AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

BƏZİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMA MƏSƏLƏLƏRİ VƏ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

İxtisas:	1211.01 – Diferensial tənliklər
Elm sahəsi:	Riyaziyyat
İddiaçı:	**Elvin Səxavət oğlu Rzayev**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Qeyri-harmonik analiz" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: Əməkdar elm xadimi, riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Araz Rafiq oğlu Əliyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Nazim Baxış oğlu Kərimov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Elvin İbrahim oğlu Əzizbəyov

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Elçin Camal oğlu İbadov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

_________________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi:

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

_________________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

_________________ **Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün tədqiqat üsullarından biri də operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən istifadədir. Keçən əsrin ortalarında E.Xille, T.Kato, K.İosida, S.Aqmon, L.Nirenberq və azərbaycanlı riyaziyyatçı Z.İ.Xəlilov Banax fəzalarında operator əmsallı birinci və ikinci tərtib diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həll olunması, həllin özünü aparması və dayanıqlıq problemlərini öyrənmişdilər. Bu sahədə həmin işlər ilk olduğundan müəllifləri operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin banisi hesab etmək olar.

Sonralar ikinci və yüksək tərtib operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələləri bir çox əcnəbi və azərbaycanlı riyaziyyatçılar tərəfindən öyrənilmiş və fundamental nəticələr alınmışdır. Bu tədqiqatlar arasında həll olunma məsələlərinə xüsusi maraq göstərilmişdir. Həll olunma məsələlərinə aid olan məqalələr arasında M.G.Qasımov, Yu.A.Dubinski, S.S.Mirzəyev, Q.V.Radziyevski, V.K.Romanko, A.A.Şkalikov, N.İ.Yurçuk, V.V.Vlasovun işləri və S.Yakubov və Ya.Yakubovun kitabı qeyd edilməlidir. Bu işlər arasında isə M.G.Qasımovun[1,2,3] məqalələri xüsusi elmi çəkiyə malikdir. Buna səbəb müəllifin baxdığı yüksək tərtib qeyri-tipik operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunmasını uyğun polinomial operator dəstəsinin məxsusi və qoşulmuş vektorlarının bir hissəsinin tamlığı və yaxud çoxqat tamlığı ilə əlaqələndirilməsi olmuşdur. M.G.Qasımovun

[1] Гасымов, М.Г. К теории полиномиальных операторных пучков // - Москва: Доклады АН СССР, - 1971. т. 199, № 4, - с. 747-750.

[2] Гасымов, М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // - Ереван: Известия АН Арм.ССР, серия математика, - 1971. т. 6, № 2-3, - с. 131-147.

[3] Гасымов, М.Г. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // - Москва: Доклады АН СССР, - 1977. т. 235, № 3, - с. 505-508.

məqalələrinin meydana gəlməsinə M.V.Keldışın[4] işindəki (bu işin qısa məzmunu M.V.Keldış tərəfindən 1951-ci ildə dərc olunmuşdur) bir sinif polinomial operator dəstələrinin bütün məxsusi və qoşulmuş vektorlarının çoxqat tamlığı haqqında fundamental teoremi zəmin yaratmışdır. Sadalanan işlər öz səmərəliyi ilə fərqlənmiş və daha çox tədqiqatların aparılmasına gətirmişdir. Tədqiqatların bir qismi operator-diferensial tənliklərdə iştirak edən aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi məsələlərinə gətirilmiş və nəticədə bu cür tənliklər üçün tapılan həll olunma şərtlərinin praktiki məsələlərdə asan yoxlanılan olması aşkarlanmışdır. İlk dəfə S.S.Mirzəyev tərəfindən vektor funksiyalar üçün aralıq törəmə operatorlarının normalarının dəqiq qiyməti hesablanmış və geniş sinif elliptik və kvazi-elliptik tip operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həll olunmasının yaxşılaşdırıla bilinməyən kafi şərtləri alınmışdır. S.S.Mirzəyevin nəticələri A.R.Əliyevin kəsilən əmsallı operator-diferensial tənliklərin həll olunmasına həsr olunmuş işlərində öz davamlı inkişafını tapmışdır.

Riyazi fizikanın bəzi qeyri-klassik məsələləri sərhəd şərtlərində operator iştirak edən məsələlərə gətirilir. Qeyd edək ki, sərhəd şərtlərində operator iştirak edən ikinci və üçüncü tərtib operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunması və fredholmluğu sonlu intervalda və yarımoxda geniş şəkildə öyrənilmişdir. Buna baxmayaraq, bu tədqiqatlar tamamlanmaqdan çox uzaqdır. Dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklər üçün bu cür məsələlərə həsr olunmuş işlər isə nisbətən azdır. Biz nümunə kimi yalnız S.Yakubov və Y.Yakubovun[5] kitabını,

---

[4] Келдыш, М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // - Москва: Успехи математических наук, - 1971. т. 26, № 4, - с. 15–41.

[5] Yakubov, S. Differential-Operator Equations: Ordinary and Partial Differential Equations / Yakubov, S., Yakubov, Y. - Chapman Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., - vol. 103. Chapman & Hall, Boca Raton, - 2000. - 541 p.

V.S.Alıyev[6], B.Ə.Əliyev və Y.Yakubovun[7] məqalələrini qeyd edə bilərik. Təqdim olunan dissertasiya da sərhəd şərtlərində operatorlar iştirak edən dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunmasına həsr olunmuşdur. Tətbiq baxımından vurğulamaq lazımdır ki, dissertasiyada tədqiq olunan dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklər nazik və qalın elastik lövhələrin əyilmə nəzəriyyəsində maraq kəsb edir. Mexanikanın bu cür məsələləri tənliklərin elementar həllərinin tamlığının öyrənilməsinə təkan verir. Qeyd edək ki, bəzi həllər fəzalarında elementar həllərin tamlığı əvvəllər İ.İ.Voroviç, V.Ye.Kovalçuk, Yu.A.Ustinov, V.İ.Yudoviç, M.B.Orazov, A.A.Şkalikov, S.S.Mirzəyev, A.R.Əliyev və onların tələbələrinin işlərində göstərilmişdir. Dissertasiyada bu məsələyə də toxunulur. Bu isə öz növbəsində uyğun polinomial operator dəstəsinin məxsusi və qoşulmuş vektorlarının bir hissəsinin çoxqat tamlığının isbatına gətirir.

