AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BƏZİ KORREKT OLMAYAN MƏSƏLƏLƏRİN OPTİMAL İDARƏETMƏ NƏZƏRİYYƏSİ ÜSULLARININ KÖMƏYİ İLƏ TƏDQİQİ

İxtisas: 3338.01- Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi

Elmi sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Zümrüd Rasim qızı Səfərova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2024

Dissertasiya işi Naxçıvan Dövlət Universitetinin "Elektronika və İnformasiya texnologiyaları" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:	fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Hamlet Fərman oğlu Quliyev**
Rəsmi opponentlər:	fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov**
	fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Fikrət Güləli oğlu Feyziyev**
	riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru **Rəşad Oqtay oğlu Məstəliyev**

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya Şurası

Dissertasiya şurasının sədri: ____________________	fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Knyaz Şiraslan oğlu Məmmədov**
Dissertasiya şurasının elmi katibi: ____________________	riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru **Nigar Oqtay qızı Şükürova**
Elmi seminarın sədri: ____________________	riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Kamil Bayraməli oğlu Mənsimov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Keçən əsrin ortalarından başlayaraq korrekt olmayan məsələlər və tərs məsələlər geniş tətbiqi əhəmiyyətli olmasına görə sistematik öyrənilməyə başlanıldı və bunun nəticələri fizikada, geofizikada, tibbdə, ekologiyada və elmin digər sahələrində tətbiq olunur. Hal-hazırda korrekt olmayan məsələlər nəzəriyyəsi riyaziyyatın diferensial tənliklər, riyazi fizika, hesablama riyaziyyatı və s. kimi sahələrinə nüfuz etmişdir. Məlumdur ki, hər bir korrekt olmayan məsələni müəyyən düz korrekt olan məsələyə tərs məsələ kimi şərh etmək olar. Düz məsələdə müxtəlif fiziki hadisələri, prosesləri təsvir edən funksiyalar tapılır. Riyazi fizikada düz məsələni həll etmək üçün prosesin getdiyi oblast, tənliyin əmsalları, sərhəd şərtləri, stasionar olmayan prosesdə həm də başlanğıc şərtlər verilir. Lakin bir çox hallarda həmin kəmiyyətlər naməlum olur. Onda elə tərs və ya korrekt olmayan məsələlər meydana gəlir ki, düz məsələnin həlli haqqında informasiyalara görə bu naməlum kəmiyyətləri təyin etmək (tapmaq) lazım gəlir. Beləliklə, tərs və ya korrekt olmayan məsələlərdə baxılan sərhəd məsələsinin həlli ilə yanaşı, düz məsələyə daxil olan bəzi funksiyalar da naməlum olur.

Tərs və korrekt olmayan məsələlərlə A.N.Tixonov, M.M.Lavrentyev, V.Q.Romanov, V.K.İvanov, V.V.Vasin, S.İ.Kabanixin, R.Lattes, J.L.Lions, A.D.İskəndərov, Ə.Y.Axundov, M.İ.Belişev, A.S.Blaqoveşenski, K.T.İskakov, A.Q.Yaqola, F.P.Vasilyev, A.Həsənov və başqaları məşğul olmuşlar.

Korrekt olmayan məsələləri həll etmək üçün müxtəlif üsullar mövcuddur: requlyarlaşdırma üsulu, kvazidönmə üsulu, kvazihəll üsulu, qradiyent üsulları və s. Son dövrlərdə belə üsullardan biri- variasional və ya optimallaşdırma üsulu daha intensiv öyrənilir və müxtəlif məsələlərə geniş tətbiq olunur. K.R. Ayda-zadənin, V.M.Abdullayevin, O.M.Alifanovun, Y.A.Artyuxinin, S.V.Rumyantsevin, S.İ.Kabanixinin, K.T.İskakovun, A.D.İskəndərovun, R.Q.Tağıyevin və başqalarının işlərində müxtəlif xüsusi törəməli tənliklər üçün müəyyən tərs və korrekt olmayan məsələlərin variasional qoyuluşu verilib və həmin məsələlər tədqiq olunub.

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, baxılan korrekt olmayan və ya tərs məsələlər müəyyən optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilir və belə məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarının vasitəsilə həll (tədqiq) olunur. Bu zaman baxılan sərhəd məsələsində tənliyin əmsalları, sərhəd və ya başlanğıc funksiyaları idarəedici rolunu oynayırlar, minimumu axtarılan funksional isə əlavə informasiyanın köməyilə qurulur. Bu funksional uyğunsuzluq funksionalı da adlandırılır. Əgər bu funksionalın minimal qiyməti sıfırdırsa, onda korrekt olmayan və ya tərs məsələdə əlavə şərt ödənilir.

Parabolik tipli tənliklər üçün tərs məsələlərin variasional qoyuluşları K.R.Ayda-zadə, V.M.Abdullayev, O.M.Alifanov, E.A.Artyuxin, S.V.Rumyantsev, A.D.İskəndərov, R.K.Tağıyev, R.A.Qasımov, İ.K.Şakenovun işlərində geniş araşdırılıb öyrənilmişdir. Elliptik tipli tənliklər üçün tərs məsələlərin variasional qoyuluşları araşdırılan tənliklərdə kiçik həddin əmsalının axtarılması məsələsinə A.D.İskəndərov, R.A.Həmidovun, tənliyin baş hissəsində əmsalın tapılması məsələsinə R.K.Tağıyev, R.S.Qasımovanın, Helmhols tənliyində kiçik həddin əmsalının axtarılması məsələsinə isə A.B.Rəhimov, A.Litman, G.Ferrandın işlərində baxılmışdır. Hiperbolik tipli tənliklər üçün kiçik həddin əmsalının axtarılması haqqında tərs məsələnin Hilbert fəzasında operator tənliyə gətirilməsi, bu operator tənliyin vasitəsilə kvadratik funksionalın qurulması, qurulan funksionalın minimallaşdırılması məsələsi S.K.Kabanixinin, baxılan tənliklər üçün variasional qoyuluşlar qeyri-lokal sərhəd şərtli dalğa tənliyinin sağ tərəfinin axtarılması məsələsi üçün H.F.Quliyev, Y.S.Qasımov, H.T.Tağıyevin, tənliyin baş əmsalının axtarılması məsələsi və simin rəqsləri tənliyi üçün akustika məsələsində əmsalın tapılması H.F.Quliyev, V.N.Nəsibzadənin işlərində ətraflı tədqiq olunmuşdur.

Qeyd edək ki, xüsusi törəməli tənliklər üçün müxtəlif və mühüm optimal idarəetmə məsələləri ilə K.R.Ayda-zadə, J.L.R.Arman, S.S.Haxıyev, Q.T.Əhmədov, A.Q.Butkovski, F.P.Vasilyev, K.Q.Həsənov, A.İ.Yeqorov, Y.V.Yeqorov, A.D.İskəndərov, A.Z.İşmühəmmədov, Y.S.Qasımov, V.Komkov, H.F.Quliyev, J.L.Lions, K.A.Lurye, K.B.Mənsimov, T.Q.Məlikov, M.C.Mərdanov, B.İ.Plotnikov, M.A.Sadıqov, S.Y.Serovayski, T.Q.Sirazetdinov, V.İ.Sumin, R.Q.Tağıyev, M.H.Yaqubov, Y.Ə.Şərifov, Ş.Ş.Yusubov, Z.İ.Xəlilov, Y.Sokolovski, M.B.Suryanarayana, T.Zollezzi, E.Zuazua və başqaları məşğul olmuşlar.

