АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ СОБОЛЕВА И ИХ ПРИМЕНЕНИИ

Специальность: 1211.01 –Дифференциальные уравнения

Область науки: Математика

Соискатель: **Шариф Мамед оглы Насибов**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук

Баку-2022

Работа выполнена в Научно Исследовательском Институте Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета.

Научные консультанты: академик, д.ф.–м.н., профессор
Юсиф Абульфат оглы Мамедов
академик, д.ф.–м.н., профессор
Фикрет Ахмедали оглы Алиев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Таир Сади оглы Гаджиев
доктор физико-математических наук, профессор
Гамлет Фарман оглы Гулиев
доктор математических наук, профессор
Нихан Алипанах оглы Алиев
доктор физико-математических наук, профессор
Варга Казым оглы Калантаров

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
____________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
____________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
доктор математических наук, профессор
____________ **Махир Мирзахан оглы Сабзалиев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Математической моделью процессов распространения световых волн в нелинейных средах является задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + i\beta|u|^q u = \Delta u + \alpha|u|^p u \quad \text{в} \quad R^n \times R_+, \tag{1}$$

$$u/_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $q > 0, p > 0, \beta \geq 0, \alpha \neq 0, u_0$ – заданная в R^n функция. Для уравнения (1) ставится также смешанная задача.

Задача (1)-(2) при $\beta = 0$ в научной литературе исследуется очень интенсивно. Различным свойствам решений задачи (1)-(2) при $\beta = 0$ посвящено довольно много работ. Вопросам разрушения задачи (1)-(2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ посвящены работы Жибера А.В., Шабата А.Г., Кудряшова О.И., Сакбаева В.Ж., Жидкова П.Е., Glassey R.T., Merle F., Tsutsumi S., Tsvetkov N., Strauss W., Nawa H., Cazenave T., Weissler F.B. и др. Вопросы локальной разрешимости задачи (1)-(2) при $\beta = 0$ в различных функциональных пространствах изучены в работах Ginibre J. и Velo G., Baillon J.B., Gazenave T., Figueiza, Bourgain J., Шабат А.Б. и др.

Разрешимость первой смешанной задачи с однородным граничным условием для уравнения при $\beta > 0, \alpha = 0$ исследована Лионсом Ж.Л., при $\beta > 0, \alpha \neq 0$ Владимировым М.В. и др.

Исследования разрешимости задачи (1)-(2) при $\beta = 0$, $\alpha > 0$ в сверхкритическом случае в научной литературе автору неизвестны. Исследования скорости разрушения решений задачи (1)-(2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ в критическом и сверхкритическом случаях в научной литературе автору неизвестны.

В работах Владимирова М.В. первая смешанная задача с однородным граничным условием для уравнения (1) исследовалась без определения знака параметра α и не исследовалось поведение решений при $t \to \infty$. Далее, в научной литературе не исследовалась глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения Шредингера-Хартри в критическом и сверхкритическом случаях.

Исследование самоканализации решений задачи (1)-(2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ с нелинейным членом вида $f\left(|u|^2\right)u$ вместо $|u|^p u$ при подходящих условиях на функции $f\left(|u|^2\right)$ в научной литературе отсутствует.

В решении проблемы глобальной разрешимости задачи (1)-(2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ в сверхкритическом и критическом случаях возникает проблема определения наилучшей константы и ее оценки в неравенстве Гальярдо-Ниренберга-Соболева.

Исходя из этих соображений можем заключить, что тема диссертации, посвященная исследованию вопросов разрешимости, разрушения, самоканализации и поведения решений при $t \to \infty$ эволюционного уравнения Шредингера, Шредингера-Хартри и Гинзбурга-Ландау, и создания с этой целью соответствующего математического аппарата является актуальной и представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Объект и предмет исследования.

Основным объектом диссертационной работы является вычисление оптимальных констант в неравенствах Соболева и их применение к нелинейным эволюционным уравнениям Шредингера, Шредингера-Хартри и Гинзбурга-Ландау.

Цель и задачи исследования.

Цель диссертационной работы состоит в решении следующих основных задач.

1. Исследование вопросов разрешимости, разрушения, поведения при $t \to \infty$ решений задачи (1)-(2).

2. Исследование вопросов разрешимости и разрушения решений первой смешанной задачи с однородным краевым условием для уравнения (1).

3. Исследование разрешимости и разрушения решений задачи Коши для уравнения Шредингера-Хартри.

4. Исследование вопросов разрушения решений первой смешанной задачи с однородным граничным условием для нелинейного эволюционного уравнения типа Шредингера.

5. Исследование вопросов разрушения решений первой смешанной задачи с однородным граничным условием для нелинейного эволюционного уравнения типа Гинзбурга-Ландау-Шредингера.

6. Вычисление точной константы в неравенстве Гальярдо-Ниренберга-Соболева и получение априорной оценки точной константы.

7. Создание математического аппарата для исследования разрешимости задачи Коши и первой смешанной задачи с однородным краевым условием для уравнения (1) и для уравнения Шредингера-Хартри.

Методы исследования.

В диссертационной работе использованы методы математической физики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функциональных пространств, теорем вложения и функционального анализа, теории преобразования Фурье.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Вычислены наилучшие константы в неравенствах Соболева, и они применены к исследованию глобальной разрешимости и разрушению решений задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений Шредингера и Шредингера-Хартри.
2. Вычислены точные константы в некоторых неравенствах современной математической физики и исследована их внутренняя связь.
3. Предложен метод, позволяющий доказать отсутствие глобальных решений смешанной задачи для нелинейных эволюционных уравнений типа Гинзбурга-Ландау и Шредингера.

4. Предложен метод, позволяющий доказать глобальную разрешимость и разрушение решений задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений Шредингера и Шредингера –Хартри в сверхкритическом и критическом случаях.

Научная новизна исследования.