Bildiririk ki, son 15 ildə A.R.Əliyev və onun tələbələri tərəfindən mexanikanın digər sahəsi olan plastik materialdan hazırlanmış lövhəciklərin dayanıqlığı məsələlərində rast gəlinən təkrarlanan xarakteristikaya malik dördüncü tərtib diferensial tənliklər öyrənilmiş, tənliklərin operator əmsallarının xassələri ilə ifadə olunan kafi həll olunma şərtləri tapılmış və onlarla bağlı bəzi spektral məsələlər tədqiq olunmuşdur.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Dissertasiyanın tədqiqat obyekti və predmeti sərhəd şərtləri operator əmsallı bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklərin yarımoxda müxtəlif sərhəd məsələləridir.

---

[6] Aliyev, V.S. On normal solvability of boundary-value problems for elliptic type fourth order operator-differential equations // - Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, - 2004. vol. 24, no. 7, - p. 9-16.

[7] Алиев, Б.А., Якубов, Я. Фредгольмовость краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка с операторными граничными условиями // - Минск: Дифференциальные уравнения, - 2014. т. 50, № 2, - с. 210-216.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiyanın əsas məqsədi və vəzifəsi sərhəd şərtləri operator əmsallı olan bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklərin yarımoxda müxtəlif sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtlərini tapmaqdan, aralıq törəmə operatorlarının normalarını Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında qiymətləndirməsini apararaq onların requlyar həll olunma şərtləri ilə əlaqəsini müəyyən etməkdən və həmin tənliklərlə bağlı bəzi spektral məsələlərinin tədqiqindən ibarətdir.

Tədqiqat metodları. Dissertasiyada vektor funksiyalar fəzalarında diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə edilmiş, Furye çevirməsinin üsulları cəlb olunmuşdur. Bununla bərabər işdə geniş şəkildə funksional analizin bölmələri olan Hilbert fəzasında xətti operatorlar nəzəriyyəsinin, operatorların yarımqruplar nəzəriyyəsinin və ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Müdafiəyə aşağıdakı əsas müddəalar çıxarılır:

1. Sərhəd şərtləri operator əmsallı olan bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklərin yarımoxda müxtəlif sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtlərini tapmaq.
2. Sərhəd şərtləri operator əmsallı olan ikihədli elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliyinin requlyar həllinin aşkar göstərilişini qurmaq.
3. Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normalarını qiymətləndirmək və onların araşdırılan sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtləri ilə əlaqəsini müəyyən etmək.
4. Yarımoxda bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib bircins operator-diferensial tənliklərin elementar həllərinin tamlığını müəyyən edən şərtləri tapmaq.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiyada aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

1. Sərhəd şərtləri operator əmsallı olan bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklərin yarımoxda müxtəlif sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtləri alınıb.

2. Sərhəd şərtləri operator əmsallı olan ikihədli elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliyinin requlyar həllinin aşkar göstərilişi qurulub.

3. Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi aparılıb.

4. Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi ilə araşdırılan sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi müəyyən edilib.

5. Yarımoxda operator əmsallı müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib bircins operator-diferensial tənliklərin requlyar həllər fəzasında elementar həllərinin tamlığını müəyyən edən şərtlər tapılıb.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya əsasən nəzəri əhəmiyyət daşıyır. Əldə edilmiş nəticələr həm dördüncü tərtib elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin yeni siniflərinin, həm də müvafiq spektral məsələlərinin öyrənilməsində istifadə etməyə imkan verir. Bununla bərabər dissertasiyada alınan nəticələrdən elastikiyyət nəzəriyyəsinin, məsələn qalın və nazik elastik lövhələrin əyilməsi nəzəriyyəsinin məsələlərində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın nəticələri Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Funksional analiz” şöbəsinin seminarında (rəhbər prof. Həmidulla Aslanov), “Diferensial tənliklər” şöbəsinin seminarında (rəhbər prof. Əkbər Əliyev), Bakı Dövlət Universitetinin “Tətbiqi riyaziyyat” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. Həmzağa Orucov), “Diferensial və inteqral tənliklər” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. Nizaməddin İsgəndərov), Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin “Ümumi və tətbiqi riyaziyyat” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. Araz Əliyev) məruzə edilmişdir. Həmçinin nəticələr prof. Sabir Mirzəyevlə müzakirə olunmuşdur. Bundan əlavə dissertasiyanın nəticələri aşağıdakı elmi konfranslarda da məruzə edilmişdir: Ümummilli lider Heydər Əliyevin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və informatikanın aktual problemləri” adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 29-31 may 2013-cü il), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda akademik M.G.Qasımovun 75 illik yubileyinə həsr olunmuş “Diferensial operatorlarının spektral nəzəriyyəsi” adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 8-10 dekabr 2014-cü il), “Proseslərin və sistemlərin riyazi modelləşdirilməsi” adlı VII Beynəlxalq gənclər elmi-praktik konfransında (Sterlitamak, Rusiya Federasiyası, 7-9 dekabr 2017-ci il), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda akademik M.G.Qasımovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş “Spektral nəzəriyyə və onun tətbiqləri” adlı Beynəlxalq elmi seminarında (Bakı, 7-8 iyun 2019-cu il), Ümummilli lider Heydər Əliyevin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri” adlı Beynəlxalq konfransında (26-28 aprel 2023-cü il), Rusiyanın əməkdar elm xadimi, professor Y.T.Sultanayevin anadan olmasının 75-illiyinə həsr olunmuş "Operatorların spektral nəzəriyyəsi və onlarla bağlı məsələlər" adlı Beynəlxalq elmi-praktik konfransında (Ufa, Rusiya Federasiyası, 26-27 oktyabr 2023-cü il).

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Alınmış bütün nəticə və təkliflər müəllifə aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Tədqiqat üzrə Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK-ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 5 məqalə (1-i Web of Science Core Collection bazasının SCIE siyahısına, 1-i isə Web of Science Core Collection bazasının ESCI siyahısına daxildir), 1 konfrans materialı və 4 tezis (bütövlükdə 10 iş) nəşr olunmuşdur. İşlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetririldiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Qeyri-harmonik analiz” şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 177169 işarədir (titul səhifəsi – 354 işarə, mündəricat – 2769 işarə, giriş – 44000 işarə, birinci fəsil – 66600 işarə, ikinci fəsil – 35000 işarə, üçüncü fəsil – 27400 işarə, nəticə -1046). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 65 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya giriş, üç fəsil və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Dissertasiyanın girişində mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış, işlənmə dərəcəsi göstərilmiş, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri qeyd edilmiş, elmi yeniliyi verilmiş, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti vurğulanmış, həmçinin işin aprobasiyası barədə məlumat əks olunmuşdur.

