АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА В НЕСТАНДАРТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ БАЗИСОВ

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Фидан Шахин кызы Мехтиева**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии

Баку – 2023

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» в Гянджинском Государственном Университете.

Научный руководитель:

чл.-корр. НАН Азербайджана, профессор
Билал Тельман оглы Билалов

Официальные оппоненты:

доктор математических наук, доцент
Ровшан Алифага оглы Бандалиев

доктор математических наук, доцент
Джаваншир Джавад оглы Гасанов

кандидат физико-математических наук, доцент
Эльчин Джамал оглы Ибадов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

_________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

доктор физико-математических наук, профессор
_________________ **Гамидулла Исрафил оглы Асланов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Диссертационная работа посвящена в целом вопросам разрешимости краевых задач Римана теории аналитических функций в нестандартных пространствах Харди, а именно в весовых пространствах Харди с переменным показателем суммируемости и в пространствах Морри-Харди, а также их применениям к изучению базисных свойств возмущенных тригонометрических систем в нестандартных банаховых пространствах функций. Следует отметить, что применение метода Фурье к решению многих уравнений математической физики, механики и, вообще говоря, теории в частных производных приводит к спектральным задачам относительно обыкновенных дифференциальных операторов. Во многих случаях появляются дифференциальные операторы, собственными функциями которых являются возмущенные тригонометрические системы. К подобным задачам можно отнести дифференциальные уравнения смешанного (или же эллиптического) типа, заданные на специальных областях. Относительно этих задач можно познакомится из серии работ С.М.Пономарева, Е.И.Моисеева, С.А.Габова, П.А.Крутицкого и др. (эти работы приведены в списке литературы). В связи с вышеперечисленными считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет интерес с точки зрения теорий аппроксимации, базисов и краевых задач Римана.

В большинстве специальных случаев полученные спектральные задачи имеют собственные функции возмущенной системы синусов вида

$$\{\sin(nt + \alpha(t))\}_{n \in N}, \qquad (1)$$

($N -$натуральные числа) где $\alpha : [0, \pi] \to R$, вообще говоря, кусочно-линейная функция. Если решение дифференциального уравнения ищется в нестандартных соболевых пространствах функции, то необходимо изучать базисные свойства (полнота, минимальность, базисность) системы (1) в соответствующих нестандартных банаховых пространствах функций. Изучение базисных свойств возмущенных тригонометрических систем имеет глубокую и давную историю. Видимо оно берет свое начало с известных работ Пэли-Винера[1] и Н.Левинсона[2]. Следует отметить, что базисные свойства системы (1) тесно связаны с аналогичными свойствами системы экспонент

$$\left\{e^{i(nt-\alpha(t)signn)}\right\},\ n\in Z\ , \tag{2}$$

с подходящей функцией $\alpha:[-\pi,\pi]\to R$. Когда $\alpha(\cdot)$ является линейной функцией $\alpha(t)=at$, то критерий базисности относительно параметра $a\in R$ впервые был найден А.М.Седлецким[3] в 1982 г. Аналогичные результаты относительно систем синусов и косинусов (и для систем экспонент тоже) были получены Е.М.Моисеевым[4] 1984 г. и эти результаты на комплексный случай параметра $a\in C$ перенес Г.Г.Девдариани[5]. Отметим, что работы в этом направлении условно можно разделить на 2 группы. В первую группу можно отнести те работы, в которых применяются методы теории целых функций (напр., работы Пэли-Винера, Левинсона, А.М.Седлецкого, Б.Я.Левина и др.) Во вторую группу относим те работы, в которых применяются методы теории краевых задач для аналитических функций. Идея использование краевых задач для изучения базисных свойств возмущенных тригонометрических систем принадлежит А.В.Бицадзе[6] (1950 г).

---

[1] Palley R. Wiener N. Fourier transforms in complex domain.// Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 19 (Amer. Math. Soc. RI. 1934).

[2] Levinson N. Gap and density theorems // New-York: Publ. Amer. Math. Soc. 1940, 204 p.

[3] Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации // Москва, Физматлит, 2005, 504 с.

[4] Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов// ДАН СССР, 1984, т. 274, №4, с. 794-798.

[5] Девдариани Г.Г. О базисности одной системы функций // Дифференциальные уравнения, т. 22, №1, с. 170-171, 1986.

[6] Бицадзе А.В. Об одной системе функции // УМН, т. 5, в. 4(38), с.150-151

Затем этот метод применил С.М.Пономарев[7] относительно систем синусов с конкретной линейной фазой и Е.И.Моисеев относительно систем синусов, косинусов и экспонент с произвольной линейной фазой для установления базисных свойств этих систем в лебеговых пространствах $L_p, 1 < p < +\infty$. Дальнейшее развитие этого метода для установления базисных свойств двойных систем экспонент, системы синусов с кусочно-непрерывной фазой, двойных и одинарных систем степеней принадлежит Б.Т.Билалову. К этой группе работ можно отнести и исследования А.Ю.Казьмина, А.Н.Барменкова, О.И.Любарского, В.А.Ткаченко, А.А.Шкаликова и др. математиков.