1. Доказано новое точное интегральное неравенство, которое применено к доказательству неравенства энтропии.
2. Доказано одно обобщение неравенства энтропии.
3. Установлена внутренняя связь между некоторыми фундаментальными неравенствами математической физики.
4. Вычислена точная константа в двух неравенствах Соболева.
5. Получены априорные оценки точной константы в одном неравенстве Гальярдо-Ниренберга-Соболева.
6. Предложено новое доказательство логарифмического неравенства Гросс-Соболева.
7. Оценено сверху время разрушения $t_{\max}$ задачи (1) при $\beta \le 0, \alpha > 0$.
8. Получены достаточные условия для глобальной разрешимости слабого обобщенного решения первой смешанной задачи для уравнения (1).
9. Для уравнения (1) при $p = 2, q = 2$ поставлена первая однородная смешанная задача и исследована гладкость обобщенного слабого решения и его поведение при $t \to \infty$.
10. Для задачи (1)-(2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ доказано, что ее гладкие решения разрушаются при $p \ge 4/n$ для некоторых начальных данных u_0 и получены оценки снизу скорости разрушения в некоторых нормах.
11. Для одной системы нелинейных эволюционных уравнений Шредингера поставлена задача Коши, исследована ее глобальная разрешимость и разрушение.
12. В ограниченной области приведена сверху оценка наилучшей константы в неравенствах Соболева и Стеклова. Эти оценки применены соответственно к доказательству отсутствия

нетривиальных обобщенных решений первой однородной краевой задачи для однородного стационарного уравнения Шредингера и собственных функций спектральной задачи для оператора Лапласа.

13. Исследована гладкость обобщенного решения первой смешанной задачи уравнения (1) при $\beta = 0, \alpha > 0$ в двумерной области и их разрушения для звездных областей.

14. Предложено одно обобщение уравнения (1) при $\beta = 0$ и для него рассмотрена однородная смешанная задача первого рода в ограниченной области многомерного евклидова пространства и доказано разрушение решений этой задачи.

15. Доказано разрушение и отсутствие глобальных решений смешанной задачи для одного нелинейного эволюционного уравнения типа Гиинзбурга-Ландау.

16. Доказано одно новое интерполяционное неравенство Соболева, которое применено к глобальной разрешимости задачи Коши для уравнения Шредингера-Хартри. Исследованы критический и сверхкритический случаи.

17. Доказано неравенство типа Трудингера в неограниченной области, которое применено к задаче (1), (2), при $\beta = 0$, любом $\alpha \neq 0$.

18. Получено достаточное условие для самоканализации решений задачи (1), (2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ с нелинейным членом $f\left(|u|^2\right)u$.

19. Исследованы глобальная разрешимость и разрушение решений задачи (1), (2) при $\beta = 0, \alpha > 0$ в сверхкритическом случае.

20. Исследовано разрушение решений первой смешанной задачи с однородным граничным условием для нелинейного эволюционного уравнения типа Гинзбурга-Ландау.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Диссертация носит теоретический и прикладной характер. В ней развита теория и методы решения задачи Коши и первой смешанной задачи для нелинейных эволюционных уравнений. Методы настоящей работы могут быть распространены на задачи, близкие по постановке к изучаемым в данной работе задач.

Результаты диссертации могут применены в научных исследованиях и при разработке численных методов решения задач математической физики.

Апробация и применение.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела "Дифференциальные уравнения" ИММ НАН Азербайджана (доктор физико-математических наук, профессор А.Б.Алиев), на семинарах отдела "Математический анализ" (чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. В.С. Гулиев), на семинарах отдела "Негармонический анализ" (чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. Б.Т.Билалов), на семинарах кафедры "Математическая физика" БГУ (академик НАН Азербайджана, проф. Ю.А.Мамедов), на общеинститутских семинарах НИИ "Прикладной математики" Бакинского Государственного Университета (академик НАН Азербайджана, проф. Ф.А.Алиев).

Личный вклад автора. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются личным вкладом автора.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 39 работах.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена в НИИ Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы – 439439 знаков (титульная страница – 425 знаков, содержание – 3537 знаков, введение – 68000 знаков, первая глава – 80000 знаков, вторая глава – 68000 знаков, третья глава –92000 знаков, четвертая глава-78000 знаков, пятая глава–48000 знаков, выводы –1477 знаков). Список используемой литературы состоит из 133 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, дается обзор работ, примыкающих к теме диссертации и излагается краткое содержание работы.

Первая глава посвящена доказательству некоторых интегральных неравенств и их применению. Эта глава состоит из шести параграфов.

В параграфе 1.1 доказывается одно интерполяционное неравенство и оно применяется к доказательству неравенства энтропии.

Для удобства дальнейшего изложения примем следующие обозначения: $\|u\|_p = \left\{ \int\limits_{R^n} |u(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, p \geq 1,$ норма в $L_p(R^n)$, индекс p в $\|\cdot\|_p$ будем опускать при $p = 2$, т.е. будем писать $\|\cdot\|$. Для заданного ρ из интервала $(0, \rho_0)$, где $\rho_0 = +\infty$ при $n = 1,2, \rho_0 = 4/(n-2)$ при $n \geq 3$, определим $\alpha = 0{,}5\rho n/(\rho + 2)$. Для заданного $\alpha \in (0,1)$ определим $\chi = \sqrt{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}$. Пусть

$$\forall \theta > 0 \quad \Gamma(\theta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\theta - 1} dt$$

гамма –функция Эйлера;

$$\forall \beta > 0, \gamma > 0 \quad B(\beta, \gamma) = \int\limits_0^1 t^{\beta - 1} (1-t)^{\gamma - 1} dt$$

бета-функция Эйлера, $\sigma_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$,

$$k_g(\alpha)=\chi^{-1}\left[0{,}5\sigma_n B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha}{n}}=\chi^{-1}\cdot\pi^{\alpha/2}\left[\frac{\Gamma\left[\frac{(n-n\alpha)}{2\alpha}\right]}{\Gamma\left(\frac{n}{2\alpha}\right)}\right]^{\alpha/n}. \qquad (3)$$

Лемма 1. *Пусть* $\rho,\alpha-$ *определенные выше числа,* $v(x)\in L_2(R^n),\ rv\in L_2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство:*

$$\|v\|_{(\rho+2)/(\rho+1)}\le k_g(\alpha)\|rv\|^{\alpha}\|v\|^{1-\alpha}, \qquad (4)$$

где $k_g(\alpha)$ *- константа, определенная формулой (3).*

Константа k_g *является точной: неравенство (4) переходит в равенство при* $v(x)=v_0(r)=\dfrac{\omega_1}{\left(\omega_2+\omega_3 r^2\right)^{1+1/\rho}}$, *где* $\omega_1,\omega_2,\omega_3-$ *произвольные положительные числа.*

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $u\in L_2(R^n), ru\in L_2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее неравенство энтропии:*

$$-\int_{R^n}\frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2}\ln\frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2}dx\le\frac{n}{2}\ln\left[\frac{2\pi\|ru\|^2}{n\|u\|^2}\right]. \qquad (5)$$

Неравенство (5) является точным: оно переходит в равенство при

$$u(x)=a\exp\left(-b\left|x-\overset{\circ}{x}\right|^2\right),$$

где $a,b-$ *произвольные положительные постоянные,* $\overset{\circ}{x}\in R^n$ *произвольно.*

В параграфе 1.2 рассматривается одно обобщение неравенства энтропии.