Fərz edək ki, H ilə skalyar hasili (x, y) olan $(x, y \in H)$ separabel Hilbert fəzası işarə olunub, A operatoru isə H fəzasında öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur, yəni $A = A^* \geq cE,\ c > 0$, burada E - vahid operatordur.

Bildiyimiz kimi, $A^\alpha\ (\alpha \geq 0)$ operatorunun təyin oblastı $(x, y)_{H_\alpha} = (A^\alpha x, A^\alpha y)$ skalyar hasilinə nəzərən $(x, y \in D(A^\alpha))$ Hilbert fəzası olacaqdır, yəni $H_\alpha = D(A^\alpha),\ (x, y)_{H_\alpha} = (A^\alpha x, A^\alpha y)$, $x, y \in H_\alpha$. Qəbul edirik ki, $\alpha = 0$ olduqda $H_0 = H$.

$L_2(\mathbb{R}_+; H)$ ilə qiymətləri H - dan olan, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$-da sanki hər yerdə təyin olunan və $\mathbb{R}_+$-də kvadratı ilə inteqrallanan bütün $f(t)$ vektor funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Bu çoxluq skalyar hasili $(f, g)_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} = \int_0^{+\infty} (f(t), g(t))dt$ və norması

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_H^2\, dt \right)^{1/2} < +\infty$$

olan Hilbert fəzasıdır.

İndi isə J.-L.Lions və E.Majenesin[8] kitabına əsasən xətti

$$W_2^4(\mathbb{R}_+; H) = \left\{ u(t) :\ A^4 u(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H), u^{(4)}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H) \right\}$$

fəzasını daxil edək. Bu fəza

$$(u, v)_{W_2^4(\mathbb{R}_+;\, H)} = \left(u^{(4)}, v^{(4)}\right)_{L_2(\mathbb{R}_+;\, H)} +$$
$$+(A^4 u, A^4 v)_{L_2(\mathbb{R}_+;\, H)},\ \ u(t), v(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H),$$

[8] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л.Лионс, Э.Мадженес – Москва: Мир, - 1971. – 371 с.

skalyar hasilinə nəzərən dolu Hilbert fəzasıdır. $W_2^4(\mathbb{R}_+;\ H)$ fəzasında norma

$$\|u\|_{W_2^4(\mathbb{R}_+;H)} = \left(\|A^4u\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} + \left\|u^{(4)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}\right)^{1/2}$$

kimi təyin edilir. Burada və bundan sonra törəmələr ümumiləşmiş törəmələr kimi başa düşülür.

$L(X, Y)$ işarəsi altında bir X Hilbert fəzasından digər Y Hilbert fəzasına təsir edən xətti məhdud operatorlar çoxluğunu başa düşəcəyik. $\sigma(\cdot)$ işarəsi isə $(\cdot)$ operatorunun spektrini bizə anladır.

H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliyə baxaq:

$$u^{(4)}(t) + A^4u(t) + \sum_{j=1}^{4} A_j u^{(4-j)}(t) = f(t),\ \ t \in \mathbb{R}_+, \qquad (1)$$

burada $A = A^* \geq cE,\ c > 0,\ A_j,\ j = 1, 2, 3, 4,$ xətti və ümumiyyətlə desək qeyri-məhdud operatorlardır, $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H),\ u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$.

Tərif 1. Əgər $u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$ vektor funksiyası $\mathbb{R}_+$-də sanki hər yerdə (1) tənliyini ödəyirsə, onda $u(t)$-ni (1) tənliyinin *requlyar həlli* adlandıracağıq.

(1) tənliyinin aşağıdakı sərhəd şərtlərinin hər biri ilə ayrılıqda tədqiqi aparılır:

$$u(0) = 0,\ \ u'(0) = Tu''(0); \qquad (2)$$
$$u(0) = 0,\ \ u''(0) = Ku'(0); \qquad (3)$$
$$u'(0) = Tu''(0),\ \ u'''(0) = 0; \qquad (4)$$
$$u''(0) = Ku'(0),\ \ u'''(0) = 0, \qquad (5)$$

burada $T \in L\big(H_{3/2}, H_{5/2}\big),\ K \in L\big(H_{5/2}, H_{3/2}\big)$.

Tərif 2. Əgər ixtiyari $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ üçün (1) tənliyinin (2) sərhəd şərtlərini

$$\lim_{t\to 0}\|u(t)\|_{H_{7/2}} = 0,\ \ \lim_{t\to 0}\|u'(t) - Tu''(t)\|_{H_{5/2}} = 0$$

yığılma mənasında ödəyən $u(t)$ requlyar həlli varsa və bu həll

$$\|u\|_{W_2^4(\mathbb{R}_+;H)} \leq const\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$$

bərabərsizliyini ödəyirsə, onda deyirlər ki, $(1), (2)$ sərhəd məsələsi *requlyar həll olunandır.*

Tərif 3. Əgər ixtiyari $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ üçün (1) tənliyinin (3) sərhəd şərtlərini

$$\lim_{t\to 0}\|u(t)\|_{H_{7/2}} = 0, \ \lim_{t\to 0}\|u''(t) - Ku'(t)\|_{H_{3/2}} = 0$$

yığılma mənasında ödəyən $u(t)$ requlyar həlli varsa və bu həll üçün

$$\|u\|_{W_2^4(\mathbb{R}_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyirlər ki, $(1), (3)$ sərhəd məsələsi *requlyar həll olunandır.*

Analoji olaraq, $(1), (4)$ və $(1), (5)$ sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma tərifləri verilir.

Birinci fəsildə məqsəd araşdırdığımız $(1), (2)$; $(1), (3)$; $(1), (4)$ və $(1), (5)$ sərhəd məsələlərinin $A_j = 0, \ j = 1, 2, 3, 4,$ halında operator əmsalları üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla, onların requlyar həll olunmasını göstərməkdir.