Объект и предмет исследования.

Предметом и объектами изучения в диссертационной работе являются: классы Харди с переменным показателем суммируемости, классы Харди, порожденные нормой пространства Морри, однородные и неоднородные краевые задачи Римана в этих классах, возмущенные системы экспонент с линейной и кусочно-линейной фазами, системы синусов и косинусов с линейными фазами.

Цель и задачи исследования.

Целью работы является изучение вопросов разрешимости краевых задач Римана в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости с весом общего вида, а также в классах Харди-Морри и применение полученных результатов к установлению базисных свойств систем экспонент с кусочно-линейной фазой в пространствах типа Морри.

Методы исследования.

При получении основных результатов применяются методы краевых задач Римана теории аналитических функций, методы теории аппроксимации и базисов, методы функционального и комплексного анализов

---

[7] Пономарев С.М. Об одной задаче на собственные значение // ДАН СССР, 1979, т. 243, № 5, 1068-1070.

Основные положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие основные положения:

- условие разрешимости однородной задачи Римана в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости с весом общего вида и построение общего решения;

- условие разрешимости неоднородной задачи Римана в тех же классах и в случае разрешимости нахождение общего решения;

- эти же вопросы изучать относительно классов Харди-Морри;

- изучение базисных свойств систем экспонент (в том числе и с единицей) с линейными фазами (и кусочно-линейными фазами) в пространствах типа Морри;

-установление связей между базисными свойствами одинарных и двойных систем в пространствах типа Морри;

-базисные свойства систем синусов и косинусов с линейными фазами в пространствах типа Морри.

Научная новизна исследования. В работе получены следующие основные результаты:

-рассматривается однородная задача Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом, находится достаточное условие на весовую функцию общего вида для разрешимости этой задачи в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости и строится общее решение;

-находится условие разрешимости неоднородной краевой задачи Римана в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости с весом общего вида;

-изучается вопрос разрешимости однородной задачи Римана в классах Харди-Морри и строится общее решение;

-находится достаточное условие разрешимости неоднородной задачи Римана в классах Харди-Морри;

-рассматривается система экспонент с линейной фазой и устанавливаются ее базисные свойства в подпространстве пространства Морри, в котором непрерывные функции плотны;

-аналогичные вопросы изучаются относительно системы экспонент с кусочно-линейной фазой;

-устанавливаются связи между базисными свойствами двойных и одинарных систем в пространствах типа Морри;

-находятся критерия базисности систем синусов и косинусов с линейными фазами в пространствах типа Морри.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории краевых задач, в теории базисов, при обосновании метода Фурье для решения многих уравнений в частных производных и др.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на Международной конференции “Modern methods of the boundary-value problems theory” посвященной 90-летию В.А.Ильина (Москва 2018); на Международной конференции “Mathematical Advances and Applications” (ICOMAA -2018, Стамбул); на Международном семинаре “Spectral theory and its applications” посвященной 80-летию академика Мираббас Касымова (Баку 2019), на международном конференции “Operators, functions and system of mathematical physics” (Баку 2019), на четвертой Международной конференции “Mathematical Advances and Applications” (ICOMAA 2021, Стамбул) .

Личный вклад автора. Все полученные результаты в диссертации являются новыми и принадлежать автору.

Публикации автора. Основные выводы диссертационной работы в рекомендуемых Высшей Аттестационной Комиссией при Президенте Азербайджанской Республики журналах было опубликовано -7, в том числе во входящих в международные системы формулировок и индексации периодических научных изданиях -6 вывода, из них 2 без соавторства. Среди выводов научных мероприятий республиканского и международного масштабов были опубликованы -7 (из них 3 опубликованы за рубежом)

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре “Математический анализ” в Гянджинском Государственном Университете.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности**).**

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, выводы и списка литературы. Общий объем диссертационной работы – 195498 знаков, (титульный лист -365, содержание - 1797 знаков, введение -46050 знаков, первая глава -60000 знаков, вторая глава -86000 знаков, выводы -1286 знаков). Список литературы состоит из 94 наименований. Объем диссертации 107 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, выводы и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению вопросов разрешимости задач Римана в классах Харди, порожденных нормами рассматриваемых функциональных пространств.

В параграфе 1.1 вводятся основные понятия, которые используются в этой главе.

Итак, сперва примем некоторые обозначения. Пусть $C-$комплексная плоскость, $\omega \equiv \{z \in C : |z| < 1\}-$единичный круг, $\partial\omega \equiv \{z \in C : |z| = 1\}-$единичная окружность. Нам понадобятся некоторые сведения из теории обобщенных пространств Лебега.

Пусть $p:[-\pi,\pi]\to[1,+\infty)$ – некоторая измеримая по Лебегу функция. Положим

$$I_p(f)\overset{def}{\equiv}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p(t)}dt.$$

Пространство $L_{p(\cdot)}$ на $[-\pi,\pi]$ есть банахово пространство измеримых функций с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)}\overset{def}{\equiv}\inf\left\{\lambda>0:I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\}.$$

Положим

$$WL\overset{def}{\equiv}\Big\{p:p(-\pi)=p(\pi);\exists C>0,\quad \forall t_1,t_2\in[-\pi,\pi]:|t_1-t_2|\le\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|p(t_1)-p(t_2)|\le\frac{C}{-\ln|t_1-t_2|}\Big\}.$$

Определим следующий класс весов Макенхоупта.