Пусть k - любое заданное положительное число. Пусть ρ заданное положительное число такое, что при $n-k\le 0$ ρ -

любое, а при $n-k>0$, $\rho<2k/(n-k)$. Положим $\alpha=n\rho/[k(\rho+2)]$, для заданного α определим $\chi=\sqrt{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}$.

Пусть $\forall\theta>0,\ \Gamma(\theta)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}t^{\theta-1}dt$, гамма – функция Эйлера;

$$\forall\beta>0,\ \forall\gamma>0,\ B(\beta,\gamma)=\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}dt,$$

бета-функция Эйлера; $\sigma_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$,

$$k_g(\alpha)=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\sigma_n}{k}B\left(\frac{n}{k},\frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)\right]^{\alpha k/2n}=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{k\alpha}\right)}\right]^{\alpha k/2n} \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть* k,ρ,α*-определенные выше числа,* $V(x)\in L_2(R^n),\ r^{k/2}V(x)\in L_2(R^n),\ r=|x|$. *Тогда справедливо следующее интегральное неравенство:*

$$\|V\|_{(\rho+2)/(\rho+1)}\le k_g(\alpha)\left\|r^{k/2}V\right\|^{\alpha}\|V\|^{1-\alpha}, \tag{7}$$

где $k_g(\alpha)$*-константа, определенная формулой (6). Константа* $k_g(\alpha)$ *является точной: неравенство (7) переходит в равенство при* $V(x)=V_0(r)=\omega_1/(\omega_2+\omega_3 r^k)^{1+1/\rho}$*, где* $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ *- произвольные положительные числа.*

С помощью леммы 2 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть* $u\in L_2(R^n),\ r^{k/2}u\in L_2(R^n)$*,* $\forall k>0$. *Тогда справедливо следующее неравенство энтропии:*

$$-\int\limits_{R^n}\frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2}\ln\left(\frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2}\right)dx\le\frac{n}{k}\ln\left[\frac{ek\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma(n/k)\right)^{k/n}\left\|r^{k/2}u\right\|^2}{n\|u\|^2}\right]. \tag{8}$$

Неравенство (8) является точным: оно переходит в равенство при

$$u(x) = u_0(r) = a\exp\left(-b\left|x - \overset{0}{x}\right|^k\right),$$

где a, b *-произвольные положительные постоянные,* $\overset{0}{x} \in R^n$ *произвольно.*

При $k = 2$ неравенство (8) переходит в известное неравенство энтропии.

В параграфе 1.3 излагаются некоторые замечания о фундаментальных неравенствах Гросс-Соболева, Хиршмана, Паули-Гейзенберга-Вейля и неравенстве энтропии.

В этом параграфе доказан n мерный аналог неравенства Хиршмана с точной константой в нем. Вычислена точная константа в неравенстве Паули-Гейзенберга-Вейля. Доказана равносильность двух форм логарифмического неравенства Гросса-Соболева и найдено новое доказательство этого неравенства на основе неравенств энтропии и Хиршмана. Доказано неравенство Паули-Гейзенберга-Вейля с точной константой в нем еще двумя другими способами, раскрывающими его внутреннюю связь с неравенствами энтропии, Гросса-Соболева и Хиршмана. Предложен один новый способ доказательства неравенства энтропии.

Перейдем к изложению полученных результатов. Известны следующие предложения.

Предложение 1[[1]]. *Пусть* $\forall f(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда справедливо логарифмическое неравенство Гросса-Соболева*

$$I(f) + n\left[1 + \ln\left(\sqrt{\pi\lambda}\right)\right] \le \lambda^2 \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}, \tag{9}$$

где $\lambda > 0$, $I(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^2}{\|f\|^2} \ln \frac{|f|^2}{\|f\|^2} dx.$

---

[1] F.B. Weissler, Logarithmic Sobolev inequalities for the heat-diffusion semigroup, Trans. Amer. Math. Soc., 237(1978), 255-269

Здесь и далее $H^1(\mathbb{R}^n) \equiv W_2^1(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева, $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 2 [2]. *Пусть* $\forall f(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса-Соболева:*

$$I(f) \le \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi e n} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2} \right). \tag{10}$$

Утверждение 1. *Неравенства (9) и (10) равносильны: из (9) следует (10) и из (10) следует (9).*

Утверждение 2. *Пусть* $\forall f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ $\hat{f}(\xi)$ – *Фурье-образ функции* $f(x)$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Тогда справедливо следующее неравенство Хиршмана:

$$I(f) + I(\hat{f}) \le -n \ln(\pi e) \ . \tag{11}$$

Неравенство (11) является точным: равенство в нем достигается тогда и только, когда $f = ae^{-b|x-\bar{x}|^2}, \forall a > 0$, $\forall b > 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 3. *Пусть* $\forall f(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $rf \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $r = |x|$. *Тогда справедливо следующее неравенство Паули-Гейзенбарга-Вейля:*

$$\|f\| \le \sqrt{\frac{2}{n}} \|\nabla f\|^{1/2} \|rf\|^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left\|\xi|\hat{f}\right\|^{1/2} \|rf\|^{1/2}. \tag{12}$$

Неравенство (12) является точным: равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда f является гауссовой функцией: $f = ae^{-b|x-\bar{x}|^2}$, $\forall a > 0$, $\forall b > 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

---

[2] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math., 97(1975), 1661-1683

Утверждение 4. *Пусть* $\forall f \in H^1(\mathbb{R}^n), rf \in L_2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда справедливо неравенство энтропии*

$$I(f) \geq -\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\pi e}{n}\frac{\|rf\|^2}{\|f\|^2}\right). \tag{13}$$

Неравенство (13) является точным: равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда f является гауссовой функцией: $f = ae^{-b|x-\bar{x}|^2}$, $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Справедливы следующие дедуктивные заключения:*

1. Из неравенств энтропии и Гросса-Соболева следует неравенство Паули-Гейзенберга-Вейля.

2. Из неравенств энтропии и Хиршмана вытекает неравенство Паули-Гейзенберга-Вейля.

3. Из неравенств энтропии и Хиршмана следует неравенство Гросса-Соболева.