$P_{0,T}^{\{0\}}$, $P_{0,K}^{\{0\}}$, $P_{0,T}^{\{3\}}$ və $P_{0,K}^{\{3\}}$ ilə uyğun olaraq $W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\})$, $W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\})$,$W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\})$ və $W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\})$ fəzalarından $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ fəzasına aşağıdakı qaydalar ilə təsir edən operatorları işarə edək:

$$P_{0,T}^{\{0\}}u(t) = u^{(4)}(t) + A^4u(t), \ u(t) \in W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\}),$$
$$P_{0,K}^{\{0\}}u(t) = u^{(4)}(t) + A^4u(t), \ u(t) \in W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\}),$$
$$P_{0,T}^{\{3\}}u(t) = u^{(4)}(t) + A^4u(t), \ u(t) \in W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\}),$$
$$P_{0,K}^{\{3\}}u(t) = u^{(4)}(t) + A^4u(t), \ u(t) \in W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\}),$$

burada

$$W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\}) = \{u(t) : \ u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H), \ u(0) = 0,$$
$$u'(0) = Tu''(0)\},$$
$$W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\}) = \{u(t) : \ u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H), \ u(0) = 0,$$
$$u''(0) = Ku'(0)\},$$
$$W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\}) = \{u(t) : \ u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H), \ u'(0) = Tu''(0),$$
$$u'''(0) = 0\},$$
$$W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\}) = \{u(t) : \ u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H), \ u''(0) = Ku'(0),$$
$$u'''(0) = 0\}.$$

$P_{0,T}^{\{0\}}$ operatoru ilə bağlı aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 1. *Tutaq ki,* $C = A^{5/2}TA^{-3/2}$ *və* $-\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \sigma(C)$. *Onda ixtiyari* $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ *üçün* $P_{0,T}^{\{0\}}u(t) = f(t)$ *tənliyi yeganə requlyar həllə malikdir və bu həllin göstərilişi aşağıdakı kimidir:*

$$u(t) = u_0(t) + \frac{1}{4(\omega_1 - \omega_2)} e^{\omega_1 tA} A^{-\frac{7}{2}} \left(E + \sqrt{2}C\right)^{-1} A^{\frac{5}{2}} \times$$

$$\times \left[-\frac{\omega_4}{\omega_3} \int_0^{+\infty} (e^{-\omega_4 As} - e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-2} f(s)\right) ds + \right.$$

$$+T \int_0^{+\infty} (\omega_2 e^{-\omega_4 As} + \omega_1 e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-1} f(s)\right) ds -$$

$$\left. -\omega_2{}^2 TA^2 \int_0^{+\infty} (\omega_4 e^{-\omega_4 As} + \omega_3 e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-3} f(s)\right) ds \right] -$$

$$-\frac{1}{4} e^{\omega_2 tA} \left[\frac{1}{\omega_1 - \omega_2} A^{-\frac{7}{2}} \left(E + \sqrt{2}C\right)^{-1} A^{\frac{5}{2}} \times \right.$$

$$\times \left(-\frac{\omega_4}{\omega_3} \int_0^{+\infty} (e^{-\omega_4 As} - e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-2} f(s)\right) ds + \right.$$

$$+T \int_0^{+\infty} (\omega_2 e^{-\omega_4 As} + \omega_1 e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-1} f(s)\right) ds -$$

$$\left. -\omega_2{}^2 TA^2 \int_0^{+\infty} (\omega_4 e^{-\omega_4 As} + \omega_3 e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-3} f(s)\right) ds \right) +$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} (\omega_4 e^{-\omega_4 As} + \omega_3 e^{-\omega_3 As}) \left(A^{-3} f(s)\right) ds \right],$$

burada $u_0(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s)\, ds$,

$$G(t,s)=\frac{1}{4}\begin{cases}-\left(\frac{e^{\omega_2 A(t-s)}}{\omega_1}+\frac{e^{\omega_1 A(t-s)}}{\omega_2}\right)A^{-3}, t-s>0 \ olarsa,\\ \left(\frac{e^{\omega_4 A(t-s)}}{\omega_3}+\frac{e^{\omega_3 A(t-s)}}{\omega_4}\right)A^{-3}, t-s<0 \ olarsa,\end{cases}$$

$$\omega_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \ \omega_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \ \omega_3=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$\omega_4=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Uyğun şəkildə $P_{0,K}^{\{0\}}$ operatoru üçün də aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 2. *Tutaq ki,* $B=A^{3/2}KA^{-5/2}$ *və* $-\sqrt{2}\notin\sigma(B)$. *Onda ixtiyari* $f(t)\in L_2(\mathbb{R}_+;H)$ *üçün* $P_{0,K}^{\{0\}}u(t)=f(t)$ *tənliyi yeganə requlyar həllə malikdir və bu həllin göstərilişi aşağıdakı kimidir:*

$$u(t)=u_0(t)+\frac{1}{4({\omega_2}^2-{\omega_1}^2)}e^{\omega_1 tA}A^{-\frac{7}{2}}\left(E+\frac{1}{\sqrt{2}}B\right)^{-1}A^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\left[\omega_2 KA\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-3}f(s)\right)ds-\right.$$

$$-K\int_0^{+\infty}\left(\frac{\omega_4 e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{\omega_3 e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-2}f(s)\right)ds+$$

$$+\int_0^{+\infty}\left(\frac{{\omega_4}^2 e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{{\omega_3}^2 e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-1}f(s)\right)ds-$$

$$\left.-{\omega_2}^2A^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-3}f(s)\right)ds\right]-$$

$$-\frac{1}{4}e^{\omega_2 tA}\left[\frac{1}{{\omega_2}^2-{\omega_1}^2}A^{-\frac{7}{2}}\left(E+\frac{1}{\sqrt{2}}B\right)^{-1}A^{\frac{3}{2}}\times\right.$$

$$\times\left(\omega_2 KA\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-3}f(s)\right)ds-\right.$$

$$-K\int_0^{+\infty}\left(\frac{\omega_4 e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{\omega_3 e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-2}f(s)\right)ds+$$

$$+\int_0^{+\infty}\left(\frac{{\omega_4}^2 e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{{\omega_3}^2 e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-1}f(s)\right)ds-$$

$$\left.-{\omega_2}^2A^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-3}f(s)\right)ds\right)+$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\omega_4 As}}{\omega_3}+\frac{e^{-\omega_3 As}}{\omega_4}\right)\left(A^{-3}f(s)\right)ds\right].$$

Analoji olaraq $P_{0,T}^{\{3\}}$ və $P_{0,K}^{\{3\}}$ operatorları üçün uyğun hökmlər söylənilir.