Определение 1. Пусть $p(\cdot):[-\pi,\pi]\to[1,+\infty]$. Будем говорить, что весовая функция $\omega(\cdot)$, принадлежит классу $\omega\in A_{p(\cdot)}$, если

$$\sup_{I\subset[-\pi,\pi]}|I|^{-1}\|\omega(\cdot)\chi_I(\cdot)\|_{p(\cdot)}\|\omega^{-1}(\cdot)\chi_I(\cdot)\|_{q(\cdot)}<+\infty.$$

Нам также понадобятся следующие весовые классы Харди. Через H_p^+ обозначаем обычный класс Харди аналитических в ω функций. Пусть $\mathscr{A}$ σ-алгебра борелевых множеств из $[-\pi,\pi]$ и ρ – мера на $\mathscr{A}$. $L_{p(\cdot);d\rho}\equiv L_{p(\cdot);d\rho}(-\pi,\pi)$ – банахово пространство измеримых функций на $[-\pi,\pi]$ с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)}\overset{def}{\equiv}\inf\left\{\lambda>0:I_{p(\cdot);d\rho}\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\},$$

где

$$I_{p(\cdot);d\rho}(f)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p(t)}d\rho(t).$$

Положим

$$\widetilde{H}\equiv\left\{f\in H_1^+ : f^+\in L_{p(\cdot);d\rho}\right\},$$

где $f^+\left(e^{it}\right)$ некасательные граничные значения функции f на $\partial\omega$. Примем норму в $\widetilde{H}$:

$$\|f\|_{\widetilde{H}}=\left\|f^+\left(e^{it}\right)\right\|_{p(\cdot);d\rho}.$$

Аналогичный весовой класс определяем относительно внешности круга ω. Пусть ${}_mH_p^-$ обычный класс Харди аналитических вне ω функций, имеющих полюс в бесконечно удаленной точке порядка не выше m. Примем

$$\widetilde{H}^-\equiv\left\{f\in{}_mH_1^- : f^-(e^{it})\in L_{p(\cdot),d\rho}\right\},$$

где $f^-\left(e^{it}\right)=f/_{\partial\omega}$ – некасательные граничные значения f на $\partial\omega$ извне ω. Определим норму в $\widetilde{H}^-$:

$$\|f\|_{\widetilde{H}^-}\equiv\left\|f^-\left(e^{it}\right)\right\|_{p(\cdot);d\rho},\ \forall f\in\widetilde{H}^-.$$

В параграфе 1.2 рассматривается краевая задача Римана теории аналитических функций в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости.

Рассмотрим следующую задачу Римана

$$F^+(\tau)-G(\tau)F^-(\tau)=g(\tau),\ \tau\in\partial\omega, \tag{3}$$

где $G:\partial\omega\to C$ – коэффициент, $g(\tau)$ – свободный член этой задачи.

Предположим, что $g\in L_{p(\cdot);\vartheta}$ и G удовлетворяет следующим условиям.

α) $G^{\pm1}\in L_\infty(\partial\omega)$;

β) $\theta(t)\equiv\arg G\left(e^{it}\right)$ – кусочно-гельдерева функция на $[-\pi,\pi]$ и $-\pi<s_1<...<s_r<\pi$ – соответствующие точки разрывов. Пусть $h_k=\theta(s_k+0)-\theta(s_k-0)$, $k=\overline{1,r}$,

$h_0 = \theta(-\pi + 0) - \theta(\pi - 0) -$ скачки функции $\theta(\cdot)$ в этих точках. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициент $G(\tau)$ задачи (3) удовлетворяет условиям $\alpha);\beta)$. Предположим, что скачки функции $\theta(t) \equiv \arg G(e^{it})$ удовлетворяют соотношениям*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| w(t) \vartheta^{-1}(t) \right|^{q(t)} dt < +\infty, \tag{4}$$

$$h_k < 2\pi,\ k = \overline{0, r}, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| w^{-1}(t)\ \ \vartheta(t) \right|^{p(t)} dt < +\infty. \tag{6}$$

где $w(t)$ определена выражением

$$w(t) = \left| \sin \frac{t-\pi}{2} \right|^{\frac{h_0}{2\pi}} \prod_{k=1}^{r} \left| \sin \frac{t - s_k}{2} \right|^{\frac{h_k}{2\pi}}. \tag{7}$$

Тогда общее решение однородной задачи Римана

$$F^{+}(\tau) - G(\tau) F^{-}(\tau) = 0,\ \tau \in \partial\omega,$$

в классах $H^{+}_{p(\cdot);\vartheta} \times_m H^{-}_{p(\cdot);\vartheta}$ представимо в виде

$$F(z) \equiv Z(z) P_m(z).$$

где $Z(z) -$ каноническое решение, $P_m(z) -$ произвольный полином степени $\le m$.