В параграфе 1.4 доказывается одно неравенство типа Трудингера и оно применяется к исследованию вопроса единственности первой начально-краевой задачи для одного нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера.

Пусть $\Omega \subset R^2$ ограниченная или неограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера следующую начально-краевую задачу:

$$iu_t + \Delta u = g|u|^\rho u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{15}$$

$$u\big|_{\partial\Omega=0} = 0, \quad t > 0. \tag{16}$$

Здесь $g \in R^1 \setminus \{0\}, \rho \in R_+$ параметры уравнения (14), u_0 – заданная на Ω функция.

Под *слабым глобальным обобщенным решением* задачи (14)–(16) понимается следующее: функция $u \in C([0,T]; H^{-1}) \cap$

$L^\infty([0,T];\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$ удовлетворяет (14)–(16) в смысле распределения при $\forall T > 0$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *(о глобальном существовании).*

А) Пусть $g < 0, \rho \in (0,2), u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. *Тогда задача (14)–(16) имеет слабое глобальное решение.*

Б) Пусть $g < 0, \rho = 2$. *Далее, предположим, что начальная функция* $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *такова, что для нее выполняется условие*

$$|g| \cdot \|u_0\|^2 < \|\psi_0\|^2,$$

где $\psi_0 -$ *радиально-симметричная функция,* $\psi_0 = \psi_0(r), r = |x,|$ *которая является положительным решением следующей краевой задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dr^2}\psi_0(r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\psi_0}{dr} - \psi_0 + \psi_0^3 = 0, \quad 0 < r < \infty, \\ \psi_0^{'}(0) = 0, \psi_0(\infty) = 0, \psi_0(r) \in H^1(R^2) \cap C^2([0,\infty)). \end{cases}$$

Тогда задача (14)–(16) имеет слабое глобальное решение.

Замечание 1. При $g > 0$ задача (14)–(16) имеет слабое глобальное решение $\forall u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Теорема 5. Пусть $\Omega \subset R^2$ ограниченная или неограниченная область. Пусть $u(x)$-любая функция из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Тогда справедливо следующее неравенство :

$$\int_\Omega \left[\exp\left(\theta \frac{|u|^2}{\|\nabla u\|^2} \right) - 1 \right] dx \le C_T \frac{\|u\|^2}{\|\nabla u\|^2},$$

где

$$0<\theta<\frac{4\pi}{e}, \quad C_T=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{m!}\frac{1}{\pi^{m-1}}\frac{m^{3m-2}}{(2m-1)^{2m-1}}.$$

Теорема 6. *Слабое решение задачи (14)–(16) единственно.*

В параграфе 1.5 доказывается одно интерполяционное неравенство Соболева. Далее, предлагается новое доказательство логарифмического неравенства Гросс-Соболева на основе интерполяционного неравенства Соболева.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть* $u(x)\in H^1(R^n)$, *где* $H^1(R^n)\equiv W_2^1(R^n)$ *пространство Соболева. Пусть* ρ,α *определенные числа из параграфа 1.1,* $K_g(\alpha)$ *определено формулой (3). Тогда справедливо следующее мультипликативное неравенство Гальярдо -Ниренберга-Соболева*

$$\|u\|_{\rho+2}\le\overline{K_0}\|\nabla u\|^{\alpha}\|u\|^{1-\alpha}.$$

Здесь $\overline{K_0}=K_g(\alpha)K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right)$, *где* K_B *определяется следующим образом*

$$K_B(p)=\left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p'}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{n/2}, \ 1\le p\le 2, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \quad (17)$$

С помощью теоремы 6 доказывается следующая

Теорема 8. *Пусть* $u(x)\in H^1(R^n)$. *Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса-Соболева:*

$$\int_{R^n}\frac{|u|^2}{\|u\|^2}\ln\frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2}dx\le\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\|\nabla u\|^2}{\pi en\|u\|^2}\right). \quad (18)$$

Неравенство (18) является точным: оно переходит в равенство при

$$u(x)=a\exp(-b|x-\dot{x}|^2),$$

где a, b *- произвольные положительные постоянные,* $\dot{x} \in R^n$ *– произвольно*.

В параграфе 1.6 доказывается одно интерполяционное неравенство Соболева. Далее, предлагается одно обобщение логарифмического неравенства Соболева на основе интерполяционного неравенства Соболева.

Справедлива

Теорема 9. *Пусть* $\hat{U}(\xi)$ *преобразование Фурье функции* $U(x)$

$$\hat{U}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} e^{-i(x,\xi)} U(x)dx, \quad \xi \in R^n .$$

Пусть k, ρ, α *- определенные числа из параграфа 1.2,* $U(x) \in L_2(R^n)$, $|\xi|^{k/2} \hat{U}(\xi) \in L_2(R^n)$.

Тогда справедливо следующее мултипликативное неравенство Соболева

$$\|U\|_{\rho+2} \leq \overline{K}_0 \left\| \xi^{k/2} \hat{U}(\xi) \right\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha} .$$

Здесь $\overline{K}_0 = K_g(\alpha) K_B \left(\dfrac{\rho+2}{\rho+1} \right)$, *где* $K_g(\alpha)$ *− определено в параграфе 1.2 формулой (6), а* K_B *определено в параграфе 1.5 формулой (17).*

При $k = 2$ из теоремы 9 следует теорема 7 из параграфа 1.5, при $k = 4$ в силу соотношения $\left\| |\xi|^2 \hat{U} \right\| = \|\Delta U\|$ из теоремы 9 вытекает следующая

Теорема 10. *Пусть* $\rho \in (0, \infty)$ *при* $n \leq 4$ *, а при* $n > 4$ $\rho \in \left(0, \dfrac{8}{n-4} \right)$ $\alpha = n\rho / [4(\rho+2)]$. *Далее, пусть* $U(x) \in L_2(R^n)$, $\Delta U \in L_2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство Соболева*

$$\|U\|_{\rho+2} \le \overline{K}_0 \|\Delta U\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha}.$$

Здесь $\overline{K}_0 = K_g(\alpha) K_B\left(\dfrac{\rho+2}{\rho+1}\right)$,

где

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\sigma_n}{4} B\left(\frac{n}{4}, \frac{n(1-\alpha)}{4\alpha}\right)\right]^{2\alpha/n},$$

K_B *определено формулой (17).*

Теорема 11. *Пусть* k *произвольное положительное число. Далее, пусть* $U(x) \in L_2(R^n)$, $|\xi|^{k/2}\hat{U}(\xi) \in L_2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса-Соболева:*

$$\int_{R^n} \frac{|U|^2}{\|U\|^2} \ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right) dx \le \frac{n}{k} \ln\left[\frac{k\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n} \left\||\xi|^{k/2}\hat{U}\right\|}{n\pi^k e^{k-1}\|U\|^2}\right].$$

При $k = 2$ из теоремы 11 следует логарифмическое неравенство Гросс-Соболева, при $k = 4$ вытекает следующая

Теорема 12. *Пусть* $U(x) \in H^2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса-Соболева:*

$$\int_{R^n} \frac{|U|^2}{\|U\|^2} \ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right) dx \le \frac{n}{4} \ln\left[\frac{4\left(\frac{\sigma_n}{4}\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\right)^{4/n} \|\Delta U\|^2}{n\pi^4 e^3\|U\|^2}\right].$$

Вторая глава посвящена вычислению оптимальных констант в двух неравенствах Соболева и их применению. Эта глава состоит из четырех параграфов.