Təqdim olunan dissertasiya işində ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində əmsalların tapılması məsələsi və ikitərtibli xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsləsində başlanğıc funksiyaların tapılması məsələsi optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmiş və alınan məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları ilə tədqiq olunub. Dissertasiyanın sonunda iki konkret məsələ ədədi üsulla həll olunub. Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq hesab edirik ki, dissertasiya işinin mövzusu aktualdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Təqdim olunan dissertasiya işinin tədqiqat obyekti ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələləri, tərs məsələlər və optimal idarəetmə məsələləridir. Tədqiqatın predmeti isə tənliklərin əmsallarının və başlanğıc funksiyalarının tapılmasının optimal idarəetmə məsələsinə gətirməyə əsaslanan yanaşmalar və optimal idarəetmə məsələlərinin həll üsullarıdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. İkitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində bəzi əmsalların tapılması məsələsini və xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində başlanğıc funksiyaların tapılması məsələsini uyğun optimal idarəetmə məsələlərinə gətirmək, alınan məsələləri optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarının köməyilə tədqiq etmək, optimallıq şərtləri çıxarmaq, müəyyən hallarda alınmış optimallıq şərtlərinin vasitəsilə həll alqoritmi tərtib edərək, məsələni ədədi həll etmək.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində optimal idarəetmənin və optimallaşdırmanın riyazi nəzəriyyəsinin üsulları, riyazi fizikanın, funksional analizin və hesablama riyaziyyatının üsulları tətbiq olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

- ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklərin əmsallarının tapılması və xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində başlanğıc funksiyaların təyini məsələlərinin optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilməsi;

- alınan optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiq olunması;

- məqsəd funksionallarının diferensiallanan olmasının isbat edilməsi və onların qradiyenti üçün ifadələrin alınması;

- variasional bərabərsizliklər şəklində optimallıq üçün şərtlərin çıxarılması;

- çıxarılmış optimallıq şərtlərinin köməyilə iki halda optimal idarəetmə məsələlərinin həlli üçün alqoritmin verilməsi və onların ədədi həll eksperimentlərinin aparılması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

- ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklərin əmsallarının tapılması və xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində başlanğıc funksiyaların təyini məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilib;
- alınan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq olunub;
- məqsəd funksionallarının diferensiallanan olması isbat edilib və onların qradiyenti üçün ifadələr alınıb;
- variasional bərabərsizliklər şəklində optimallıq üçün şərtlər çıxarılıb;
- çıxarılmış optimallıq şərtlərinin köməyilə iki halda optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün alqoritm verilib və onların ədədi həll eksperimentləri aparılıb.

Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti. İşdə alınan nəticələr əsasən, nəzəri xarakter daşıyır. Təqdim olunan işdəki üsullar başqa xüsusi törəməli tənliklər üçün tətbiq oluna bilər. İşin praktiki əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, alınan nəticələr dalğa və rəqs proseslərində müxtəlif tərs və korrekt olmayan məsələlərin və optimal idarəetmə məsələlərinin təqribi həlli zamanı istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı elmi seminar və konfranslarda məruzə olunub: Naxçıvan Dövlət Universitetinin “Elektronika və informasiya texnologiyaları” kafedrasının (rəhbər dos. M.E.Əliyev), “İnformatika” kafedrasının (rəhbər dos. G.Ə.Rəhimova) seminarlarında, Bakı Dövlət Universitetinin “İdarəetmə nəzəriyyəsinin riyazi üsulları” kafedrasının (rəhbər prof. H.F.Quliyev) seminarlarında, AMEA-nın müxbir üzvü, tanınmış alim və görkəmli riyaziyyatçı, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Qoşqar Teymur oğlu Əhmədovun anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransı (Bakı-2017), IV Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики" (Нальчик-2018), V Международной научной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" (Нальчик-2018), The 6th International Conference on "Control and Optimization with Industrial Applications" (Baku-2018), "III Fizika, Riyaziyyat və Astronomiyanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransı (Naxçıvan-2023).

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Alınan bütün nəticə və təkliflər müəllifə aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiyanın əsas nəticələri 14 işdə çap olunub, onların siyahısı avtoreferatın sonunda verilib.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Naxçıvan Dövlət Universitetində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiyanın titul səhifəsi – 395, mündəricat – 2797, giriş – 31746, birinci fəsil – 80527, ikinci fəsil – 72107, üçüncü fəsil – 20670, işin ümumi həcmi – 208242 işarədən ibarətdir.

İŞİN QISA MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən, nəticədən, istifadə olunan ədəbiyyat siyahısından və əlavədən ibarətdir.

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiyanın qısa məzmunu şərh olunur.

Birinci fəsil dörd paraqrafdan ibarət olub, ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklərin əmsallarının tapılması məsələlərini optimal idarəetmə məsələlərinə gətirməklə onların tədqiqinə həsr olunub.

1.1 paraqrafında $(u(x,t), v(x)) \in U \times V$ cütünün

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|u + vu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u|_s = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,T)=\varphi(x),\quad x\in\Omega \tag{3}$$

münasibətlərindən tapılması məsələsinə baxılır, burada $\Delta -\ x$ dəyişəninə görə Laplas operatorudur, $f(x,t)\in L_2(Q), u_0(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1(x)\in L_2(\Omega),\ \varphi(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ – verilmiş funksiyalardır, Q=$\Omega\times(0,T)$ – R^{n+1}-də silindr, $T>0$ verilmiş ədəddir. $\Omega - R^n$-də $\partial\Omega$ sərhədi kifayət qədər hamar olan məhdud oblastdır (n =3, 4), $S=\partial\Omega\times(0,T)$ Q silindrinin yan səthidir,

$$U=\left\{u:\quad u\in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\frac{\partial u}{\partial t}\in L_\infty\big(0,T;\ L_2(\Omega)\big)\right\},$$

$$V=\{v: v\in L_2(\Omega),\ a\le v(x)\le b\ sanki\ hər\ yerdə\ \Omega-\text{da}\}, \tag{4}$$

$a,\ b$ –verilmiş ədədlərdir, $a<b$.

Qeyd edək ki, (1)-(3) məsələsi, (1), (2) düz məsələsinə tərs məsələdir və düz məsələnin U sinfindən olan yeganə ümumiləşmiş həlli var. Bu məsələni optimal idarəetmə məsələsinə gətirək: V funksiyalar sinfində

$$J_0(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega[u(x,T;v)-\varphi(x)]^2dx \tag{5}$$

funksionalına minimum verən funksiyanı tapmalı, burada $u(x,t;v)\in U$ funksiyası (1), (2) məsələsinin $v=v(x)$-ə uyğun həllidir. $v(x)$ funksiyasını idarəedici, V sinfini mümkün idarəedicilər sinfi adlandırırıq.

(1)-(3) və (1), (2), (4), (5) məsələləri arasında sıx əlaqə var. Əgər (5) funksionalının minimum qiyməti 0-a bərabərdirsə, onda (3) şərti ödənilir. Sonralar optimallığın alınan zəruri şərtində mümkün cırlaşmanın olmaması üçün aşağıdakı məsələyə baxaq: V sinfindən elə idarəedici tapmalı ki, o,

$$J_\alpha(v)=J_0(v)+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega|v(x)|^2\,dx\,,\ \alpha>0 \tag{6}$$

funksionalına (1), (2) şərtləri daxilində minimum qiymət versin, burada α verilmiş ədəddir.

Teorem 1. Tutaq ki, (1),(2),(4),(6) məsələsində $f(x,t)\in L_2(Q)$, $u_0(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), u_1(x)\in L_2(\Omega), \varphi(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ –verilmiş funksiyalardır. Onda bu məsələnin

$$V_*=\left\{v_*\in V: J_\alpha(v_*)=\inf_{v\in V}J_\alpha(v)\right\}$$

optimal idarəedicilər çoxluğu boş deyil, $L_2(\Omega)$-da zəif kompaktdır və ixtiyari $\{v_k(x)\}$ minimallaşdırıcı ardıcıllığı $L_2(\Omega)$-da V_*-a zəif yığılır.