İkinci fəsildə məqsəd araşdırdığımız $(1),(2)$; $(1),(3)$; $(1),(4)$ və $(1),(5)$ sərhəd məsələlərinin $A_j \neq 0,\ j=1,2,3,4,$ halında yenə də operator əmsalları üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla, onların requlyar həll olunmasını göstərməkdir. Qeyd edək ki, bu fəsildə həll olunma şərtlərini müəyyən edərkən aralıq törəmə operatorlarının normalarının tapılması ilə əlaqənin mövcud olması göstərilir və onların Sobolev tipli fəzalarda qiymətləndirilməsi aparılır.

Teorem 3. *Tutaq ki,* $C=A^{5/2}TA^{-3/2},\ ReC\geq 0,\ A_jA^{-j}\in L(H,H), j=1,2,3,4,$ *və* $\sum_{j=1}^{4}c_j\left\|A_jA^{-j}\right\|_{H\to H}<1$ *bərabərsizliyi ödənilir. Burada* $c_1=1,\ c_2=\frac{1}{2},\ c_3=\frac{1}{\sqrt{2}}, c_4=1.$ *Onda hər bir* $f(t)\in L_2(\mathbb{R}_+;H)$ *üçün* $(1),\ (2)$ *sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli vardır.*

Teorem 4. *Tutaq ki,* $B=A^{3/2}KA^{-5/2},\ ReB\geq 0,\ A_jA^{-j}\in L(H,H), j=1,2,3,4,$ *və* $\sum_{j=1}^{4}c_j\left\|A_jA^{-j}\right\|_{H\to H}<1$ *bərabərsizliyi ödənilir. Burada* $c_1=1,\ c_2=\frac{1}{2},\ c_3=\frac{1}{\sqrt{2}}, c_4=1.$ *Onda hər bir*

$f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ üçün $(1),(3)$ sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli vardır.

Teorem 5. *Tutaq ki, $C = A^{5/2} T A^{-3/2}$, $ReC \geq 0$, $A_j A^{-j} \in L(H,H), j = 1,2,3,4$, və $\sum_{j=1}^{4} c_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H \to H} < 1$ bərabərsizliyi ödənilir. Burada $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = c_4 = 1$. Onda ixtiyari $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ üçün $(1),(4)$ sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli vardır.*

Teorem 6. *Tutaq ki, $B = A^{3/2} K A^{-5/2}$, $ReB \geq 0$, $A_j A^{-j} \in L(H,H), j = 1,2,3,4$, və $\sum_{j=1}^{4} c_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H \to H} < 1$ bərabərsizliyi ödənilir. Burada $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = c_4 = 1$. Onda hər bir $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ üçün $(1),(5)$ sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli vardır.*

Teorem 3, 4, 5 və 6-da iştirak edən c_j, $j = 1,2,3,4$, ədədləri

$$A^j \frac{d^{4-j}}{dt^{4-j}} : W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\}) \to L_2(\mathbb{R}_+; H),$$

$$A^j \frac{d^{4-j}}{dt^{4-j}} : W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{0\}) \to L_2(\mathbb{R}_+; H),$$

$$A^j \frac{d^{4-j}}{dt^{4-j}} : W_{2,T}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\}) \to L_2(\mathbb{R}_+; H),$$

$$A^j \frac{d^{4-j}}{dt^{4-j}} : W_{2,K}^4(\mathbb{R}_+; H; \{3\}) \to L_2(\mathbb{R}_+; H), \ \ j = 1,2,3,4,$$

aralıq törəmə operatorlarının normalarının uyğun olaraq $\left\| P_{0,T}^{\{0\}} u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$, $\left\| P_{0,K}^{\{0\}} u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$, $\left\| P_{0,T}^{\{3\}} u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$, $\left\| P_{0,K}^{\{3\}} u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$ normalarına nəzərən qiymətləndirilməsi nəticəsində alınan ədədlərdir.

Üçüncü fəsildə H separabel Hilbert fəzasında (1) tənliyinin bircins halına baxılır:

$$u^{(4)}(t) + A^4 u(t) + \sum_{j=1}^{4} A_j u^{(4-j)}(t) = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+, \qquad (6)$$

burada $A = A^* \geq cE$, $c > 0$, A_j, $j = 1,2,3,4$, xətti və ümumiyyətlə desək qeyri-məhdud operatorlardır, $u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$.

(6) tənliyinin aşağıdakı sərhəd şərtlərinin hər biri ilə ayrılıqda tədqiqi aparılır və əvvəlki fəsillərə uyğun olaraq sərhəd məsələlərinin requlyar həlli və requlyar həll olunması tərifləri verilir:

$$u(0)=\varphi,\ \ u'(0)-Tu''(0)=\psi,$$
$$\varphi\in H_{7/2},\psi\in H_{5/2}\,,T\in L\big(H_{3/2},H_{5/2}\big); \qquad (7)$$
$$u(0)=\varphi,\ \ u''(0)-Ku'(0)=\psi,$$
$$\varphi\in H_{7/2},\ \psi\in H_{3/2}\,,\ K\in L\big(H_{5/2},H_{3/2}\big); \qquad (8)$$
$$u'(0)-Tu''(0)=\psi,\ \ u'''(0)=\varphi,$$
$$\psi\in H_{5/2},\varphi\in H_{1/2}\,,T\in L\big(H_{3/2},H_{5/2}\big); \qquad (9)$$
$$u''(0)-Ku'(0)=\psi,\ \ u'''(0)=\varphi,$$
$$\psi\in H_{3/2},\varphi\in H_{1/2}\,,K\in L\big(H_{5/2},H_{3/2}\big). \qquad (10)$$

Teorem 7. *Tutaq ki, Teorem 5-in şərtləri ödənilir. Onda hər bir* $\varphi\in H_{7/2}$, $\psi\in H_{5/2}$ *üçün* $(6),(7)$ *sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli var.*

Teorem 8. *Tutaq ki, Teorem 6-nın şərtləri ödənilir. Onda hər bir* $\varphi\in H_{7/2}$, $\psi\in H_{3/2}$ *üçün* $(6),(8)$ *sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli var.*

Analoji olaraq, $(6),(9)$ və $(6),(10)$ sərhəd məsələləri üçün uyğun hökmlər söylənilir.