В параграфе 2.1 приводятся две оценки сверху наилучшей константы в одном интерполяционном неравенстве

Соболева и исследуется их точность. Для заданного ρ из интервала $(0, \rho_0)$, где $\rho_0 = \infty$ при $n = 1{,}2$, $\rho_0 = 4/(n-2)$ определим $\alpha = 0{,}5\rho n/(\rho + 2)$. Для наилучшей константы в неравенстве Соболева

$$\|U\|_{\rho+2} \le \overline{K}_0 \|\nabla U\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha} , \tag{19}$$

где K_0 – наилучшая константа, справедлива оценка

$$K_0 < \overline{K}_0 = K_g(\alpha) K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right).$$

Здесь $K_g(\alpha)$ определена формулой (3), K_B определена формулой (17).

Далее, приводится еще одна верхняя оценка для K_0

$$K_0 < \overline{\overline{K}}_0 = \frac{1}{\chi}\sqrt{K_B\left(\frac{\rho+2}{2}\right) K_B^2\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right) \|G\|_{\frac{\rho+2}{2}}} ,$$

где $\chi = \sqrt{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}$, $G(|x|) = K_{\frac{n-2}{2}}(|x|)/|x|^{\frac{n-2}{2}}$, $K_{\frac{n-2}{2}}(|x|)$

функция Макдональда, $n \ge 2$.

Теорема 13. *При* $\rho \ge 2$ *справедлива оценка* $\overline{\overline{K}}_0 \le \overline{K}_0$, *а при* $0 < \rho \le 2$ *– оценка* $\overline{K}_0 \le \overline{\overline{K}}_0$.

В параграфе 2.2 исследуется взаимосвязь между оптимальными константами в двух неравенствах Соболева.

Теорема 14. *Между оптимальной константой* K_0 *в неравенстве Соболева (19) и оптимальной константой* K_c *в следующем неравенстве Соболева*

$$\|u\|_{\rho+2} \le K_c \|u\|_{H^1(R^n)}$$

существует следующая связь

$$K_c = \chi K_0 .$$

В параграфе 2.3 вычислена оптимальная константа K_0 в неравенстве (19).

Теорема 15. *Для оптимальной константы* K_0 *в неравенстве Соболева (19) справедлива следующая формула*

$$K_0 = \frac{1}{\chi}\left(\frac{1-\alpha}{\|\psi_0\|^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}},$$

где $\psi_0(r)$ – основное состояние (положительное решение из класса $C^2([0,\infty)) \cap H^1(R^n)$), с минимальной нормой $\|\psi_0\|$) следующей краевой задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\psi_0}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\psi_0}{dr} - \psi_0 + \psi_0^{\rho+1} = 0, \\ &\frac{d\psi_0}{dr}\Big/_{r=0} = 0,\ \psi_0(\infty) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Далее, неравенство (19) применяется к исследованию разрешимости задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера.

$$\begin{gathered} iu_t + \Delta u = \omega |u|^\rho u \quad \text{в} \quad R^n \times R_+, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{gathered} \quad (21)$$

Здесь $\omega \in R_1, \rho \in R_+, u_0(x)$ – заданная в R^n функция. Примем следующие обозначения:

$$\|Du(t,\cdot)\|^2 = A(u(t)), B(u(t)) = 2(\rho+2)^{-1}\|u(t,\cdot)\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

$$E(u(t)) = A(u(t)) + \omega B(u(t)).$$

Далее, пусть выполнено условие на ρ, указанное в параграфе 2.1. В силу вложения $H^1(R^n) \subset L_{\rho+2}(R^n)$ отображение $u \to E(u)$ является непрерывным функционалом. Пусть

$\omega < 0, \eta = \rho n / 4 > 1, \lambda > 0, d = \inf \sup\limits_{\mu \ge 0} E(\mu^{n/2} u(\mu x)),\ u \in H^1(R^n),$

$\|u\| = \lambda;$ определим следующие множества

$$M_\lambda = \{u \mid u \in H^1(R^n), \|u\| = \lambda, B(u) < \theta A^\eta(u), E(u) < d\},$$

$$M_\lambda^+ = \{u \mid u \in H^1(R^n), \|u\| = \lambda,\ E(u) < d, A(u) > \eta B(u)\},$$

$$M_\lambda^- = \{u \mid u \in H^1(R^n), \|u\| = \lambda,\ E(u) < d, A(u) < \eta B(u)\},$$

$$V_\lambda^+ = \{u \mid u \in H^1(R^n), \|u\| = \lambda,\ E(\mu^{n/2} u(\mu x)) < d, \forall \mu \in [0,1]\},$$

$$V_\lambda^- = \{u \mid u \in H^1(R^n), \|u\| = \lambda,\ E(\mu^{n/2} u(\mu x)) < d, \forall \mu \in [1,\infty)\},$$

где $\theta = \lambda^{4\eta/n + 2(1-\eta)} / \|\psi_0\|^{4\eta/n}, \psi_0 -$ основное состояние уравнения (20).

Утверждение 5.

1) Справедлива формула $d = (1 - \eta^{-1})(1/\eta|\omega|\theta)^{1/(\eta-1)}$;

2) Имеют место равенства

$$M_\lambda = M_\lambda^+ \cup M_\lambda^-, V_\lambda^+ = M_\lambda^+, \quad V_\lambda^- = M_\lambda^-.$$

Положим $V^+ = \bigcup\limits_{\lambda > 0} V_\lambda^+, \quad V^- = \bigcup\limits_{\lambda > 0} V_\lambda^-.$

Через c будем обозначать различные константы, не зависящие от t и $u(x,t)$.