Teorem 2. Tutaq ki, (1), (2), (4), (6) məsələsində teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda (6) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in V$ nöqtəsində $\delta v \in L_4(\Omega)$ artımlı diferensialı

$$\langle J'_\alpha(v), \delta v\rangle = \int_\Omega [\alpha v - \int_0^T u\psi dt]\delta v dx$$

ifadəsi ilə təyin olunur, burada $\psi = \psi(x, t; v)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + 2|u|\psi + v\psi = 0\,, \qquad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$\psi|_s = 0, \psi|_{t=T} = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial t}|_{t=T} = -[u(x,T;v) - \varphi(x)], \ x \in \Omega \tag{8}$$

qoşma məsələsinin U fəzasından olan həllidir.

Teorem 3. Tutaq ki, (1), (2), (4), (6) məsələsində teorem 1-in şərtləri ödənir. Onda $v = v_*(x) \in V$ idarəedicisinin bu məsələdə optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_\Omega \left[\alpha\, v_*(x) - \int_0^T u_*(x,t)\ \psi_*(x,t)dt\right] \left(v(x) - v_*(x)\right)dx \geq 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v \in V$ idarəedicisi üçün ödənməsidir, burada $u_*(x,t) = u(x,t;v_*)$ və $\psi_*(x,\mathrm{t}) = \psi(x,\mathrm{t};\ v_*)$ uyğun olaraq (1), (2) və (7), (8) sərhəd məsələlərinin həlləridir.

1.2 paraqrafında $(v\,(x), u(x,\mathrm{t})) \in V \times U$ cütünün

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 + v\,\frac{\partial u}{\partial x} = f\,(x,t), (x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T), \tag{9}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{10}$$

$$u|_{t=0} = u_0\,(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1\,(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{11}$$

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{12}$$

$$u \in L_6\,(Q) \tag{13}$$

münasibətlərindən tapılması məsələsinə baxılır, burada

$$\mathrm{V}=\left\{v\in \mathrm{W}_2^1(0,l): \alpha \leq v(x) \leq \beta, \left|\frac{dv(x)}{dx}\right| \leq \mu \text{ s. h. y. } (0,l)\text{-də}\right\} \tag{14}$$

$$\mathrm{U}=\left\{u: u \in L_\infty(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty\,(0,T; L_2(0,l))\right\}$$

$l > 0, T > 0, \alpha, \beta, \mu > 0$ –verilmiş ədədlər, $f \in L_2(Q), u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$,

$u_1 \in L_2(0,l)$, $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ − verilmiş funksiyalardır.

Qeyd edək ki, (9)-(11) məsələsinin verilmiş $v(x)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ funksiyaları üçün, ümumiyyətlə, t-yə görə qlobal həlli yoxdur[1]. Ona görə də apriori (9)-(11), (13), (14) münasibətlərini ödəyən $\{v,u\}$ cütlər çoxluğuna baxmaq lazımdır. $\{v,u\}$ cütü idarəedici-vəziyyət cütü adlandırılır[1]. Əgər $\{v,u\}$ cütü üçün (9)-(11), (13), (14) münasibətləri ödənirsə, onu mümkün cüt adlandıracağıq. Hər bir $v(x) \in V$ üçün, (9)-(11), (13) münasibətlərini ödəyən $u(x,t)$ funksiyası (9)-(11) sərhəd məsələsinin U sinfindən olan ümumiləşmiş həllidir.

Fərz edək ki, mümkün cütlər çoxluğu boş deyil.

İndi aşağıdakı məsələyə baxaq: mümkün cütlər çoxluğunda

$$J(v,u) = \frac{1}{2}\int_0^l [u(x,T) - \varphi(x)]^2 dx + \frac{1}{6}\int_Q (u - u_d)^6 dxdt \quad (15)$$

funksionalının minimumunu tapmalı, burada $u_d \in L_6(Q)$ −verilmiş funksiyadır.

Teorem 4. Tutaq ki, (9)-(11), (13), (14), (15) məsələsində $f \in L_2(Q), u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), u_1 \in L_2(0,l), \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), u_d \in L_6(Q)$ − verilmiş funksiyalardır. Onda bu məsələdə optimal cüt var.

Teorem 5. Tutaq ki, teorem 4-ün şərtləri ödənir və $\{v^0, u^0\}$ optimal cütdür. Onda elə $\psi^0(x,t)$ funksiyası var ki,

$$\psi^0 \in L_\infty(0,T; W_2^{\frac{2}{3}}(0,l)), \frac{\partial \psi^0}{\partial t} \in L_\infty(0,T; W_2^{-\frac{1}{3}}(0,l))$$

və $\{v^0, u^0, \psi^0\}$ üçlüyü üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} - (u^0)^3 + v^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} = f, \quad (x,t) \in Q,$$

$$u^0(0,t) = 0, u^0(l,t) = 0, 0 \le t \le T,$$

$$u^0(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u^0(x,0)}{\partial t} = u_1(x), 0 \le x \le l,$$

$$\frac{\partial^2 \psi^0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial x^2} - 3(u^0)^2\psi^0 - \frac{\partial}{\partial x}(v^0\psi^0) = (u^0 - u_d)^5, (x,t) \in Q,$$

---

[1] Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987, -368 с.

$$\psi^0(0,t)=0,\quad \psi^0(l,t)=0,\ 0\le t\le T,$$
$$\psi^0(x,\mathrm{T})=0,\quad \frac{\partial\psi^0(x,\mathrm{T})}{\partial \mathrm{t}}=-[u^0(x,\mathrm{T})-\varphi(x)],\ 0\le x\le l,$$
$$\int_0^l\left(\int_0^T\psi^0(x,t)\frac{\partial u^0(x,t)}{\partial x}dt\right)\left(v(x)-v^0(x)\right)dx\le 0\ \ \forall v\in V,$$
burada $W_2^{\frac{2}{3}}(0,l)$, $W_2^{-\frac{1}{3}}(0,l)$ kəsr tərtibli Sobolev fəzalarıdır[2].

1.3 paraqrafında həllinin kəsilməsi olan membranın rəqsləri tənliyində birinci tərtib törəmələrin əmsalları ilə optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Tutaq ki, proses $Q=\Omega\times(0,T)$ silindrində
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\Delta u-u^2+v_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+v_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(x,t),\ (x,t)\in Q \quad (16)$$
tənliyinin
$$u|_S=0,\ u|_{t=0}=u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x),\ x\in\Omega \quad (17)$$
sərhəd və başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli ilə təsvir olunur, burada $\Omega\subset R^2$ məhdud, $\partial\Omega$ sərhədi hamar olan oblastdır, $S=\partial\Omega\times(0,\mathrm{T})$ Q silindrinin yan səthi, $T>0$ verilmiş ədəddir, $x=(x_1,x_2)\in\Omega$, $f(x,t)\in L_2(Q), u_0(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), u_1(x)\in L_2(\Omega)-$ verilmiş funksiyalardır, $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}$ Laplas operatorudur, $v(x)=\left(v_1(x),v_2(x)\right)-$ idarəedici funksiyadır.

Fərz edək ki,
$$v(x)\in V=\Big\{v(x)=\left(v_1(x),v_2(x)\right):v_i(x)\in \mathrm{C}^1\left(\overline{\Omega}\right),|v_i(x)|\le\mu_i,$$
$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\le\mu_{ij},\ i,j=1,2\Big\} \quad (18)$$
və V çoxluğu $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ metrikası mənada qapalıdır, burada μ_i,μ_{ij}, $i,j=1,2-$verilmiş müsbət ədədlərdir.