В параграфе 1.3 изучаются вопросы разрешимости неоднородной задачи Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом в весовых пространствах Харди с переменным показателем суммируемости. Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть коэффициент $G(\tau)$ задачи (3) удовлетворяет условиям $\alpha);\beta)$. Предположим, что скачки функции $\theta(t) \equiv \arg G(e^{it})$ удовлетворяют соотношениям (4), (5), (6), где весовая функция $w(t)$ определена выражением (7). Пусть $\nu \in A_{p(\cdot)}$, $1 < p < +\infty$, где $\nu(t) = w^{-1}(t)\vartheta(t)$ и $\nu^{-1} \in L_{q(\cdot)}$.*

Тогда неоднородная задача Римана (3) разрешима в классах $H^{+}_{p(\cdot);\vartheta} \times_m H^{-}_{p(\cdot);\vartheta}$, *если имеют место условия ортогональности*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\sigma})}{Z^{+}(e^{i\sigma})} e^{in\sigma} d\sigma = 0, n = \overline{1,-m},$$

При $m \geq 0$ *общее решение задачи (3) представимо в виде*

$$F(z) = Z(z) P_m(z) + F_1(z),$$

где $Z(z)$ – *каноническое решение однородной задачи,* $P_m(z)$ *произвольный полином степени* $\leq m$, *а* $F_1(z)$ *определяется выражением*

$$F_1(z) \equiv \frac{Z(z)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\sigma})}{Z^{+}(e^{i\sigma})} \frac{d\sigma}{1 - ze^{-i\sigma}}.$$

Более того, при $m \leq -1$ *задача (3) однозначно разрешима и при* $m = -1$ *она имеет решение при* $\forall g \in L_{p(\cdot);\vartheta}$.

В параграфе 1.4 рассматривается краевая задача Римана в классах Морри-Харди для аналитических функций. При этом изучаются некоторые свойства функций из этих классов и устанавливается возможность представления через интеграл типа Коши этих функций.

Определим пространство Морри на единичной окружности $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$ на комплексной плоскости C. Через $L_0(-\pi, \pi)$ обозначаем линейное пространство всех измеримых (по Лебегу) на $(-\pi, \pi)$ функций. Через $L^{p,\alpha}(\gamma), 1 \leq p < +\infty, 0 \leq \alpha \leq 1$, будем обозначать нормированное пространство всех измеримых на γ функций $f(\cdot)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\gamma)} = \sup_B \left(|B \cap \gamma|_\gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\gamma} |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty,$$

($|B\cap\gamma|_{\gamma}$ – линейная мера пересечения $B\cap\gamma$), где sup берется по всем шарам с центром на γ и с произвольным положительным радиусом. Относительно этой нормы $L^{p,\alpha}(\gamma)$ является банаховым.

Определим класс Морри-Харди $H_{+}^{p,\alpha}, 1\le p\le+\infty, 0\le\alpha\le 1$ аналитических внутри ω функций $f(\cdot)$ с нормой

$$\|f\|_{H_{+}^{p,\alpha}}=\sup_{0<r<1}\|f_r(\cdot)\|_{p,\alpha} \ ,$$

где $f_r(t)=f(re^{it})$. Нетрудно заметить, что имеет место включение $H_{+}^{p,\alpha}\subset H_1^{+}, 1\le p<+\infty$, где H_1^{+} – обычный класс Харди.

Совершенно аналогично классическому случаю, определяем класс Морри-Харди для внешности единичного круга ω. Пусть $\omega^{-}=C\setminus\overline{\omega}\left(\overline{\omega}=\omega\cup\gamma\right)$. Будем говорить, что аналитическая в ω^{-} функция f имеет конечный порядок m на бесконечности, если ее разложения Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{m}a_k z^k \ , \ a_m\ne 0 \ . \qquad (8)$$

Таким образом, при $m>0$ функция f имеет полюс порядка m в $z=\infty$; при $m=0$ она ограничена в окрестности $z=\infty$; при $m<0$ она имеет нуль порядка $(-m)$ в $z=\infty$. Пусть $f(z)=f_0(z)+f_1(z)$, где $f_0(z)$ главная часть (т.е. $f_0(z)=\sum_{k=0}^{m}a_k z^k$), а $f_1(z)$ регулярная часть разложения (8). Следовательно, $f_0(z)\equiv 0$, при $m<0$, и f_0 ест полином порядка m, т.е. $\deg f_0=m$, если $m\ge 0$. Будем говорить, что функция f

принадлежит классу ${}_m H_-^{p,\alpha}$, если $\deg f_0 \le m$ и $F \in H_+^{p,\alpha}$, где $F(z) = \overline{f_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $z \in \omega$.

При получении основных результатов этой главы существенно используются следующие теоремы из работы Б.Т. Билалова.