Теорема 16. *Пусть* $4/n < \rho < \rho_0$, *где* $\rho_0 = 4/(n-2)$ *при* $n \ge 3$ *(* $\rho_0 = \infty$ *при* $n = 1,2)$. *Пусть* $\omega < 0, V^+, V^- -$ *соответственно определенные выше множества устойчивости. Тогда:*

1) при $u_0 \in V^+$ *задача (21) имеет единственное глобальное решение* $u(t) \in C([0,\infty), H^1(R^n))$, *притом при* $\forall t \in [0,\infty)$ *справедливо включение* $u \in V^+$.

Для энтропии $\varepsilon(t) = -\int |u(x,t)|^2 \ln|u(x,t)| dx$ *нелинейной шредингеровской динамики (21) справедлива оценка*

$\varepsilon(t) \le c + c\ln(1+t),\ \forall t \in [0,\infty).$

2) Пусть $u \in V^-, ru_0 \in L_2(R^n)$. *Тогда задача (21) не имеет решения* $u(t) \in C\big([0,T), H^1(R^n)\big)$, *в целом, т.е. при* $\forall T > 0$.

Теорема 17. *Пусть* $\rho = 4/n, \omega < 0$. *Далее, пусть* $u_0 \in H^1(R^n)$, $ru_0 \in L_2(R^n)$ *и для начальной функции* $u_0(x)$ *выполнено условие* $|\omega|^{n/2}\|u_0\| < \|\psi_0\|$, *где* ψ_0 *– основное состояние уравнения (20). Тогда задача (21) имеет единственное решение* $u(t) \in C\big([0,\infty), H^1(R^n)\big)$ *в целом и для этого решения при* $\forall t \in [0,\infty)$ *справедлива оценка*

$$c(1+t)^{-n/n+2} \le \|u(t)\|_{(2n+4)/n} \le c(1+t)^{-n/(n+2)},$$

$$c + c\ln(1+t) \le \varepsilon(t) \le c + c\ln(1+t).$$

Замечание 2. При $n=1$ уравнение (20) решается точно, именно: $\psi_0 = \left[(\theta+1)/\theta\right]^{\theta/2} / ch^{\theta}(x/\theta), \theta = 2/\rho,$ тем самым $\|\psi_0\|^2 = 2^{2\theta-1}\left[(\theta+1)/\theta\right]^{\theta}\theta B(\theta,\theta),$ где $B(\theta,\theta)$ -бета –функция Эйлера.

В параграфе 2.4 получены некоторые достаточные условия для отсутствия нетривиальных обобщенных решений внутренней задачи Дирихле с однородным краевым условием для однородного уравнения типа Шредингера. С этой целью установлены некоторые верхние оценки точной константы в известном неравенстве Соболева в ограниченной области, а также в известном неравенстве Стеклова.

Пусть $\Omega \subset R^n$ -произвольная ограниченная открытая область с границей $\partial\Omega \subset C^{1,\mu}, - < \mu \le 1$ $\partial\Omega \subset C^{1,\mu}$, $0 < \mu \le 1$.

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Шредингера $\Delta + q(x)$

$$\Delta u + q(x)u = 0 \ \text{в} \ \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{22}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $q(x)$ -заданная функция в Ω. Задачу (22) будем рассматривать в следующем обобщенном смысле.

Определение 1. Функция $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (22), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} + q(x) u(x) \psi(x) \right] dx = 0$$

для любой функции $\psi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Примем следующие обозначения: Для заданного ρ из интервала $(0, \rho_0)$, где $\rho_0 = \infty$ при $n = 1,2$, $\rho_0 = \dfrac{4}{n-2}$ при $n \geq 3$, определим $\alpha = 0.5 \dfrac{\rho n}{\rho + 2}$.

Положим $\overline{K}_0 = K_g K_B \left(\dfrac{\rho + 2}{\rho + 1} \right)$, где $K_g(\alpha)$ определено формулой (3), K_B – определено формулой (17). Далее, $\overline{K}_c(\Omega, \alpha) = \overline{K}_0^{1/\alpha}(\alpha) |\Omega|^{1-\alpha/n}$, $|\Omega| = mes\,\Omega$.

Справедлива следующие теоремы.

Теорема 18. Пусть ρ**-**определенное выше число, $q(x) \neq const$ - заданная в Ω функция из класса $L_{(\rho+2)/\rho}(\Omega)$. Далее пусть

$$\Lambda = \inf J(v), \ J(v) = \frac{\|\nabla v\|}{\|v\|_{\rho+2}}, \ v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)/\{0\}.$$

Пусть $q(x)$ такая, что

$$\|q\|_{(\rho+2)/\rho} < \Lambda^2 . \tag{23}$$

Тогда задача (22) не имеет нетривиального обобщенного решения в классе $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Теорема 19. Пусть ρ и α-определенные выше числа, $q(x) \neq const$ - заданная в Ω функция из класса $L_{(\rho+2)/\rho}(\Omega)$. Пусть $q(x)$ такая, что для нормы $\|q\|_{(\rho+2)/\rho}$ выполняется условие

$$\|q\|_{(\rho+2)/\rho} < \Lambda_*^2; \qquad (24)$$

здесь $\Lambda_* = \dfrac{1}{\overline{k}_c}$.

Тогда задача (22) не имеет нетривиального обобщенного решения в классе $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Замечание 3. Условие (23) по сравнению с условием (24) является более точным, так как $\Lambda_* < \Lambda$. Ясно, что условие (24) является более практичным с точки зрения вычисления, чем условие (23). В теоремах 18 и 19 если $\|q\|_{(\rho+2)/\rho}$ заменить на $\|q^*\|_{(\rho+2)/\rho}$, где $q^* = \max(0, q(x))$, то получим лучшую оценку. Ясно, что если $q(x) \leq 0$ п.в. в Ω, то задача (22) не имеет решения в классе $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

При доказательстве теорем 18 и 19 используется следующая

Теорема 20. Пусть ρ -определенное выше число, $\nu(x)$ - любая функция из класса $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Тогда справедливо следующее неравенство Соболева: $\|\nu\|_{\rho+2} \leq \overline{K}_C \|\nabla \nu\|$.

Глава III посвящена разрешимости задач для нелинейных эволюционных уравнений Шредингера и разрушению, самоканализации их решений. Эта глава состоит из шести параграфов.

В 3.1 рассматривается смешанная задача для эволюционного кубического уравнения Шредингера с кубическим диссипативным членом.

