zJ_{\nu-1}(z)+\left(1+\frac{z^2+\gamma_k}{2}(1-2\nu)\right)J_\nu(z)=0\,,\ z=\sqrt{\lambda-\gamma_k} \quad (10)$$

Lemma 8. L_0 operatorunun məxsusi ədədləri üçün aşağıdakı asimptotika doğrudur:

$$\lambda_{m,k}=\gamma_k+\alpha_m^2 \ \ ,\ \alpha_m\sim\left(\pi m+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right), m\to\infty\,.$$

Lemma 9. (10) tənliyinin yalnız həqiqi kökləri vardır.

Bu tənliyin həqiqi köklərini $x_{m,k}$ $\left(k=\overline{1,\infty}\right)$ ilə, təpə nöqtələri $\pm iB, A_m\pm iB$ olan düzbucaqlı konturu C ilə işarə edək. Bu düzbucaqlı kontur C koordinat başlanğıcını xəyali oxun sağ tərəfindən yarımçevrə şəklində keçir. B böyük müsbət ədəddir və $A_m=\pi m+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$.

Lemma 10. Kifayət qədər böyük m tam ədədi üçün

$$z^{-\nu}\left(\left(z^2+\gamma_k\right)zJ_\nu'(z)+\left(1+\frac{z^2+\gamma_k}{2}\right)J_\nu(z)\right)$$ funksiyasının sıfırlarının

sayı C düzbucaqlısının daxilində $m-$ə bərabərdir.

Teorem 8. Tutaq ki, H fəzasında $A=A^*>E$, A^{-1} kompaktdır və A operatorunun məxsusi ədədləri $\gamma_k\sim ak^\alpha, k\to\infty$, $a>0,\ \alpha>0$ münasibətini ödəyir. Onda $\lambda_n(L_0)\sim\mu_n(L)\sim d_1 n^\delta$ asimptotikası doğrudur, burada

$$\delta=\begin{cases}\dfrac{2\alpha}{\alpha+2}, \alpha>2,\\ \dfrac{\alpha}{2}, \alpha<2,\\ 1, \alpha=2.\end{cases}$$

2.3-də 2.1-də təyin olunan operator üçün birinci tərtib requlyarlaşmış iz hesablanır. Əvvəlcə L_0 operatorunun ortonormal məxsusi vektorları tapılır:

$$\frac{1}{J_\nu\left(x_{m,k}\right)}\sqrt{\frac{8x_{m,k}^2\left(x_{m,k}^2+\gamma_k\right)^2}{H\left(x_{m,k}\right)}}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{t}J_\nu\left(x_{m,k}t\right)\varphi_k, \left(\frac{1}{2}J_\nu\left(x_{m,k}\right)+x_{m,k}J'_\nu\left(x_{m,k}\right)\right)\varphi_k\right\},$$

$$H\left(x_{m,k}\right)=4x_{m,k}^6+8x_{m,k}^4\gamma_k+x_{m,k}^4-4x_{m,k}^4\nu^2+4x_{m,k}^2\gamma_k^2-$$
$$-8x_{m,k}^2\gamma_k\nu^2+2x_{m,k}^2\gamma_k+12x_{m,k}^2-4\nu^2\gamma_k^2+4\gamma_k+4+\gamma_k^2.$$

Aşağıdakı lemma isbat edilir.

Lemma 11. Operator qiymətli $q(t)$ funksiyası 1)-4) şərtlərini ödəyərsə, o zaman $\alpha>0$ şərtində

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_0^1\frac{8x_{m,k}^2\left(x_{m,k}^2+\gamma_k\right)^2 tJ_\nu^2\left(x_{m,k}t\right)\left(q(t)\varphi_k,\varphi_k\right)}{H\left(x_{m,k}\right)J_\nu^2\left(x_{m,k}\right)}dt\right|<\infty.$$

Bu fəslin əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdə verilib.

Teorem 9. Tutaq ki, Teorem 8-in şərtləri ödənilir. Əgər operator qiymətli $q(t)$ funksiyası 1)-4) şərtləri ödəyirsə, aşağıdakı doğrudur:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}\left(\mu_n-\lambda_n\right)=\frac{2\nu\, tr\, q(0)+3\, tr\, q(1)}{4}.$$

III fəsildə qeyri-məhdud operator əmsallı və sərhəd şərtində məxsusi parametr iştirak edən Şturm-Liuvill tənlikləri üçün ikinci tərtib requlyarlaşmış iz hesablanır. Bu fəsil 4 yarımfəsildən ibarətdir.