Qeyd edək ki, (16), (17) məsələsinin verilmiş $v(x)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ funksiyaları üçün, ümumiyyətlə, t-yə görə qlobal həlli yoxdur[1]. Ona görə də apriori (16)-(18) və
$$u\in L_4(Q) \quad (19)$$

---

[2]Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, -371 с.

münasibətlərini ödəyən $\{v,u\}$ cütlər çoxluğuna baxmaq lazımdır. $\{v,u\}$ cütü idarəedici-vəziyyət cütü adlandırılır[1]. Əgər (16), (17), (18), (19) münasibətləri ödənərsə, $\{v,u\}$ cütünü mümkün cüt adlandıracağıq.

Fərz edək ki, mümkün $\{v,u\}$ cütlər çoxluğu boş deyil. (20)

Qeyd edək ki, əgər (19) şərti ödənərsə, (16), (17) sərhəd məsələsinin

$$U=\left\{u: u\in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t}\in L_\infty\big(0,T;\ L_2(\Omega)\big)\right\}$$

fəzasından olan ümumiləşmiş həlli var[2,3], yəni $t=0$-da $u(x,0)=u_0(x)$ şərti və ixtiyari $\eta\in U$, $\eta(x,T)=0$ funksiyası üçün

$$\int_Q\Big[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_2}-u^2\eta+v_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\eta+$$

$$+v_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\eta\Big]dxdt-\int_\Omega u_1(x)\eta\,(x,0)dx=\int_Q f\eta dxdt$$

inteqral eyniliyi ödənir.

Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq: elə $\{v,u\}$ mümkün cütü tapmalı ki, o, mümkün cütlər çoxluğunda

$$J(v,u)=\frac{1}{4}\|u-u_d\|^4_{L_4(Q)}+\frac{1}{2}\|u(x,T)-\varphi(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (21)$$

funksionalına minimum qiymət versin, burada $u_d\in L_4(Q)$, $\varphi(x)\in L_2(\Omega)-$ verilmiş funksiyalardır.

Teorem 6. Tutaq ki, (16), (17), (21) məsələsinin verilənləri (18)-(20) şərtlərini və $u_d\in L_4(Q)$, $\varphi(x)\in L_2(\Omega)$ şərtlərini ödəyirlər. Onda (16), (17), (21) məsələsində optimal cüt var, yəni $J(v^0,u^0)=min\,J(v,u)$, burada $\{v,u\}$ mümkün cütlərdir.

Baxılan məsələdə hər hansı $\{v^0,u^0\}$ optimal cütünə adaptə olunmuş cərimə funksionalı daxil edək:

---

[3]Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, -371 с.

$$J_\varepsilon^a(v,u) = J(v,u) +$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - u^2 + v_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial u}{\partial x_2} - f\right\|_{L_2(Q)}^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\|u-u^0\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2}\left[\|v_1 - v_1^0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_2 - v_2^0\|_{L_2(\Omega)}^2\right], \quad (22)$$
burada $v,\ u$ funksiyaları
$$v \in V,\ \ u \in L_4(Q),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \in L_2(Q),$$
$$u|_S = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x),\ x \in \Omega \quad (23)$$
şərtlərini ödəyirlər, $\varepsilon > 0$ −cərimə parametridir.

Teorem 7. Tutaq ki, (22), (23) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənir. Onda (22), (23) məsələsində hər bir $\varepsilon > 0$ üçün optimal cüt var, yəni
$$J_\varepsilon^a(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) = \min_{\{v,u\}} J_\varepsilon^a(v,u).$$

Teorem 8. Tutaq ki, (16)-(19) məsələsində yuxarıdakı şərtlər ödənilir və $\{v^0, u^0\}$ bu məsələdə optimal cütdür. Onda elə $\{v^0, u^0, \psi^0\}$ üçlüyü var ki, aşağıdakı münasibətlər ödənir:
$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} - \Delta u^0 - (u^0)^2 + v_1^0\frac{\partial u^0}{\partial x_1} + v_2^0\frac{\partial u^0}{\partial x_2} = f(x,t), (x,t) \in Q, \quad (24)$$
$$\frac{\partial^2 \psi^0}{\partial t^2} - \Delta\,\psi^0 - 2u^0\psi^0 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_1^0\psi^0\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(v_2^0\,\psi^0\right) = (u-u_d)^3, (x,t) \in Q, \quad (25)$$
$$u^0|_S = 0,\ u^0(x,0) = u_0(x),\ \ \frac{\partial u^0(x,0)}{\partial t} = u_1(x),\ \ \ x \in \Omega\ , \quad (26)$$
$$\psi^0\Big|_S = 0,\ \psi^0(x,T) = 0,\ \ \frac{\partial \psi^0(x,T)}{\partial t} = -[u(x,T) - \varphi(x)]\,, x \in \Omega\,, \quad (27)$$
$$u^0 \in L_\infty(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\ \frac{\partial u^0}{\partial t} \in L_\infty\big(0,T; L_2(\Omega)\big), \quad (28)$$
$$\psi^0 \in L_\infty(0,T; W_2^{\frac{1}{3}}(\Omega)),\ \ \frac{\partial \psi^0}{\partial t} \in L_\infty(0,T; W_2^{-\frac{2}{3}}(\Omega)), \quad (29)$$
burada $W_2^{\frac{1}{3}}(\Omega), W_2^{-\frac{2}{3}}(\Omega)$ kəsr tərtibli Sobolev fəzalarıdır,
$$\int_Q \left[\psi\frac{\partial u^0}{\partial x_1}(v_1 - v_1^0) + \psi\frac{\partial u^0}{\partial x_2}(v_2 - v_2^0)\right] dxdt \geq 0 \quad \forall v \in V. \quad (30)$$
Qeyd edək ki, (25)-(27) məsələsi (16), (17), (21) məsələsinə qoşma məsələ adlanır.

1.4 paraqrafında ikitərtibli bir qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün ən tez təsir məsələsinə baxılır. Vəziyyəti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|u + vu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (31)$$

tənliyi və

$$u|_s = 0, \ \ u|_{t=0} = u_0(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{\ t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega \qquad (32)$$

sərhəd və başlanğıc şərtlərilə təsvir olunan sistemə baxaq, burada verilənlər üzərinə qoyulan şərtlər 1.1 paraqrafında olduğu kimidir, $v{=}v(x,t)$ idarəedici funksiyası isə

$V{=}\{v(x,t){:}\, v \in \mathrm{L}_4(\mathrm{Q}),\ a{\le}v(x{,}\mathrm{t}){\le}b$ Q-də sanki hər yerdə$\}$

mümkün idarəedicilər sinfindən götürülür, burada $a, b -$ verilmiş ədədlərdir.

(31), (32) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli isə 1.1 paraqrafındakı U sinfinə daxildir.

Tutaq ki, (31), (32) məsələsinin verilənləri $f(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ u_1(x) \in L_2(\Omega)$ şərtlərini ödəyir. $Q = \Omega \times (0,T) -$ R^{n+1}-də silindr, $T > 0$ verilmiş ədəddir. $\Omega \subset R^n$-də olan məhdud oblastdır (n= 3,4), onun $\partial\Omega$ sərhədi kifayət qədər hamardır.

Aşağıdakı məsələyə baxaq: elə $(v,\tau) \in V \times (0,T)$ cütünü tapmalı ki, o, ən tez vaxta (31), (32) sistemini $(u_0(x), u_1(x))$ başlanğıc vəziyyətdən verilmiş K çoxluğuna gətirsin, burada

K çoxluğu $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$-da zəif qapalı çoxluqdur. (33)

Fərz edək ki, elə $(v,\tau) \in V \times (0,T)$ cütü var ki, (31), (32) məsələsinin uyğun $u(x,t;v)$ həlli üçün

$$\left\{u(x,\tau;v), \frac{\partial u(x,\tau;v)}{\partial t}\right\} \in K \qquad (34)$$

şərti ödənilir.