Sonra bu fəsildə H separabel Hilbert fəzasında (6) tənliyinə uyğun olan elliptik tip dördüncü tərtib polinomial

$$P(\lambda)=\lambda^4E+A^4+\sum_{j=1}^{4}\lambda^{4-j}A_j \qquad (11)$$

operator dəstəsinə baxılır. (11) operator dəstəsinin operator əmsalları (6) tənliyinin operator əmsalları ilə eyni şərtləri ödəyirlər.

H fəzasında təsir edən tamam kəsilməz operatorlar çoxluğunu $\sigma_\infty(H)$ ilə işarə edək. Bildiyimiz kimi[9], $Q\in\sigma_\infty(H)$ olarsa, onda $(Q^*Q)^{1/2}$ operatoru H fəzasında tamam kəsilməz öz-özünə qoşma operatordur və onun məxsusi ədədləri Q operatorunun s-ədədləri

[9] Горбачук, В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И.Горбачук, М.Л.Горбачук – Киев: Наукова думка, - 1984. – 284 с.

adlanırlar. Q operatorunun sıfırdan fərqli s-ədədlərini onların təkrarlanmasını nəzərə alaraq azalma qaydasında nömrələməklə

$$\sigma_p = \left\{ Q : Q \in \sigma_\infty(H), \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(Q) < \infty \right\}, 0 < p < \infty,$$

işarəsini daxil edək. Aydındır ki, σ_p-lər Neyman-Şatten sinifləridir.

Əgər $P(\lambda_0)x = 0$ tənliyinin sıfır olmayan (qeyri-trivial) x_0 həlli varsa, onda λ_0-a $P(\lambda)$ operator dəstəsinin məxsusi ədədi, x_0-a isə həmin dəstənin λ_0 məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektoru deyilir.

Qeyd edək ki, (11) dəstəsinin operator əmsallarından aşağıdakı şərtlərin ödənilməsini tələb edirik:

$$A = A^* \geq cE, c > 0,\ A^{-1} \in \sigma_\infty(H);$$
$$A_j A^{-j} \in L(H,H), j = 1, 2,3,4,\ \ (E + A_4 A^{-4})^{-1} \in L(H,H).$$

Bu şərtlər daxilində M.V.Keldışın[4] işinin nəticələrindən çıxır ki, $P(\lambda)$ operator dəstəsinin spektri diskretdir. Bu isə o deməkdir ki, limit nöqtəsi yalnız sonsuzluqda ola bilən izolə olunmuş $\{\lambda_n\}$ məxsusi ədədlər çoxluğu istisna olmaqla bütün $\lambda \in \mathbb{C}$ üçün $P^{-1}(\lambda)$ rezolventası vardır.

Əgər λ_0 ədədi $P(\lambda)$ operator dəstəsinin məxsusi ədədi, x_0 isə λ_0 məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektorlardan biri və $x_1, x_2, \dots, x_m$ sisteminin elementləri

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k P(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_0} x_{p-k} = 0, \qquad p = 0, 1, 2, \dots, m \quad (12)$$
$$(x_{-1} = x_{-2} = x_{-3} = x_{-4} = 0),$$

bərabərliklərini ödəyirlərsə, onda $x_1, x_2, \dots, x_m$ sistemi x_0 məxsusi vektorunun qoşulmuş vektorlar zənciri adlanır.

Tutaq ki, λ_n (11) operator dəstəsinin məxsusi ədədləri, $x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{m,n}$ isə λ_n məxsusi ədədlərinə cavab verən məxsusi və qoşulmuş vektorlar sistemidir. (12) bərabərliklərindən çıxır ki,

$$u_{h,n}(t) = e^{\lambda_n t}\left(x_{h,n} + \frac{t}{1!} x_{h-1,n} + \dots + \frac{t^h}{h!} x_{0,n} \right), h = \overline{0,m}, \quad (13)$$

funksiyaları (6) tənliyini ödəyirlər. Bu funskiyalar (6) tənliyinin elementar həlləri adlanırlar. Aydındır ki, $Re\lambda_n < 0$ olduqda bu həllər azalandırlar və $W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$ fəzasına daxildirlər.

M.V.Keldışın[4] işindən məlumdur ki, istənilən λ_n məxsusi ədədinə qarşı $P(\lambda)$ operator dəstəsinin kanonik məxsusi və qoşulmuş vektorlar sistemini qoymaq olar.

Əgər $(7)-(10)$ sərhəd şərtlərində $T=0,\ K=0$ qəbul edəriksə, onda həmin şərtləri ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$u^{(l_i)}(0) = \xi_{l_i}, \qquad i = 0,1. \tag{14}$$

Burada $\xi_{l_i} \in H_{7/2 - l_i}$, $i = 0,1$, l_i-lər isə tam ədədlərdir, belə ki, $0 \le l_0 < l_1 \le 3$ və $l_0 + l_1 \ne 3$ şərtlərini ödəyirlər.

Əvəzetmə üsulu ilə asanlıqla göstəririk ki, $(6),(14)$ sərhəd məsələsini

$$v^{(4)}(t) + A^4 v(t) + \sum_{j=1}^{4} A_j v^{(4-j)}(t) = g(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

$$v^{(l_i)}(0) = 0, \qquad i = 0,1, \tag{16}$$

şəklində olan sərhəd məsələsinə gətirmək olar.

$(15),(16)$ sərhəd məsələsi üçün S.S.Mirzəyevin[10,11] işlərindən aşağıdakı hökmün doğruluğu məlumdur.

Teorem 9. *Tutaq ki,* $A_j A^{-j} \in L(H,H)$, $j = 1,2,3,4$, *və* $\sum_{j=1}^{4} c_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_H < 1$ *bərabərsizliyi ödənilir. Burada*

$$c_j = \sup_{0 \ne v \in \overset{0}{W}{}_2^4(\mathbb{R}_+; H; \{l_i\})} \left\| A^j v^{(4-j)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \times$$
$$\times \left\| v^{(4)}(t) + A^4 v(t) \right\|^{-1}_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}, j = \overline{1,4},$$

---

[10] Мирзоев, С.С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // - Москва: Доклады АН СССР, - 1983. т. 273, № 2, - с. 292-295.