Теорема 3. *Пусть коэффициент* $G(\cdot)$ *задачи*

$$\left.\begin{array}{l} F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = 0, \quad \tau \in \gamma, \\ F^+(\cdot) \in H_+^{p,\alpha}; F^-(\cdot) \in_m H_-^{p,\alpha}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

$$1 < p < +\infty, \ \ 0 < \alpha \le 1,$$

удовлетворяет условиям $\alpha), \beta)$ *и скачки* $\{h_k\}_0^r$ *функции* $\theta(t) = \arg G(e^{it})$ *на* $[-\pi, \pi]$, *где* $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$, *удовлетворяют неравенствам*

$$-1 + \frac{\alpha}{p} < \frac{h_k}{2\pi} \le \frac{\alpha}{p}, \quad k = \overline{0,r}. \tag{10}$$

Тогда:

$\alpha)$ *при* $m \ge 0$ *задача (9) имеет общее решение вида*

$$F(z) \equiv Z(z)P_k(z),$$

где $Z(z)-$ *канонические решение этой задачи,* $P_k(z)-$ *произвольный полином степени* $k \le m$;

$\beta)$ *при* $m < 0$ *задача (9) имеет только тривиальное решение.*

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = f(\arg\tau), \quad \tau \in \gamma, \tag{11}$$

в классах Морри-Харди $H_+^{p,\alpha} \times_m H_-^{p,\alpha}, 1 < p < +\infty, 0 < \alpha < 1$, где $f \in L^{p,\alpha} -$ некоторая заданная функция.

Мы используем некоторые следствия которые непосредственно следуют из теоремы 3.

Следствие 1. *Пусть коэффициент* $G(\cdot)$ *задачи (11) удовлетворяет условиям* $\alpha),\beta)$ *и* $\{h_k\}_0^r$ *скачки функции* $\theta(t)=\arg(G(e^{it}))$ *в точках разрывов* $\{s_k\}_1^r \subset (-\pi,\pi)$: $h_0=\theta(-\pi)-\theta(\pi)$, *где* $h_0=\theta(-\pi)-\theta(\pi)$. *Пуст выполнены неравенства (10). Тогда для,* $\forall f \in L^{p,\alpha}$, $1<p<+\infty$, $1<p<+\infty$, *задача (11) имеет единственное решение в классах Морри-Харди* $H_+^{p,\alpha}\times_{-1}H_-^{p,\alpha}$ *представимое через интеграл типа Коши вида*

$$F_1(z)=\frac{Z(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{Z^+(e^{it})}K_z(t)dt, \qquad (12)$$

Из этой же теоремы так же следует следующее

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия Следствия 1. Тогда для* $\forall f \in M^{p,\alpha}$, $1<p<+\infty$, $0<\alpha<1$, *задача (11) имеет единственное решение в классах Морри-Харди,* $MH_+^{p,\alpha}\times_{-1}MH_-^{p,\alpha}$ *определенное интегралом типа Коши (12).*

Вторая глава диссертации посвящена изучению базисных свойств системы экспонент вида

$$E_\beta \equiv \left\{e^{i(nt+\beta|t|\,sign\,n)}\right\}_{n\in Z}, \qquad (13)$$

где $\beta\in C$ – комплексный параметр, Z – целые числа. Эта система является другой разновидностью возмущенной системы экспонент

$$e_\beta \equiv \left\{e^{i(n+\beta sign\,n)t}\right\}_{n\in Z},$$

рассмотренной многими математиками. Изучаются базисные свойства (полнота, минимальность, базисность) этой системы в подпространстве пространстве Морри, в котором непрерывные функции плотны. Находятся достаточные условия, при выполнении которых эта система полна (минимальна или образует базис) в этом подпространстве. Следует отметить, что базисные свойства систем вида (13) в корни отличаются от соответствующих свойств системы e_β. Базисные свойства системы e_β в пространствах типа Морри полностью изучены в недавней статье Б.Т.Билалова.

В параграфе 2.1 вводятся основные понятия, которыми будем пользоваться в этой главе.

В параграфе 2.2 устанавливается базисность системы экспонент

$$E_\beta = \left\{ e^{i(nt-\beta|t|\,signn)} \right\}_{n\in Z},$$

в пространствах Морри $M^{p,\alpha}$ с применением метода краевых задач.

Этот метод требует установления базисности частей системы экспонент в пространствах Морри-Харди $MH_{+}^{p,\alpha}$ и ${}_{-1}MH_{-}^{p,\alpha}$.

В параграфе 2.3 рассматривается возмущенная система экспонент с единицей, фаза которой является линейной функцией, зависящей от действительного параметра.

Доказана следующая

Теорема 4. *Пусть* $2\operatorname{Re}\beta + \dfrac{\alpha}{p} \notin Z$. *Тогда система экспонент*

$$1 \cup \left\{ e^{i(n-\beta\, sign\, n)t} \right\}_{n\neq 0},$$

образует базис в $M^{p,\alpha}, 0<\alpha<1, 1<p<+\infty$, *тогда и только тогда, когда* $d(\beta)=\left[2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{\alpha}{p}\right]=0$ *(*$[\cdot]$*– целая часть). При*

$d(\beta)<0$ *она не полна, но минимальна в* $M^{p,\alpha}$*; при* $d(\beta)>0$ *она полна, но не минимальна в* $M^{p,\alpha}$.