Baxılan məsələdə optimal zaman

$$\tau_0{=}\inf\{\tau\} \qquad (35)$$

şərtindən təyin olunur, yəni τ_0 anı (34) şərtini ödəyən τ -ların bütün qiymətlərinin dəqiq aşağı sərhədidir.

Teorem 9. Tutaq ki, (31), (32) məsələsində $f(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ u_1(x) \in L_2(\Omega)$ −verilmiş funksiyalardır və (33), (34) şərtləri ödənir. Onda elə $(v_0,\tau_0) \in V \times (0,T)$ cütü var ki, $\left\{u(x,\tau_0;v_0), \frac{\partial u(x,\tau_0;v_0)}{\partial t}\right\} \in K$ və (35) şərti ödənir.

Teorem 10. Tutaq ki, (31)-(34) məsələsində teorem 9-un şərtləri ödənir. Əlavə olaraq, fərz edək ki, verilmiş K çoxluğu, xüsusi halda, $\{0, \chi_1(x)\}$ şəklindədir, burada $\chi_1(x) \in L_2(\Omega)$. Onda $(v_*, \tau_*) \in V \times (0, T)$ cütünün ən tez təsir məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt ixtiyari $(v, \tau) \in V \times (0, T)$ cütü üçün

$$\int_0^{\tau_*}\int_\Omega u_*(x,t)\psi_*(x,t)\big(v(x,t) - v_*(x,t)\big)dxdt \ +$$
$$+ \left(1 - \int_\Omega \frac{\partial u_*(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi_*(x,t)}{\partial t}dx\right)(\tau - \tau_*) \geq 0 \qquad (36)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $u_*(x,t)$ (31), (32) məsələsinin (v_*, τ_*) üçün həlli, $\psi_*(x,t)$ isə

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + 2|u|\psi + v\psi = 0, \ \ (x,t) \in (0,\tau), \qquad (37)$$
$$\psi|_s = 0, \ \psi(x,T) = 0, \ \ x \in \Omega \qquad (38)$$

qoşma məsələsinin trivial olmayan hər hansı ümumiləşmiş həllidir.

Qeyd edək ki, $t = \tau$-da $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ üzərində şərt olmadığından (37), (38) məsələsinin sonsuz sayda həlli var. Bundan əlavə $J(v,\tau) = \tau(v)$ funksionalının qradiyentinin ifadəsi

$$J'(v,\tau) = \left(u(x,t)\psi(x,t), (1 - \int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dx)\right) \in L_2(\mathrm{Q}) \times (0,T)$$

şəklindədir.

Dissertasiyanın dörd paraqrafdan ibarət olan ikinci fəsli ikitərtibli xətti hiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələdə başlanğıc funksiyaların tapılması məsələlərinə həsr olunub.

2.1 paraqrafında ikitərtibli hiperbolik tənlik üçün sərhəd funksiyalarının müşahidə olunan qiymətinə görə başlanğıc funksiyaların təyini məsələsi öyrənilib.

2.2 paraqrafında xətti hiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələdə iki aralıq müşahidə anına görə başlanğıc idarəetmə məsələsi öyrənilib.

Tutaq ki,

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{[u(x,t_1;v) - z_1(x)]^2 + [u(x,t_2;v) - z_2(x)]^2\}dx \quad (39)$$

funksionalının

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x,t), (x,t) \in Q, \qquad (40)$$

$$u\,|_s = 0, u\,(x,0) = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), x \in \Omega \qquad (41)$$

şərtləri daxilində minimumunu tapmaq tələb olunur. Burada $T > 0 -$ verilmiş ədəd, $t_1, t_2 \in (0,T)$, $t_1 < t_2$ −ixtiyari verilmiş zaman anları, $z_1(x),\ z_2(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ −verilmiş funksiyalardır, $\varphi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L_2(\Omega) -$ prosesin başlanğıc vəziyyətini təyin edən naməlum funksiyalardır, $\Omega \subset R^n$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$ 2.1 paraqrafındakı oblastlardır, $Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0\,(x)u -$ diferensial ifadədir, belə ki, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ −verilmiş funksiyalardır, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), x \in \Omega,\ \ i,j = 1,\dots,n$ və bütün $x \in \overline{\Omega}$, $\forall\xi \in R^n$ üçün

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \alpha = const > 0, a_0 \geq 0.$$

Tutaq ki, zamanın ixtiyari $t_1, t_2 \in (0,T)$, $t_1 < t_2$ anlarında prosesin $u(x,t)$ vəziyyəti müşahidə olunur:

$$u(x,t_1) = z_1(x),\ u(x,t_2) = z_2(x),\ \ x \in \Omega\,. \qquad (42)$$

Bu müşahidələrə görə prosesin $v(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x))$ başlanğıc vəziyyətini bərpa etmək tələb olunur.

Belə məsələ tərs məsələlər nəzəriyyəsində retrospektiv tərs məsələ adlanır. Retrospektiv məsələ ilə (39)-(41) məsələsi arasında sıx əlaqə var. Əgər (39)-(41) məsələsində $\min_{v\in V} J(v) = 0$ olarsa, onda retrospektiv məsələdə (42) əlavə şərti ödənir.

Qeyd edək ki, verilmiş $v \in V \equiv \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ idarəedicisi üçün (40), (41) məsələsinin yeganə ümumiləşmiş həlli U sinfinə daxildir.

Teorem 11. Tutaq ki, (39)-(41) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənir və $\sqrt{\lambda_k}(t_2 - t_1) \neq \pi m,\ m, k \in N$, burada $\lambda_k > 0$, $AX = \lambda X,\ \ X|_{\partial\Omega} = 0$ spektral məsələsinin məxsusi ədədləridir. Onda $\inf_{v\in V} J(v) = 0$.

Sonralar alınacaq optimallıq şərtində mümkün cırlaşmanın olmaması üçün (39) funksionalı əvəzinə

$$J_\beta(v) = J(v) + \frac{\beta}{2}\|v\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\times L_{2(\Omega)}},\ \ \beta = const > 0 \qquad (43)$$

funksionalını götürək və aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxaq: (43) funksionalını (40), (41) şərtləri daxilində $V_m \subset H = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ qabarıq, qapalı çoxluğunda minimallaşdırmalı.

Teorem 12. Tutaq ki, (40), (41), (43) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənilir. Onda (43) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in V_m$ nöqtəsində $\delta v \in H$ artımlı diferensialı aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$\langle J'_\beta(v), \delta v \rangle = \int_\Omega \left\{ \left[-\frac{\partial \psi(x,0;v)}{\partial t} + \beta \varphi_0(x) \right] \delta\varphi_0(x) + \right.$$

$$\left. + [\psi(x,0;v) + \beta\varphi_1(x)]\delta\varphi_1(x) + \beta \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \delta\varphi_0}{\partial x_i} \right\} dx.$$

Teorem 13. Tutaq ki, (40), (41), (43) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənilir. Onda bu məsələdə $v_* = v_*(x) = \left(\overset{*}{\varphi}_0(x), \overset{*}{\varphi}_1(x) \right) \in V_m$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt $\forall v(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x)) \in V_m$ idarəedicisi üçün

$$\int_\Omega \left\{ \left[-\frac{\partial \psi_*(x,0)}{\partial t} + \beta \overset{*}{\varphi}_0(x) \right] \left(\varphi_0(x) - \overset{*}{\varphi}_0(x) \right) + \left[\psi_*(x,0) + \beta \overset{*}{\varphi}_1(x) \right] \left(\varphi_1(x) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \overset{*}{\varphi}_1(x) \right) + \beta \sum_{i=1} \frac{\partial \overset{*}{\varphi}_0(x)}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \overset{*}{\varphi}_0(x)}{\partial x_i} \right) \right\} dx \geq 0$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $\psi_*(x,t) = \psi(x,t;v_*)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + A\psi = 0, (x,t) \in Q,$$

$$\psi(x,T) = 0, \frac{\partial \psi(x,T)}{\partial t} = 0, x \in \Omega,$$

$$\psi(x,t_i + 0) - \psi(x,t_i - 0) = 0, \ x \in \Omega, \ i = 1,2,$$

$$\frac{\partial \psi(x,t_i+0)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t_i-0)}{\partial t} = -[u(x,t_i;v) - z_i(x)], x \in \Omega, i = 1,2,$$

$$\psi \mid_S = 0$$

qoşma məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ - dən olan ümumiləşmiş həllidir.