Burada $L_2(H,(0,1))$ Hilbert fəzasında (1) diferensial ifadəsi və

$$y(0)=0 \quad , \quad y(1)=-\lambda y'(1)$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş məsələyə baxılır. Fərz edək ki, operator-qiymətli öz-özünə qoşma $q(t)$ funksiyası zəif ölçüləndir və aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $[0,1]$ parçasında $\sigma_1(H)$ sinfindən olan $q^{(k)}(t)$ ilə işarə olunmuş dördüncü tərtibə qədər zəif törəmələr var və $\forall t\in[0,1]$ üçün $\left\|q^{(k)}(t)\right\|_{\sigma_1(H)} \le const$, $\left(k=\overline{0,4}\right)$, $Aq^{(k)}(t)\in\sigma_1(H)$,

$\left\|Aq^{(k)}(t)\right\|_{\sigma_1(H)} \le const$, $k=\overline{0,2}$.

2) $q'(0)=q'(1)=q(1)=0$;

3) Hər bir $f\in H$ üçün $\int_0^1 \left(q(t)f, f\right)dt=0$ doğrudur.

3.1-də (1) diferensial ifadəsi və sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan sərhəd şərtinə uyğun olan məsələnin doğurduğu operatorlar təyin olunur. L_2 fəzasında $q(t)\equiv 0$ şərti daxilində məsələ ilə bağlı olan L_0 operatoru aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$D(L_0)=\{Y:Y=\{y(t),y_1\}/-y''(t)+Ay(t)\in L_2(H,(0,1)),$$
$$y(0)=0,\ y_1=-y'(1)\}, \quad L_0Y=\{-y''(t)+Ay(t),\ y(1)\}.$$

$q(t)\not\equiv 0$ vəziyyətinə uyğun olan operator $L=L_0+Q$ kimi işa-rə olunub ($Q\{y(t),-y'(1)\}=\{q(t)y(t),0\}$).

L_2-də skalyar hasil aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$(Y,Z)_{L_2}=\int_0^1 (y(t),z(t))dt+(y_1,z_1),$$

$$Y=\{y(t),y_1\},\ Z=\{z(t),z_1\},\ y(t),z(t)\in L_2(H,(0,1))\ y_1,z_1\in H\ .$$

L və L_0 operatorları diskret spektrə malikdir. Bu operatorların məxsusi ədədlərini uyğun olaraq $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ və $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$ilə işarə edək.Tutaq ki, R_λ^0 L_0^2 operatorunun rezolventidir. Əgər $L_0 Q L_0^{-1}$ məhduddursa, Q operatoru yuxarıdakı kimi təsir edirsə və $N > \dfrac{1}{2\omega}$ şərtində (burada $\omega \in [0;1)$, $\omega < \dfrac{1}{2} - \dfrac{2+\alpha}{4\alpha}$)

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n_m}\left(\lambda_n^2 - \mu_n^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} tr\left[\left(L_0 Q + Q L_0 + Q^2\right) R_0(\lambda)\right]^k d\lambda\right) = 0$$

alırıq[2]. Aşağıdakı ifadəni L operatorunun ikinci tərtib requlyarlaşmış
izi adlandıraq və $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(2)} - \mu_n^{(2)}\right)$ kimi işarə edək:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n_m}\left(\lambda_n^2 - \mu_n^2 - \int_0^1 trq^2(t)dt\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\sum_{k=2}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} tr\left[\left(L_0 Q + Q L_0 + Q^2\right) R_0(\lambda)\right]^k d\lambda\right)$$

3.2-də lazım olan bəzi faktlar verilir. 3.3-də isə baxılan məsələ-nin ikinci tərtib requlyarlaşmış izi üçün düstur tapılır.