В параграфе 2.4 рассматривается возмущенная система экспонент с кусочно-линейной фазой, зависящей от двух действительных параметров. Рассмотрим систему экспонент вида

$$E_{\beta;\gamma} \equiv \left\{e^{i(nt+\lambda_n(t))}\right\}_{n\in Z},$$

где $\lambda_n(t) = -(\beta t + \gamma\, signt)sign\, n;$ $\alpha, \beta \in R-$ действительные параметры и $Z-$целые числа.

В этом параграфе доказана следующая

Теорема 5. *Пусть действительные параметры* $\beta;\gamma \in R$ *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$-1+\frac{\alpha}{p} < -\frac{2\gamma}{\pi} < \frac{\alpha}{p}; -1+\frac{\alpha}{p} < -2\beta - \frac{2\gamma}{\pi} < \frac{\alpha}{p}.$$

Тогда система экспонент $E_{\beta;\gamma}$ *образует базис в пространстве* $M^{p,\alpha}, 0<\alpha<1, 1<p<+\infty$.

Рассмотрим наиболее общий случай, а именно рассмотрим систему экспонент вида

$$\tilde{E}_{\beta,\gamma} \equiv \left\{e^{i(nt+\tilde{\lambda}(t))}\right\}_{n\in Z}$$

где

$$\tilde{\lambda}_n(t) = -\frac{1}{2}\tilde{\theta}(t) signn, \; n\in Z,$$

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{cases} -2\beta t + 2\gamma + 2m_1\pi, t\in[-\pi,0], \\ -2\beta t + 2\gamma + 2m_2\pi, t\in(0,\pi], \end{cases}$$

$m_1, m_2 \in Z-$некоторые целые числа. Функция $\tilde{\theta}(\cdot)$ имеет точку разрыва $t=0$ и скачок ее в этой точке равен

$$\tilde{h}_1 = \tilde{\theta}(+0) - \theta(-0) = -2\gamma + 2m_2\pi - (2\gamma + 2m_1\pi) = -4\gamma + 2(m_2 - m_1)\pi.$$

Так же имеем

$$\tilde{h}_0 = \tilde{\theta}(\pi) - \tilde{\theta}(-\pi) = -2\beta\pi - 2\gamma - 2m_1\pi +$$
$$(-2\beta\pi - 2\gamma + 2m_2\pi) = -4\beta\pi - 4\gamma - 2(m_1 - m_2)\pi.$$

Выберем целые числа $m_1; m_2$ из следующих условий

$$-1 + \frac{\alpha}{p} < \frac{\tilde{h}_k}{2\pi} < \frac{\alpha}{p},\ k = 0,1.$$

Имеем

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \dfrac{\alpha}{p} < -\dfrac{2\gamma}{\pi} + m_2 - m_1 < \dfrac{\alpha}{p} \\ 1 + \dfrac{\alpha}{p} < -2\beta - \dfrac{2\gamma}{\pi} - m_1 + m_2 < \dfrac{\alpha}{p} \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Положив $m = m_2 - m_1$, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть существует целое число* m *такое, что выполнены неравенства*

$$\left.\begin{array}{l} -1 + \dfrac{\alpha}{p} < -\dfrac{2\gamma}{\pi} + m < \dfrac{\alpha}{p}, \\ -1 + \dfrac{\alpha}{p} < -2\beta - \dfrac{2\gamma}{\pi} + m < \dfrac{\alpha}{p} \end{array}\right\}$$

Тогда система экспонент $\tilde{E}_{\beta,\gamma}$ *образует базис в пространстве* $M^{p,\alpha}, 0 < \alpha < 1, 1 < p < +\infty$.

В параграфе 2.5 рассматриваются двойные и одинарные системы функций в пространствах типа Морри $M^{p,\alpha}(-a,a)$ и $M^{p,\alpha}(0,a)$, соответственно. Устанавливается связь между свойствами полноты этих систем в этих пространствах.

Рассмотрим следующую одинарную систему функций вида

$$\nu_n^{\pm} \equiv a(t)\omega_n^{+}(t) \pm b(t)\omega_n^{-}(t),\ n \in N,$$

и ассоциированную с ней двойную систему

$$\{A(t)W_n(t); A(-t)W_n(-t)\}_{n\in N}, \tag{15}$$

где
$$A(t) = \begin{cases} a(t), t \in [0,a], \\ b(-t), t \in [-a,0), \end{cases}$$

$$W_n(t) = \begin{cases} \omega_n^{+}(t), t \in [0,a], \\ \omega_n^{-}(-t), t \in [-a,0) \end{cases}$$

Доказана следующая

Теорема 7. *Двойная система*

$$V_{n,m} \equiv (A(t)W_n(t); A(-t)W_m(-t)),\ n,m \in N,$$

полна в $M^{p,\alpha}(-a,a)$, $1 \le p < +\infty$, $0 < \alpha \le 1$, *тогда и только тогда, когда одинарные системы* $\{\nu_n^{+}\}_{n\in N}$ *и* $\{\nu_n^{-}\}_{n\in N}$ *одновременно полны в* $M^{p,\alpha}(0,a)$.