[11] Мирзоев, С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и связанные с ними спектральные задачи: / Диссертация на соискание доктора физико-математических наук. / - Баку, 1994. - 229 с.

$$\overset{0}{W}{}_2^4(\mathbb{R}_+; H; \{l_i\}) =$$
$$= \left\{v(t): v(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H), v^{(l_i)}(0) = 0, i = 0, 1\right\}.$$
Onda hər bir $g(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ *üçün* $(15), (16)$ *sərhəd məsələsinin yeganə requlyar həlli vardır.*

Teorem 9-dakı c_j ədədlərinin hesablanması ilə bağlı geniş şəkildə S.S.Mirzəyevin[10,11,12] işlərində tanış olmaq olar.

$Re\lambda_n < 0$ olduqda (13) həllərinin köməyi ilə
$$\tilde{x}_{h,n}^{(l_0,l_1)} = \left\{x_{h,n}{}^{(l_0)}, x_{h,n}{}^{(l_1)}\right\} \in \widetilde{H}_{l_0,l_1} \equiv H_{7/_2-l_0} \oplus H_{7/_2-l_1}$$
vektorunu təyin edək, burada
$$x_{h,n}^{(l_i)} \equiv \frac{d^{l_i}}{dt^{l_i}} u_{h,n}(t)\Bigg|_{t=0}, \qquad i = 0,1, \qquad h = 0,1, \dots, m.$$
$\left\{\tilde{x}_{h,n}^{(l_0,l_1)}\right\}$ sistemini (6), (14) sərhəd məsələsinin doğurduğu $P(\lambda)$ operator dəstəsinin məxsusi və qoşulmuş vektorlarının törəmə zənciri adlandıracağıq.

Qeyd edək ki, S.S.Mirzəyevin[11] işində isbat edilmişdir ki, Teorem 9-un şərtləri daxilində, $(E + A_4A^{-4})^{-1} \in L(H, H)$ olduqda və $A^{-1} \in \sigma_p, 0 < p \leq 1$ və yaxud $A^{-1} \in \sigma_p, 0 < p < \infty$, $A_jA^{-j} \in \sigma_\infty(H), j = 1, 2, 3, 4,$ şərtlərindən biri ödənildikdə $\left\{\tilde{x}_{h,n}^{(l_0,l_1)}\right\}$ sistemlərindən hər biri uyğun $\widetilde{H}_{l_0,l_1}$ fəzasında tamdır.

Aşağıdakı törəmə zəncirlərini təyin edək:
$$\left\{\bar{x}_{h,n}^{(0,1,2)}\right\}, \qquad \bar{x}_{h,n}^{(0,1,2)} = \left\{x_{h,n}^{(0)},\ x_{h,n}^{(1,2)}\right\} \in \widetilde{H}_{0,1} \equiv H_{7/_2} \oplus H_{5/_2},$$
$$x_{h,n}^{(0)} = u_{h,n}(0), \qquad x_{h,n}^{(1,2)} \equiv x_{h,n}^{(1)} - Tx_{h,n}^{(2)} = u_{h,n}{}'(0) - Tu_{h,n}{}''(0);$$
$$\left\{\bar{x}_{h,n}^{(0,2,1)}\right\}, \qquad \bar{x}_{h,n}^{(0,2,1)} = \left\{x_{h,n}^{(0)},\ x_{h,n}^{(2,1)}\right\} \in \widetilde{H}_{0,2} \equiv H_{7/_2} \oplus H_{3/_2},$$
$$x_{h,n}^{(0)} = u_{h,n}(0), \qquad x_{h,n}^{(2,1)} \equiv x_{h,n}^{(2)} - Kx_{h,n}^{(1)} = u_{h,n}{}''(0) - Ku_{h,n}{}'(0);$$
$$\left\{\bar{x}_{h,n}^{(1,2,3)}\right\}, \qquad \bar{x}_{h,n}^{(1,2,3)} = \left\{x_{h,n}^{(1,2)},\ x_{h,n}^{(3)}\right\} \in \widetilde{H}_{1,3} \equiv H_{5/_2} \oplus H_{1/_2},$$

---

[12] Mirzoyev, S.S. On the norms of operators of intermediate derivatives // - Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, - 2003. vol. 23, no. 1, - p. 157-164.

$$x_{h,n}^{(1,2)} = x_{h,n}^{(1)} - Tx_{h,n}^{(2)} = u_{h,n}{}'(0) - Tu_{h,n}{}''(0),\ x_{h,n}^{(3)} = u_{h,n}{}'''(0);$$
$$\left\{\bar{x}_{h,n}^{(2,1,3)}\right\}, \qquad \bar{x}_{h,n}^{(2,1,3)} = \left\{x_{h,n}^{(2,1)},\ x_{h,n}^{(3)}\right\} \in \widetilde{H}_{2,3} \equiv H_{3/2} \oplus H_{1/2},$$
$$x_{h,n}^{(2,1)} = x_{h,n}^{(2)} - Kx_{h,n}^{(1)} = u_{h,n}{}''(0) - Ku_{h,n}{}'(0),\ x_{h,n}^{(3)} = u_{h,n}{}'''(0).$$

Aydındır ki, $\left\{\bar{x}_{h,n}^{(0,1,2)}\right\}$, $\left\{\bar{x}_{h,n}^{(0,2,1)}\right\}$, $\left\{\bar{x}_{h,n}^{(1,2,3)}\right\}$ və $\left\{\bar{x}_{h,n}^{(2,1,3)}\right\}$ törəmə zəncirləri uyğun olaraq $(6), (7)$; $(6), (8)$; $(6), (9)$ və $(6), (10)$ sərhəd məsələlərinə cavab verir. Məlumdur ki[13], bu zəncirlərin izlər fəzasında ikiqat tamlığını isbat etmək üçün onların uyğun $\left\{\tilde{x}_{h,n}^{(l_0,l_1)}\right\}$ sistemi ilə ekvivalentliyini göstərmək kifayətdir. Zəncirlərin hər biri üçün bu prosedur oxşar olduğundan işdə onu, məsələn $\left\{\bar{x}_{h,n}^{(0,2,1)}\right\}$ zənciri üçün edirik, yəni $H_{7/2} \oplus H_{3/2}$ fəzasında $\left\{\tilde{x}_{h,n}^{(0,2)}\right\}$ və $\left\{\bar{x}_{h,n}^{(0,2,1)}\right\}$ sistemlərinin ekvivalentliyini göstəririk. Bu isə üçüncü fəslin əsas teoremini bildirməyə imkan verir.