Пусть $\Omega \subset R^2$ - ограниченная или неограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + i\beta|u|^2 u = \Delta u + \alpha|u|^2 u, \;\; x \in \Omega, t > 0, \tag{25}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \;\; x \in \Omega, \tag{26}$$

$$u = 0, \;\; на \;\; \partial\Omega, \;\; t \geq 0. \tag{27}$$

Здесь $\{\alpha, \beta\} \in R^1$ - параметры уравнения (25), u_0 - заданная на Ω функция.

Положим $H := L_2(\Omega; C)$; $H_0^1 := \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega; C)$, $H^2 := W_2^2(\Omega; C)$ - гильбертовы пространства Соболева; $B = H^2 \cap H_0^1$.

Пусть $\Psi_0(r), r = |x|$ - положительная, монотонно убывающая функция из класса $C^2[0, \infty)$ с конечной нормой $\|\Psi_0\|_{H^1}$, которая является единственным решением (основным состоянием) следующей нелинейной краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_0''(r) + \frac{1}{r}\Psi_0'(r) - \Psi_0(r) + \Psi_0^3(r) = 0, \; 0 < r < \infty, \\ &\Psi_0'(0) = 0, \; \Psi_0(\infty) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Справедлива следующая теорема о глобальной разрешимости задачи (25)-(27).

Теорема 21. *Пусть* $\beta > 0$, $\alpha, u_0 \in B$ *такие, что выполнено одно из условий* $\left(\alpha - \sqrt{3}\beta\right)\|u_0\|^2 < P_k$, $k = 1,2$, *где*

$$P_1 = \|\psi_0\|^2, \; P_2 = \frac{27\pi}{8},$$

ψ_0 *− основное состояние задачи (28). При* $\alpha < 0$ u_0 *любая из* B. *Тогда задача (25)-(27) имеет глобальное сильное решение,* *притом единственное,* $u(x,t)$ *из класса* $C^0([0,\infty);B)\cap C^1([0,\infty);H)$.

В параграфе 3.2 рассматривается вопрос о разрешимости в целом и вопрос о гладкости, асимптотике при $t\to\infty$ смешанной задачи

$$iu_t+i\beta|u|^q u=\Delta u+\alpha|u|^p u,\ \ (x,t)\in Q=G\times[0,T]; \tag{29}$$

$$u\big|_{s=0}=0,\quad S=\partial G\times[0,T]; \tag{30}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in G. \tag{31}$$

Здесь $G-$ произвольная ограниченная область $n-$мерного пространства R^n с гладкой границей, $\beta\in R_+,\alpha\in R,$ $q,p\in R_+,u_0-$заданная в R^n функция.

Справедлива следующая

Теорема 22. *Пусть* $\beta>0,p>0,q>0,\alpha<0$ *(при* $\alpha>0$ *дополнительно предположим, что* $q>p$ *).*

Пусть $u_0\in \overset{\circ}{H}{}^1(G)\cap L_{\nu+2}(G)$ *где* $\nu=\max(p,q)$. *Тогда существует единственное решение задачи (29)-(31) такое, что*

$$u\in L_\infty\left(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(G)\cap L_{\nu+2}(G)\right)\cap L_{p+q+2}(Q),$$

$$u_t\in L_\infty\left(0,T;H^{-1}(G)+L_{\frac{\nu+2}{\nu+1}}(G)\right).$$

В параграфе 3.3 рассматривается вопрос о самоканализации решений нелинейного эволюционного уравнения Шредингера.

Пусть для нелинейного эволюционного уравнения Шредингера поставлена задача Коши:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f\left(|u|^2\right)u\quad в\quad R^n\times R_+, \tag{32}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x)\quad в\quad R^n. \tag{33}$$

Здесь $f(s)-$ заданная функция на $[0,\infty)$ u_0-заданная функция в R^n.

Будем принимать стандартные обозначения:

$H(R^n)=L^2(R^n), H^1(R^n)=W_2^1(R^n)-$комплексные гильбертовые пространства Соболева; $\|\cdot\|-$ норма в $L_2(R^n)$, $\|\cdot\|_p-$ норма в $L_p(R^n)$, $p\geq 1$.

Положим

$$A(t)=A(u(t))=\|\nabla u(\cdot,t)\|^2,$$

$E(t)=E(u(t))=A(t)-B(t),$ где $B(t)=\int\limits_{R^n}F(|u(x,t)|^2)dx,$

где $F(s)=\int\limits_0^S f(\tau)d\tau;\ a(t)=a(u(t))=\|u(\cdot,t)\|^2,$

$$P_k(t)=P_k(u(t))=\frac{i}{2}\int\limits_{R^n}\left(u\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_k}-\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx,\quad k=1,2,...,n.$$

Определение 2. *Будем говорить, что глобальное решение $u(x,t)$ задачи (32), (33) из класса*

$$C^0([0,+\infty);H^1(R^n))\cap C^1([0,+\infty);H^{-1}(R^n))$$

самоканализируется, если при $\forall t\in[0,+\infty)$ для него выполнена следующая двусторонняя оценка: $const\leq\|u(\cdot,t)\|_4\leq const$, где через const обозначены различные положительные постоянные, не зависящие от t и $u(x,t)$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 23. *(о глобальном существовании).*

Пусть $u_0\in H^1(R^n)$, $f(0)=0$, $f(s)\in C^2([0;\infty))$ на интервале $[0;+\infty)$ положительная, возрастающая, выпуклая вниз функция, т.е. $f(s)\geq 0$, $f'(s)>0$, $f''(s)<0$ $\forall s\in[0,+\infty)$. Тогда при $n=1$ задача (32), (33) имеет глобальное решение из класса

$$C^0([0,+\infty);H^1(R^n))\cap C^1([0,+\infty);H^{-1}(R^n)).$$

При $n=2$ сказанное остается в силе при выполнении условия

$$\|u_0\|^2 < \frac{27\pi}{16f'(0)}.$$

Теорема 24. *(о самоканализации). Пусть выполнены все условия теоремы 23. Далее, пусть начальная функция u_0 такая, что выполняется неравенство $E(u_0) < \frac{P^2(u_0)}{a(u_0)}$,*

где $P^2(u_0) = \sum_{k=1}^{n} P_k^2(u_0)$.

Тогда решение задачи (32), (33) самоканализируется.

В параграфе 3.4 рассматривается задача Коши для кубического эволюционного уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^2 u \quad в \quad R^2 \times R_+, \tag{34}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad в \quad R^2. \tag{35}$$

Доказано, что решения задачи (34), (35) при некоторых начальных данных разрушаются через конечное время, точное значение которого оценивается сверху.