Так же доказана следующая

Теорема 8. *Система* $1 \cup \{V_{n,n}\}_{n\in N}$ *полна в пространстве* $M^{p,\alpha}(-a,a), 1 \le p < +\infty, 0 < \alpha \le 1$, *тогда и только тогда, когда системы* $1 \cup \{\nu_n^{+}\}_{n\in N}$ *и* $\{\nu_n^{-}\}_{n\in N}$ *полны в* $M^{p,\alpha}(0,a)$.

Из этих теорем непосредственно следует следующее

Следствие 3. *Двойная система экспонент*

$$\left\{e^{i(nt+\beta(t)signn)}\right\}_{n\neq 0},$$

полна в $M^{p,\alpha}(-\pi,\pi), 1\le p<+\infty, 0<\alpha\le 1$, *тогда и только тогда, когда система синусов* $\{\sin(nt+\beta(t))\}_{n\in N}$ *и косинусов* $\{\cos(nt+\beta(t))\}_{n\in N}$ *полна в* $M^{p,\alpha}(0,\pi)$. Так же имеем следующее

Следствие 4. *Система экспонент*

$$1\cup\left\{e^{i(nt+\beta(t)signn)}\right\}_{n\neq 0},$$

полна в $M^{p,\alpha}(-\pi,\pi), 1\le p<+\infty, 0<\alpha\le 1$, *тогда и только тогда, когда системы* $\{\sin(nt+\beta(t))\}_{n\in N}$ *и* $1\cup\{\cos(nt+\beta t)\}_{n\in N}$ *полны в* $M^{p,\alpha}(\pi,\pi)$. Определим ассоциированное к $M^{p,\alpha}(a,b)$ пространство $\left(M^{p,\alpha}(a,b)\right)'$ и коротко его обозначим как M'. Пусть S единичный шар в $M^{p,\alpha}(a,b)$, т.е.

$$S=\left\{f\in M^{p,\alpha}(a,b): \|f\|_{L^{p,\alpha}(a,b)}\le 1\right\}.$$

M' это банахово пространство измеримых на (a,b) функций, для которых норма

$$\|g\|_{M'}=\sup_{f\in S}\left|\int_a^b fgdt\right|<+\infty,$$

конечна.

Пусть система $\{V_{n,n}\}_{n\in N}$ минимальна в $M^{p,\alpha}(-a,a)$ и $\{h_n^+;h_n^-\}_{n\in N}\subset M'(-a,a)$ биортогональная к ней система. Определим

$$\vartheta_k^+ = h_k^+(t)+h_k^+(-t), \forall k\in N$$

$$\vartheta_k^- = h_k^-(t)+h_k^-(-t), \forall k\in N .$$

Справедлива следующая

Теорема 9. *Система* $\{V_{n,n}\}_{n\in N}$ *минимальна в* $M^{p,\alpha}(-a,a)$, $1\le p<+\infty, 0<\alpha\le 1$, *тогда и только тогда, когда системы* $\{\vartheta_n^+\}_{n\in N}$ *и* $\{\vartheta_n^-\}_{n\in N}$ *минимальны в* $M^{p,\alpha}(0,a)$.

Совершенно аналогично доказывается следующая

Теорема 10. *Система* $1\cup\{V_{n,n}\}_{n\in N}$ *минимальна в* $M^{p,\alpha}(-a,a), 1\le p<+\infty, 0<\alpha\le 1$, *тогда и только тогда, когда системы* $1\cup\{\vartheta_n^+\}_{n\in N}$ *и* $\{\vartheta_n^-\}_{n\in N}$ *минимальны в* $M^{p,\alpha}(0,a)$.

В параграфе 2.6 рассматриваются системы синусов $\sin(n-\beta)t$, $n=1,2,\ldots,$ и косинусов $\cos(n-\beta)t$, $n=0,1,2,\ldots,$ где $\beta\in R-$ действительный параметр. Находятся критерия для полноты, минимальности и базисности этих систем относительно параметра β в подпространстве $M^{p,\alpha}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Основные результаты данного параграфа сосредоточены в следующих теоремах.

Теорема 11. *Пусть* $2\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{p}\notin Z$ $,1<p<+\infty$ $0<\alpha<1.$ *Система синусов* $\{\sin(n-\beta)t\}_{n\geq 0}$ *образует базис в* $M^{p,\alpha}(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\left[\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{2p}\right]=0$. *Причем при* $\left[\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{2p}\right]<0$ *она не полна, но минимальна; а при* $\left[\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{2p}\right]>0$ *она полна, но не минимальна в* $M^{p,\alpha}(0,\pi)$.

Аналогичный результат имеет место относительно системы косинусов, а именно справедлива следующая

Теорема 12. *Пусть* $\left[2\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{p}\right]\notin Z$, $1<p<+\infty$, $0<\alpha<1$. *Система косинусов* $\{\cos(n-\beta)t\}_{n\geq 1}$ *образует базис в* $M^{p,\alpha}(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\left[\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{2p}-\frac{1}{2}\right]=0$. *При* $\left[\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{2p}-\frac{1}{2}\right]<0$ *она неполна, но минимальна; при* $\left[\operatorname{Re}\beta+\frac{\alpha}{2p}-\frac{1}{2}\right]>0$ *она полна, но не минимальна в* $M^{p,\alpha}(0,\pi)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю чл.-корр. НАН Азербайджана, профессору Б.Т. Билалову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию краевой задачи Римана и ее приложений к задачам базисности в пространствах типа Морри.