Teorem 8-də hər bir $\varphi \in H_{7/2},\ \psi \in H_{3/2}$ üçün $(6),\ (8)$ sərhəd məsələsinin $W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$ fəzasından olan yeganə həllinin varlığını təmin edən kafi şərtlər müəyyən edilmişdir. Bütün bu cür həllər çoxluğunu $W^{(0,2,1)}(P)$ ilə işarə edək. Aralıq törəmələr və izlər haqqında teoremlərə[8] görə $W^{(0,2,1)}(P)$ çoxluğu $W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$ fəzasının qapalı altfəzasıdır.

Aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 10. *Tutaq ki, Teorem 8-in şərtləri ödənilir. Bundan əlavə,* $(E + A_4A^{-4})^{-1} \in L(H, H)$ *şərtilə bərabər*

$A^{-1} \in \sigma_p, 0 < p \le 1,$ *və yaxud*

$A^{-1} \in \sigma_p, 0 < p < \infty,\ A_jA^{-j} \in \sigma_\infty(H), j = 1, 2, 3, 4,$

şərtlərindən biri ödənildikdə $(6), (8)$ *sərhəd məsələsinin azalan elementar həllər sistemi* $W^{(0,2,1)}(P)$ *fəzasında tamdır.*

Qeyd edək ki, $(6), (7)$; $(6), (9)$ və $(6), (10)$ sərhəd məsələləri üçün də analoji teoremlər söylənilə bilər.

---

[13] Мильман, В.Д. Геометрическая теория пространств Банаха. Часть. I. Теория базисных и минимальных систем // - Москва: Успехи математических наук, - 1970. т. 25, № 3, - с. 113-174.

Nəticə

Dissertasiya sərhəd şərtləri operator əmsallı olan bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklərin yarımoxda müxtəlif sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma məsələlərinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Sərhəd şərtləri operator əmsallı olan bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliklərin yarımoxda müxtəlif sərhəd məsələlərinin kafi requlyar həll olunma şərtləri tapılmışdır.
2. Sərhəd şərtləri operator əmsallı olan ikihədli elliptik tip dördüncü tərtib operator-diferensial tənliyinin requlyar həllinin aşkar göstərilişi qurulmuşdur.
3. Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilməsi aparılmışdır.
4. Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi ilə araşdırılan sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi müəyyən olunmuşdur.
5. Yarımoxda operator əmsallı müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində bir sinif elliptik tip dördüncü tərtib bircins operator-diferensial tənliklərin requlyar həllər fəzasında elementar həllərinin tamlığını müəyyən edən şərtlər tapılmışdır.

Müəllif elmi rəhbəri, professor Araz Əliyevə dissertasiya işinə göstərdiyi mütəmadi diqqətə görə dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. *Rzayev, E.S.* On a boundary value problem for a fourth order differential equation with operator coefficients // Abstracts of the International Conference on Actual Problems of Mathematics and Informatics dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, - Baku: -29-31 May, – 2013, – p. 92-93.

2. *Рзаев, Э.С.* Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения четвертого порядка с операторными коэффициентами // - Baku: Journal of Qafqaz University, Series of Mathematics and Computer Science, - 2013. vol. 1, no. 2, - pp. 168-172.

3. Aliev, A.R., *Rzayev, E.S.* Solvability of boundary value problem for elliptic operator-differential equations of fourth order with operator boundary conditions // - Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, - 2014. vol. 40, Special Issue, - p. 13-22. (**Web of Science Core Collection bazasının ESCI siyahısı**)

4. Al-Aidarous, E.S. Fourth order elliptic operator-differential equations with unbounded operator boundary conditions in the Sobolev-type spaces / Eman Al-Aidarous, Araz Aliev, *Elvin Rzayev* [et al.] // - United Kingdom: Boundary Value Problems, – 2015. vol. 2015, no. 191, – p. 1-14. (**Web of Science Core Collection bazasının SCIE siyahısı**)

5. Алиев, А.Р., *Рзаев, Э.С.* О разрешимости краевой задачи с ограниченным оператором в краевых условиях для одного класса эллиптических операторно-дифференциальных уравнений // Материалы VII Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем», Часть 1, – Уфа: – 7–9 декабря, – 2017, – с. 64-69.

6. Aliev, A.R., *Rzayev, E.S.* On the theory of a class of fourth-order polynomial operator // Abstracts of the International Workshop "Spectral Theory and Its Applications" dedicated to the 80th

anniversary of the academician M.G. Gasymov, - Baku: -7-8 June, - 2019, – p. 33-35.

7. *Rzayev, E.S.* Solvability of boundary-value problem with bounded operator in boundary conditions for fourth-order elliptic operator-differential equation // - Baku: Baku Mathematical Journal, - 2023. vol. 2, no. 1, - p. 97-112.

8. Aliev, A.R., *Rzayev, E.S.* On solvability of boundary-value problem for fourth-order elliptic equation with operator coefficients // Proceedings of the International Conference on "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" dedicated to the 100-th anniversary of the National Leader Heydar Aliyev, - Baku: -26-28 April, – 2023, – p. 58-60.

9. *Rzayev, E.S.* On the completeness of a system of decreasing elementary solutions for one class of fourth-order operator-differential equations on the semi-axis // - Baku: Baku Mathematical Journal, - 2023. vol. 2, no. 2, - p. 199-207.

10. Алиев, А.Р., *Рзаев, Э.С.* О полноте производных цепочек полиномиального операторного пучка четвертого порядка // Материалы Международной научно-практической конференции «Спектральная теория операторов и смежные вопросы», посвященной 75-летию проф. Я.Т.Султанаева, – Уфа: – 26–27 октября, – 2023, – с. 6.

Dissertasiyanın müdafiəsi **06 dekabr 2024-cü il** tarixində saat **14^{00}**-da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Avtoreferatın elektron versiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **24 oktyabr 2024-cü il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 07.06.2024
Kağızın formatı: 60x841/16
Həcm: 37362
Tiraj: 100