2.3 paraqrafında ikitərtibli xətti hiperbolik tənlik üçün Dirixle məsələsində optimallaşdırma üsuluna baxılıb.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{44}$$

$$u \mid_S = 0, \ u(x,0) = u_0(x), u(x,T) = g(x), \ x \in \Omega \tag{45}$$

Dirixle məsələsinə baxaq, burada $Q = \Omega \times (0,T)$ R^{n+1}-də silindrdir,

Ω, R^n-də $\partial\Omega$ sərhədi hamar olan məhdud oblastdır, $S = \partial\Omega \times (0, \mathrm{T})$, Q silindirinin yan səthidir, $T > 0$ verilmiş ədəddir,

$$A(t)u = -\sum_{i.j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x,t)u$$

diferensial ifadədir, $a_{ij}(x,t),\ i,j = 1,\dots,n,\ a_0(x,t)$ funksiyaları Q-də ölçülən məhduddurlar və sanki bütün $(x,t) \in Q$ üçün $a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t),\ i,j=1,\dots,n,\ \left|\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}, a_0(x,t)\right| \le \mu$ və $\forall\xi\in R^n$ üçün $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ şərtləri ödənilir, μ, ν müsbət sabitlərdir, $f \in L_2(Q),\ u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ g \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ −verilmiş funksiyalardır.

Məlumdur ki,[4,5] (44), (45) Dirixle məsələsi korrekt olmayan məsələdir. Bu korrekt olmayan məsələ müəyyən düz korrekt başlanğıc-sərhəd məsələsinə tərs məsələ kimi ifadə oluna bilər.

Doğrudan da,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(t)u = f(x,t),\ \ (x,t) \in Q, \tag{44}$$

$$u|_{S} = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v(x),\ \ x \in \Omega \tag{46}$$

məsələsində $v(x)$ verilmişsə, bu məsələ korrekt məsələdir.

İndi tutaq ki, (46)-da $v(x)$ naməlumdur. Fərz edək ki, $v(x)$ funksiyasını təyin etmək üçün

$$u(x,T) = g(x), \quad x \in \Omega \tag{47}$$

əlavə informasiyası məlumdur.

Burada tərs məsələ, verilmiş $f(x,t), u_0(x), g(x)$ funksiyalarına görə (44), (46), (47) münasibətlərindən $v(x)$ funksiyasını tapmaqdan ibarətdir.

$L_2(\Omega)$ fəzasından $L_2(\Omega)$ fəzasına təsir edən L operatoruna baxaq:

$$L: v(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \to g(x) = u(x,T).$$

Onda tərs məsələni operator şəklində

---

[4] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009,-457 с.
[5] Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970,-336 с.

$$Lv = g \tag{48}$$

kimi yazmaq olar.

(48) məsələsini

$$J(v) = \frac{1}{2}\|Lv - g\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{49}$$

məqsəd funksionalını minimallaşdıraraq həll etmək olar.

Əgər (44), (46), (49) məsələsində elə bir $v_* = v_*(x) \in L_2(\Omega)$ idarəedicisi varsa ki, $J_* = J(v_*) = \inf\limits_{v \in L_2(\Omega)} J(v) = 0$ olsun, onda $v_* = v_*(x)$ idarəedicisi və ona uyğun (44), (46) məsələsinin $u_* = u(x,t;v_*)$ həlli (44), (46), (47) tərs məsələsinin həlli olur.

Teorem 14. Tutaq ki, (44), (46), (49) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər ödənilir. Onda (49) funksionalı $L_2(\Omega)$-da Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ nöqtəsində diferensialı

$$\langle J'(v), \delta v\rangle = -\int\limits_{\Omega} \psi(x,0;v)\delta v(x)\,dx$$

ifadəsi ilə təyin edilir, burada

$$J'(v) = -\psi(x,0;v)$$

funksionalın qradiyentidir və $\psi(x,t;v)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + A(t)\psi = 0, \quad (x,t) \in Q\ , \tag{50}$$

$$\psi|_S = 0, \psi(x,T;\ v) = 0, \frac{\partial\psi(x,T;v)}{\partial t} = [u(x,T;v) - g(x)], x \in \Omega \tag{51}$$

qoşma məsələsinin həllidir.

Teorem 15. Tutaq ki, teorem 14-ün şərtləri ödənilir. Onda $v_* = {}$ $= v_*(x) \in L_2(\Omega)$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt

$$\psi(x,0;v_*) = 0 \tag{52}$$

bərabərliyinin ödənməsidir, burada $\psi(x,t;v_*)$ funksiyası $v = v_*(x)$ üçün (50), (51) qoşma məsələsinin həllidir.

Göstərilir ki, yuxarıda daxil edilən L operatorunun norması məhduddur.

(44), (46), (49) minimallaşdırma məsələsinə ən sürətli enmə üsulunu tətbiq etmək olar. Bu üsul $v_k(x)$ yaxınlaşmalarını ardıcıl olaraq

$$v_{k+1}(x) = v_k(x) - \alpha J'(v_k) = v_k(x) + \alpha\psi(x,0,v_k),\ k = 0,1,... \tag{53}$$

qaydası ilə hesablamaqdan ibarətdir[6], burada $v_0(x) -$ müəyyən başlanğıc yaxınlaşma, $J'(v) -$ (49) funksionalının qradiyentidir, α_k enmə parametri isə

$$\varphi_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha\geq 0} \varphi_k(\alpha), \varphi_k(\alpha) = J(v_k - \alpha J'(v_k))$$

şərtindən təyin olunur.

Teorem 16. Tutaq ki, teorem 14-ün şərtləri ödənilir. Onda (53) qaydası ilə təyin olunan $\{v_k(x)\}$ ardıcıllığı üçün aşağıdakı hökmlər doğrudur: $\{J(v_k)\}$ ardıcıllığı monoton azalır,

$$\lim_{k\to\infty} \|J'(v_k)\| = \lim_{k\to\infty} \|\psi_k(x, 0;\ v_k)\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$\{v_k(x)\}$ ardıcıllığı $L_2(\Omega)$-da (49) funksionalını minimallaşdırır, $L_2(\Omega)$-da

$$V_* = \left\{v_* \in L_2(\Omega) : J_* = \inf_{v\in L_2(\Omega)} J(v) \right\}$$

çoxluğuna zəif yığılır və $0\leq J(v_k) - J_* \leq \frac{C}{k}$, k=1,2,... qiymətləndirməsi doğrudur.