Teorem 10. Fərz edək ki, $q(t)$ funksiyası 1-3 xassələrini ödəyən operator-funksiyadır, $L_0^{-1} Q L_0$ isə $L_2 -$ də məhdud operatordur və $\gamma_k \sim g k^\alpha$, $g > 0, \alpha > 2$ münasibəti doğrudur. Onda ikinci tərtib requlyarlaşmış iz üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

---

[2] Садовничий, В.А., Подольский, В.Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением // – Москва: Математический сборник, -2002. 193 (2), –с. 129–152.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(2)}-\mu_n^{(2)}\right)=-\frac{trq^2(0)}{4}-\frac{trAq(0)-trAq(1)}{2}+\frac{trq''(0)-trq''(1)}{8}.$$

Lemma 12. Əgər 1,2 xassələri ödənərsə və $\gamma_k \sim gk^{\alpha}$, $0 < g < \infty$,
$2 < \alpha < \infty$ münasibəti doğrudursa, onda aşağıdakı sıra mütləq yığılır:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(x_{k,n}^2+\gamma_k\right)2x_{k,n}\int_0^1\cos\left(2x_{k,n}t\right)\left(q(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt}{2x_{k,n}-\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^3\cos^2 x_{k,n}}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{k,n}\int_0^1\sin^2\left(x_{k,n}t\right)\left(q^2(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt}{2x_{k,n}-\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^3\cos^2 x_{k,n}}-\int_0^1\left(q^2(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt\right|<\infty.$$

3.4-də (1),(2),(5) məsələsi üçün II requlyarlaşmış iz hesablanır.

Lemma 13. Əgər 1,2 şərtləri ödənərsə və bundan əlavə $\gamma_k \sim gk^{\alpha}$, $0<g<\infty$, $2<\alpha<\infty$ doğrudursa, onda aşağıdakı sıra mütləq yığılır
(a (5) şərtindəki əmsaldır):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{4ax_{k,n}\int_0^1\cos^2\left(x_{k,n}t\right)\left(q^2(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt}{2ax_{k,n}+a\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^3\sin^2 x_{k,n}}-\int_0^1\left(q^2(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt\right|+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\frac{4ax_{k,0}\int_0^1\cos^2\left(x_{k,0}t\right)\left(q^2(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt}{2ax_{k,0}+a\sin 2x_{k,0}+4x_{k,0}^3\sin^2 x_{k,0}}-\int_0^1\left(q^2(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(x_{k,n}^{2}+\gamma_k\right)2ax_{k,n}\int_0^1\cos\left(2x_{k,n}t\right)\left(q(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt}{2ax_{k,n}+a\sin 2x_{k,n}+4x_{k,n}^{3}\sin^{2}x_{k,n}}\right|+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\frac{\left(x_{k,0}^{2}+\gamma_k\right)2ax_{k,0}\int_0^1\cos\left(2x_{k,0}t\right)\left(q(t)\varphi_k,\varphi_k\right)dt}{2ax_{k,0}+a\sin 2x_{k,0}+4x_{k,0}^{3}\sin^{2}x_{k,0}}\right|<\infty .$$

Teorem 11. Tutaq ki, $q(t)$ operator-funksiyası 1-3 xassələrini ödəyir, $L_0^{-1}QL_0$ operatoru L_2 fəzasında məhduddur, $\gamma_k \sim gk^{\alpha}$, $g>0,\alpha>2$. Onda ikinci tərtib requlyarlaşmış iz üçün aşağıdakı doğrudur:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(2)}-\mu_n^{(2)}\right)=\frac{trq^{2}(0)}{4}+\frac{trAq(0)+trAq(1)}{2}-$$
$$-\frac{trq''(0)+trq''(1)}{8}-\int_0^1 trq^{2}(t)dt.$$