В работе получены следующие основные результаты:

-рассматривается однородная задача Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом, находится достаточное условие на весовую функцию общего вида для разрешимости этой задачи в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости и строится общее решение;

-находится условие разрешимости неоднородной краевой задачи Римана в весовых классах Харди с переменным показателем суммируемости с весом общего вида;

-изучается вопрос разрешимости однородной задачи Римана в классах Харди-Морри и строится общее решение;

-находится достаточное условие разрешимости неоднородной задачи Римана в классах Харди-Морри;

-рассматривается система экспонент с линейной фазой и устанавливаются ее базисные свойства в подпространстве пространства Морри, в котором непрерывные функции плотны;

-аналогичные вопросы изучаются относительно системы экспонент с кусочно-линейной фазой;

-устанавливаются связи между базисными свойствами двойных и одинарных систем в пространствах типа Морри;

-находятся критерия базисности систем синусов и косинусов с линейными фазами в пространствах типа Морри.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Bilalov, B.T., Huseynli, A.A., Seyidova, F.S. Riemann boundary value problems in generalized weighted Hardy spaces // - Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. -2017. v. 43, №2, p. 240–251.
2. Huseynli, A.A., Seyidova, F.S. Basis properties of the system of exponents in weighted Morrey spaces // "Modern methods of the boundary-value problems theory" International conference dedicated to the 90th anniversary of V.A.Ilyn, -Moscow: - 2-6 May, -2018, -p. 253-254.
3. Huseynli, A.A. Fatih Sirin, Seyidova, F.S. On Korovkin type theorems in non-standard spaces and their statistical variants // International Conference on Mathematical Advances and Applications, ICOMAA-2018, -Istanbul: -11-13 May, -2018, -p. 33.
4. Nasibova, N.P., Seyidova F.S. On the basicity of a perturbed system of exponents with a unit in Morrey-type spaces // - Baku: Transaction of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of phys.-tech. and math. sciences, -2019. v. 39 (1), -p. 151-161.
5. Nasibova, N.P., Seyidova F.S. On the basicity of a perturbed system of exponents with a unit in Morrey-type spaces // International Workshop "Spectral Theory and its applications" dedicated to 80th anniversary of outstanding mathematician, academician Mirabbas Gasimov, -Baku: -7-8 June, -2019, -p. 131-133.
6. Bilalov, B.T., Seyidova, F.S. Basicity of system of exponents with piecewise linear phase in Morrey-type spaces // -Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, -2019. vol. 43, -p. 1850-1866.
7. Bilalov, B.T., Seyidova, F.S. Basicity of system of exponents with a piecewise linear phase in Morrey-type spaces // "Operators, functions and system of mathematical physics" Intern. conference, -Baku: Khazar University, -10-14 June, -2019, -p. 31-32.
8. Muradov, T.R., Seyidova, F.S. General solution of homogeneous Riemann problem in Hardy-Morrey classes //

“Operators, functions and system of mathematical physics” conference, -Baku: Khazar University, -10-14 June, -2019, -p. 89-90.
9. Nasibova, N.P., Seyidova, F.S. Basis properties of a perturbed exponential system with a unit in Morrey-type spaces // “Operators, functions and systems of mathematical physics” Intern. conference, -Baku: Khazar University, -10-14 June, -2019, -p. 91.
10. Bilalov, B.T., Sadigova, S.R., Seyidova, F.S. On the solvability of the homogeneous Riemann problem in Morrey-Hardy classes // -Baku: The Reports of National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2020. v. LXXVI, №1-2, -p. 14-17.
11. Bilalov, B.T., Muradov, T.R., Seyidova, F.S. On basicity of perturbed exponential system with piecewise linear phase in Morrey-type spaces // -Heidelberg: Afrika Matematika, -2020, v. 32, №1, -p. 151-166.
12. Seyidova, F.S. On the basicity of system of sines and cosines with a linear phase in Morrey-type spaces // -Maragheh: Sahand Communications in Mathematical Analysis, -2020. v. 17, № 4, -p. 85-93.
13. Seyidova, F.S. On the completenes and minimality of double and unitary systems in Morrey-type spaces // -Nur-Sultan: Eurasian Mathematical Journal, -2021. v.12, №2, -p.74-81.
14. Muradov, T.R., Seyidova, F.S. Basis properties of perturbed system of exponents with a piecewise linear phase in Morrey-type spaces // 4-th International E-Conference on Mathematical Advences and Applications, -Istanbul, Turkey: -26-29 May, -2021, -p. 197.

Защита диссертации состоится **«20» октября 2023** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Министерство Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Министерство Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Министерство Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **20 сентября 2023** года.

Подписано в печать: 13.09.2023
Формат бумаги: 60x841/16
Объём: 39485
Тираж:70