Əgər (44), (46), (49) məsələsində $v(x)$ idarəedicisi $L_2(\Omega)$-ya daxil olan qabarıq, qapalı V çoxluğunda axtarılsaydı, bu halda optimallıq şərti

$$\int_\Omega \psi(x, 0; v_*)\big(v(x) - v_*(x)\big)dx \leq 0 \quad \forall v \in V \qquad (54)$$

şəklinə düşür, (53) düsturu isə

$$v_{k+1}(x) = P_V\big(v_k(x) - \alpha_k J'(v_k)\big)$$

düsturu ilə əvəz olunur, burada P_V, $v \in L_2(\Omega)$ nöqtəsini V çoxluğuna proyeksiyalama operatorudur, α_k olaraq $0<\varepsilon_0\leq\alpha_k\leq\frac{2}{\mathcal{L}+2\varepsilon}$ şərtini ödəyən ədədi götürmək olar, $\mathcal{L}$ $J'(v)$-nin Lipşis sabitidir, ε_0, ε – müsbət ədədləri üsulun parametrləridir.

Əgər (44), (46), (49) məsələsində elə bir $v_* = v_*(x) \in V \subseteq L_2(\Omega)$ (V-qabarıq, qapalı çoxluqdur) idarəedicisi varsa ki, $J_* = J(v_*) = 0$ olsun, onda (50), (51) məsələsində $u(x, T; v_*) = g(x)$ olduğundan, bu məsələnin həlli $\psi(x, t) = 0$ olur. Bu hal cırlaşan hal adlanır. Bu halda həm (52) şərti, həm də (54) şərti trivial ödənilir. Trivial halın olmaması üçün $J(v)$ funksionalı əvəzinə

---

[6] Васильев Ф.П. Методы решения экремальных задач. М.: Наука, 1981,-400 с.

$$J_\beta(v) = J(v) + \frac{\beta}{2}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \beta = const > 0 \qquad (55)$$

funksionalına baxmaq olar. Əgər (55) funksionalının $L_2(\Omega)$-ya daxil olan qabarıq, qapalı V çoxluğunda minimumunu tapmaq məsələsinə baxılarsa, bu halda (54) optimallıq şərti

$$\int_\Omega [-\psi(x,0;v_*) + \beta v_*(x)](v(x) - v_*(x))dx \geq 0 \quad \forall v \in V$$

şərti ilə əvəz olunur, burada $v_*(x) \in V$ (55) funksionalına minimum verən idarəedici, $\psi(x,t;v_*)$ isə (50), (51) qoşma məsələsinin $v = v_*(x)$ idarəedicisinə uyğun həllidir.

2.4 paraqrafında dalğa tənliyi üçün qarışıq şərtli sərhəd məsələsinin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi və onun tədqiqinə baxılıb.

Burada fərz olunur ki, proses $Q = \Omega \times (0,T)$ oblastında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (x_1,x_2,t) \in Q, \qquad (56)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x_1,x_2), \; u|_{t=T} = u_1(x_1,x_2), \; (x_1,x_2) \in \Omega, \quad (57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=l_1} = 0, \quad (x_2,t) \in (0,l_2) \times (0,T), \quad (58)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}|_{x_2=0} = \frac{\partial u}{\partial x_2}|_{x_2=l_2} = 0, \quad (x_1,t) \in (0,l_1) \times (0,T) \quad (59)$$

sərhəd məsələsi ilə təsvir olunur, burada $\Omega=(0,l_1)\times(0,l_2)$ – düzbucaqlıdır, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $T > 0$ verilmiş ədədlər, $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, $u_1 \in W_2^1(\Omega)$ – verilmiş funksiyalardır.

Məlumdur ki, (56)-(59) korrekt olmayan məsələdir[4]. (57) şərtlərindən ikincisini

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v(x_1,x_2), \; (x_1,x_2) \in \Omega$$

şərti ilə əvəz edirik və aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxırıq: elə $v(x_1,x_2) \in L_2(\Omega)$ funksiyasını tapmalı ki, o, (56), (58), (59) və

$$u|_{t=0} = u_0(x_1,x_2), \; \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v(x_1,x_2), \; (x_1,x_2) \in \Omega \qquad (60)$$

şərtlərini ödəyən $u(x_1,x_2,t;v)$ funksiyası ilə birlikdə

$$J_0(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [u(x_1,x_2,T;v) - u_1(x_1,x_2)]^2 dx_1 dx_2$$

funksionalına minimum versin.

Bu paraqrafda əvvəlcə $\inf_{v\in L_2(\Omega)} J_0(v) = 0$ olduğu isbat olunur. Sonra alınacaq optimallıq şərtinin cırlaşan olmaması üçün aşağıdakı məsələyə baxılır:

$J_\alpha(v)$=$J_0(v)$+$\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}$, α>0 (burada α verilmiş ədəddir) (61)

funksionalının $V_m \subset L_2(\Omega)$ qapalı, qabarıq çoxluğunda (56), (58), (59), (60) şərtləri daxilində minimumunu tapmalı.

Teorem 17. Tutaq ki, (56), (58)-(61) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər ödənilir. Onda (61) funksionalı $L_2(\Omega)$-da Freşe mənada diferensiallanandır və onun diferensialı

$$\langle J'_\alpha(v), \delta v\rangle = \int_\Omega [-\psi(x_1, x_2, 0; v) + \alpha v(x_1, x_2)]\delta v(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\psi(x_1, x_2, t; v)$ aşağıdakı qoşma məsələsinin həllidir:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial {x_2}^2}, (x_1, x_2, t) \in Q,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = [u(x_1, x_2, T; v) - u_1(x_1, x_2)], (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=l_1} = 0, (x_2, t) \in (0, l_2) \times (0, T),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=l_2} (x_1, t) \in (0, l_1) \times (0, T).$$

Teorem 18. Tutaq ki, teorem 17-nin şərtləri ödənir. Onda v_*=$v_*(x_1, x_2)$∈V_m idarəedicisinin (56), (58)-(61) məsələsində optimal idarəedici olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_\Omega [-\psi(x_1, x_2, 0; v_*) + \alpha v_*(x_1, x_2)]\big(v(x_1, x_2) -$$
$$-v_*(x_1, x_2)\big)dx_1dx_2 \geq 0 \ \ \forall v \in V$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $\psi(x_1, x_2, t; v_*)$ yuxarıdakı qoşma məsələnin $v = v_*(x_1, x_2)$ üçün həllidir.

Dissertasiyanın üçüncü fəsli **iki paraqrafdan** ibarət olub bəzi model məsələlərinin ədədi həllinə həsr olunub.

3.1 paraqrafında $\big(u(x, t), v(x)\big) \in U \times V$ cütünün

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+|u|u+vu=f(x,t), 0<x<l, 0<t<T, \quad (62)$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \ 0\le t\le T, \quad (63)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x), \ 0\le x\le l, \quad (64)$$

$$u(x,T)=\varphi(x), \ 0\le x\le l \quad (65)$$

münasibətlərindən tapılması məsələsinə baxılıb, burada $f(x,t)$, $u_0(x), u_1(x), \varphi(x)$ −verilmiş funksiyalar, $l>0, \ T>0$ verilmiş ədədlərdir,

$$U=\left\{u(x,t): u\in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)), \frac{\partial u}{\partial t}\in L_\infty(0,T;L_2(0,l))\right\},$$

$$V=\{v(x): \ v\in L_2(0,l), \ \ a\le v(x)\le b, x\in(0,l)\},$$

a, b −verilmiş ədədlərdir.

Qeyd edək ki, (62)-(65) məsələsi, (62)-(64) düz məsələsinə tərs məsələdir. Bu məsələni aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirək:

V funksiyalar sinfində

$$J_0(v)=\frac{1}{2}\int_0^l [u(x,T;v)-\varphi(x)]^2\,dx$$

funksionalına minimum verən funksiyanı tapmalı, burada $u(x,t;v)$ funksiyası (62)-(64) məsələsinin $v=v(x)$-ə uyğun həllidir. $v(x)$-i idarəedici funksiya, V sinfini mümkün idarəedicilər sinfi adlandırırıq.