Müəllif elmi rəhbəri riyaziyyat elmləri doktoru, prof. N.M.Aslanovaya məsələlərin qoyuluşu və işə göstərdiyi daimi diqqətə görə, eyni zamanda f-r.e.d, prof. Məmməd Bayramoğluna daimi diqqətinə və dəstəyinə görə dərin minnətdarlığını bildirir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənliklər üçün spektral xassələrin araşdırılmasına və requlyarlaşmış izlərin tapılmasına həsr olunmuşdur. Dissertasiya işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- ✓ Sərhəd şərtində spektral parametr xətti funksiya şəklində olan Şturm-Liuvill operator tənliyinin spektral xassələri araşdırılmışdır, məxsusi ədədlərin asimptotik düsturu əldə edilmişdir.
- ✓ Məsələnin bir xüsusi halı üçün birinci və ikinci requlyarlaşmış iz hesablanmışdır.
- ✓ Sərhəd şərtinə spektral parametr rasional funksiya şəklində daxil olan qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial ifadə üçün məxsusi ədədlərin asimptotik təbiəti öyrənilmiş və requlyarlaşmış iz düsturu tapılmışdır.
- ✓ Qeyri-məhdud operator əmsallı Bessel tənliyi üçün sərhəd şərtində spektral parametr törəmə qarşısında iştirak edən sərhəd məsələsi araşdırılmış, məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanma düsturu alınmışdır.
- ✓ Operator Bessel tənliyinin requlyarlaşmış izi üçün düstur əldə edilmişdir.
- ✓ Sərhəd şərtində spektral parametr olan qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyi üçün ikinci tərtib requlyarlaşmış iz düsturu alınmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə nəşr edilmişdir:

1. Мовсумова, Х.Ф. Об одной краевой задаче со спектраль-ным параметром в граничном условии // Роль мультидисципли-нарного подхода в решении актуальных проблем фундаменталь-ных и прикладных наук (технические, химические и науки о Зем-ле), 1-я международная научная конференция молодых ученых испециалистов посвященный дню нефтяника Азербайджанской Республики и 20-летию контракта века, -Баку: -15-16 октябрь, -
2014, -с. 227 .
2. Aslanova, N.M., Movsumova, H.F. On asymptotics of eigen-values for second order differential operator equation //- Baku: Caspi-an Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, -2015. 3 (2), -p. 96-105.
3. Movsumova, H.F. The asymptotics of eigenvalue distribution and trace formula for Sturm-Liouville operator equation // Materials of the İnternational Scientific Conference dedicated to the 85th of Yahya Mammadov, - Baku: -10 December, -2015, -p. 118-120.
4. Movsumova, H.F. Formula for second regularized trace of the Sturm-Liouville equation with spectral parameter in the boundary conditions // "Actual problems of mathematics and mechanics" dedicated to the 93th birthday of the national leader of Azerbaijan Heydar Aliyev, - Baku: -18-19 may, - 2016, -p.40-44.
5. Movsumova, H.F. Formula for second regularized trace of the Sturm-Liouville equation with spectral parameter in the boundary conditions // - Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2016. 42(1), -p. 93-105.
6. Movsumova, H.F. Trace formula for second order differen-tial operator equation // -Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2016. 36 (1), -p. 89-99.

7. Movsumova, H.F. Formula for second regularized trace of the Sturm-Liouville equation with spectral parameter dependent boundary condition // - Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2016. 6 (2) , -p. 33-47.
8. Movsumova, H.F. The second regularized trace of the Sturm-Liouville equation with spectral parameter dependent boundary condition // International Conference on “Modern problems of innovative technologies in oil and gas production and applied mathematics" devoted to the 90th anniversary of academician Azad Mirzajanzade, - Baku: -13-14 December, -2018, -p. 250-253.
9. Movsumova, H.F. Distribution of eigenvalues and the regularized trace of a boundary value problem for the Bessel operator equation // III İnternational Scientific Conference of young researchers dedicated to the 96th anniversary of the national leader of Azerbaijan, Heydar Aliyev, –Baku: -29-30 april, -2019, –p.7-10.
10. Movsumova, H.F. The asymptotic behavior of the eigenvalues for the operator Bessel equation with an unbounded operator coefficient // - Baku: Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, -2021. 10 (2), -p. 168-180.
11. Aslanova, N.M., Movsumova, H.F. On some spectral properties of differential operator with unbounded operator coefficient // - Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics , -2022. 12 (1), -p. 3-16.
12. Movsumova, H.F. Trace formula for differential equation with coefficient containing first degree polynomial depending on spectral parameter // 6 th İnternational HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, - İstanbul: -10-13 MAY, - 2023, -p.110

Dissertasiyanın müdafiəsi **20 dekabr 2024-cü il** tarixində saat **14^{00}** – da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya işi ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **14 noyabr 2024-cü il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 11.10.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 39939
Tiraj: 100