Optimallığın zəruri şərtində mümkün cırlaşmanın olmaması üçün belə məsələyə baxırıq: V sinfindən elə idarəedici tapmalı ki, o,

$$J_\beta(v)=J_0(v)+\frac{\beta}{2}\int_0^l |v(x)|^2 dx \quad \beta>0 \ \text{(β verilmiş ədəddir)}$$

funksionalına (62)-(64) şərtləri daxilində minimum qiymət versin.

Bu məsələni ədədi həll etmək üçün məsələnin verilənlərinin kifayət qədər hamar olduğunu fərz edirik, məsələnin həll alqoritmini veririk və qradiyentin proyeksiyası üsulunu tətbiq edirik. Bundan əlavə əsas və qoşma sərhəd məsələlərini şəbəkə üsulu ilə həll etməklə baxılan məsələlər ədədi həll olunub.

Disertasiyada ədədi eksperimentin nəticələri, qrafiklər və uyğun cədvəllər verilib.

3.2 paraqrafında aşağıdakı məsələyə baxılıb:

$$V=\left\{v(x): \alpha\le v(x)\le\beta, \left|\frac{dv}{dx}\right|\le\mu\right\}$$

mümkün idarəedicilər sinfindən elə idarəedici tapmaq lazımdır ki, o,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 + v(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T,$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), 0 \le x \le l$$

sərhəd məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(v,u) = \frac{1}{2}\int_0^l [u(x,T;v) - \varphi(x)]^2 dx + \frac{1}{6}\int_0^l \int_0^T [u(x,t;v) - u_d(x,t)]^6 dxdt$$

funksionalına minimum qiymət versin, burada $l, T, \alpha, \beta, \mu -$ verilmiş ədədlər, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x), \varphi(x)$, $u_d -$ verilmiş funksiyalardır.

Bu məsələni də ədədi həll etmək üçün məsələnin verilənlərinin kifayət qədər hamar olduğu fərz edilir, məsələnin həll alqoritmi verilir. Qradiyentin proyeksiyası üsulundan istifadə edərək, əsas və qoşma məsələləri şəbəkə üsulları ilə həll etməklə baxılan məsələ ədədi həll olunur.

Ədədi eksperimentin nəticələri, qrafik və uyğun cədvəllər dissertasiyada verilib.

Sonda elmi rəhbərim fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor H.F. Quliyevə məsələlərin qoyuluşuna və dissertasiya işinə diqqətinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işində bəzi ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində əmsalların tapılması məsələləri və xətti hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində başlanğıc funksiyaların tapılması məsələləri optimal idarəəetmə məsələlərinə gətirilmiş və alınan məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları ilə tədqiq olunmuşdur.

İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- ✓ İkitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənliklərin əmsallarının tapılması və xətti hiperbolik tənlik üçün sərhəd məsələlərində başlanğıc funksiyaların tapılması məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilib;
- ✓ Alınan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq olunub;
- ✓ Məqsəd funksionallarının diferensiallanan olması isbat olunub, onların qradiyenti üçün ifadələr alınıb;
- ✓ Variasional bərabərsizliklər şəklində optimallıq üçün şərtlər çıxarılıb;
- ✓ Çıxarılmış optimallıq şərtlərinin vasitəsilə iki halda optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həlli üçün alqoritm verilib və onların ədədi həll eksperimentləri aparılıb.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı əsərlərdə çap olunub:

1. **Quliyev H.F., Səfərova Z.R.** Dalğa tənliyi üçün qarışıq sərhəd şərtləri olan məsələnin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi və onun tədqiqi // AMEA-nın müxbir üzvü, tanınmış alim və görkəmli riyaziyyatçı, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Qoşqar Teymur oğlu Əhmədovun anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransı, -Bakı: 02- 03 noyabr, -2017, -s.74-75.
2. **Кулиев Г.Ф., Сафарова З.Р.** Метод оптимального управления в задаче Дирихле для гиперболического уравнения второго порядка // -Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, № 4, -2017, -s.21-28.
3. **Quliyev H.F., Səfərova Z.R.** Dalğa tənliyi üçün qarışıq

şərtli sərhəd məsələnin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi və onun tədqiqi // Naxçıvan: Naxçıvan Dövlət Universiteti, Elmi əsərlər, Fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası, №8 (89), -2017, -s.45-51.

4. **Кулиев Г.Ф., Сафарова З.Р.** Вариационный подход к решению одной коэффициентно–обратной задачи для гиперболического уравнения // IV Международная научная конференция “Актуальные проблемы прикладной математики”, -Нальчик-Эльбрус: 22-26 мая 2018 г., с.146.

5. **Guliyev H.F., Safarova Z.R.** On a determination of the initial functions from the observed values of the boundary functions for the second-order hyperbolic equation // Bakı: Jomard Publishing, Advanced Mathematical Models and Applications, vol. 3, №3, -2018, -p.215-222.

6. **Guliyev H.F., Safarova Z.R.** About the problem of finding the coefficients of the derivative in the string oscillation equations with the solution which has discontinuity // The 6th International Conference on “Control and Optimization with Industrial Applications”, -Baku: 11-13 July, 2018, p.125-127. (**Web of Science)**

7. **Кулиев Г.Ф., Сафарова З.Р.** Об определении начальных функций в по измеренным значениям граничных функций для гиперболического уравнения // V Международной научной конференции, -Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика: 4-7 декабря 2018 г., с.114.

8. **Сафарова З.Р.** Об определении коэффициента при производной в уравнении колебаний струны с разрывом // Украина: Проблемы управления и информатики, №1, 2019, с.67-71.

9. **Кулиев Г.Ф., Сафарова З.Р.** Задача быстродействия относительно одного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка // Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası №1, 2020, s.55-67.

10. **Safarova Z.R.** On a finding the coefficient of one nonlinear wave equation in the mixed problem // Poland: Archvies of Control Sciences, Volume 30 (LXVI), №2, -2020, -p.199-212. **(Scopus)**

11. **Mardanov M.J., Guliyev H.F., Safarova Z.R.** The problem of starting control with two intermediate moments of observation in the boundary value problem for the hyperbolic equation // USA: Optimal Control Appl. and Meth., 2020, V.41, issue 5, p.1-10. **(Scopus)**

12. **Səfərova Z.R.** İki qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün sərhəd məsələsində əmsalın tapılmasının ədədi həll üsulu haqqında // Naxçıvan: Naxçıvan Dövlət Universiteti, Elmi əsərlər, Fizika-riyaziyyat və texniki elmlər seriyası, 2020, №7(108). -s.16-19.

13. **Səfərova Z.R.** Həllinin kəsilməsi olan membranın rəqsləri tənliyində birinci tərtib törəmələrin əmsallari ilə optimal idarəetmə məsələsi // Naxçıvan: “Naxçıvan” Universiteti, Elmi əsərlər, -2021, №3, -s. 286-295.

14. **Səfərova, Z.R.** İkitərtibli bir qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün ən tez təsir məsələsi // Naxçıvan: “III Fizika, Riyaziyyat və Astronomiyanın aktual problemləri” adlı Respublika elmi konfransının materialları, -12 may,-2023, s.109-111.

Dissertasiyanın müdafiəsi 27 sentyabr 2024-cü il tarixində saat 16^{00}-da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, Bəxtiyar Vahabzadə küçəsi, 68

Dissertasiya ilə Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun (http://www.isi.az) rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 10 iyul 2024-cü il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 03.07.2024

Kağızın formatı: A5

Həcmi: 36604 simvol

Tiraj: 100