В параграфе 3.5 рассматривается задача Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^\rho u, \quad x \in R^n,\ t > 0, \tag{36}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в } R^n \tag{37}$$

Здесь $\rho > 0$, $n \le 3$, $u_0(x)$ – заданная функция в R^n.

Доказано, что при $\rho \ge 4/n$ и некоторых начальных данных решения задачи (36), (37) разрушаются через конечное время, точное значение которого оценивается сверху. Кроме того, получены оценки снизу скорости разрушения решений в некоторых нормах.

В параграфе 3.6 рассматривается вопрос о существовании в целом, вопрос об асимптотике при $t \to \infty$ и вопрос о разрушении решения задачи

$$iu_t + \Delta u = kf\left(|u|^2\right)u \quad \text{в} \quad R^n \times R_+,$$
$$u(0,x) = u_0(x);$$

здесь $k \in R^1$, u_0 – заданная в R^n функция.

Четвертая глава посвящена исследованию вопроса об отсутствии глобальных решений первой смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения типа Гинзбурга-Ландау-Шредингера и вопроса о разрешимости и разрушении решений задачи Коши для одной системы нелинейных эволюционных уравнений Шредингера. Эта глава состоит из пяти параграфов.

В параграфе 4.1 исследуется вопрос об отсутствии глобальных решений смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения типа Шредингера. Пусть $\Omega \subset R^n$ – произвольная ограниченная область с гладкой границей. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_t = i\beta\Delta u + f(u, \nabla u), \; x \in \Omega, \; t > 0, \tag{38}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; x \in \overline{\Omega}, \; u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \tag{39}$$

в которой

$$f(u, \nabla u) \geq \omega_1 |u|^{1+\gamma} + \omega_2 |\nabla u|^{1+\mu}, \tag{40}$$

где $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0, \; \omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0, \gamma > 0, \mu > 0, \beta \neq 0.$

Доказано, что при «достаточно больших» значениях начальных данных отсутствуют глобальные решения задачи (38)-(40).

В параграфе 4.2 исследуется вопрос о разрушении решений первой смешанной задачи для одного класса нелинейного эволюционного уравнения Гинзбурга-Ландау – Шредингера.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_t = (\alpha + i\beta)\Delta u + f(u) + (\eta + i\mu)u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{41}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{42}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0, \quad t\geq 0. \tag{43}$$

Здесь $f(u)=(\omega+i\gamma)|u|^{1+p}, \{\alpha,\beta,\omega,\gamma,\eta,\mu\}\in R,\ p\in R_+,$ $\alpha^2+\beta^2\neq 0, \quad \omega^2+\gamma^2\neq 0.$

Доказано, что решения задачи (41)-(43) при достаточно «больших значениях» начальных данных разрушаются через конечное время, оцениваемое сверху.

В параграфе 4.3 исследуется вопрос об отсутствии глобальных решений первой смешанной задачи для одного нелинейного эволюционного уравнения типа Гинзбурга-Ландау.

Пусть $\Omega\subset R^n$ – произвольная ограниченная область с гладкой границей. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_t=(\alpha+i\beta)\Delta u+f(u,\nabla u),\ x\in\Omega, t>0,$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\overline{\Omega},\ u(x,t)/_{\partial\Omega}=0, t\geq 0,$$

здесь

$$f(u,\nabla u)\geq \omega_1|u|^{1+\gamma}+\omega_2|\nabla u|^{1+\mu},$$

где $\omega_1\geq 0, \omega_2\geq 0,\ \omega_1^2+\omega_2^2\neq 0, \gamma>0, \mu>0, \beta\neq 0, \alpha\in R.$

Доказано, что при “достаточно больших начальных данных” отсутствуют глобальные решения исследуемой задачи.

В параграфе 4.4 рассматривается смешанная задача для нелинейного эволюционного уравнения Шредингера в двумерной области. Пусть $\Omega\subset R^2$ ограниченная область с достаточной гладкой границей Г. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+|u|^{\rho}u,\ x\in\Omega,\ t>0, \tag{44}$$

$$u(x,t)=0,\ x\in\Gamma,\ t\geq 0, \tag{45}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega. \tag{46}$$

Здесь $\rho>0, u_0(x)$ заданная на Ω функция. Для задачи (44)-(46) исследуется гладкость решений и их разрушение в звездной области Ω.

Задача (44)-(46) имеет глобальное решение в пространстве функций

$$u(x,t) \in C\left([0,\infty); \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)\right) \cap C^1([0,\infty); L_2(\Omega))$$

при $\rho < 2$ для любой

$$u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

В случае $\rho = 2$ сказанное остается в силе при $\|u_0\|^2 < \frac{27\pi}{8}$.

Далее при $\rho \geq 2$ выделяется множество начальных данных u_0 из пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$которых решение исследуемой задачи разрушается за конечное время $t_{\max}$, оцениваемое сверху. Точнее пусть начальная функция $u_0(x)$ такая, что $E_0 = \|\nabla u_0\|^2 - \frac{2}{\rho+2}\|u_0\|_{\rho+2}^{\rho+2} < 0$ тогда решение задача (44)-(46)

$$u(x,t) \in \left(([0,t_{\max}); W_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)\right) \cap C^1([0,t_{\max}); L_2(\Omega)$$

разрушается через конечное время $t_{\max}$, оцениваемое сверху определенным числом зависящим от $u_0(x)$ для звездной области.

Область Ω называется звездной если луч выходящий из любой внутренней точки области Ω пересекает её границу $\partial\Omega$ в одной точке.

В параграфе 4.5 рассматриваются вопрос о существовании в целом, вопрос о поведении при $t \to +\infty$ и вопрос о разрушении решения задачи Коши для одной системы нелинейных эволюционных уравнений Шредингера

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \theta_1 \Delta u_1 = \gamma_1 \bar{u}_2 u_3,$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}+\theta_2\Delta u_2=\gamma_2\overline{u}_1 u_3, \text{в } \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+, \tag{47}$$

$$i\frac{\partial u_3}{\partial t}+\theta_3\Delta u_3=\gamma_3 u_1 u_2,$$

$$u_m(0,t)=u_{0m}(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \; m=1,2,3. \tag{48}$$

Здесь $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))-$ неизвестная комплекснозначная вектор-функция; $u_{0m}(x), m=1,2,3-$ заданные в $\mathbb{R}^n$ функции; $\theta_m,\gamma_m, m=1,2,3-$ заданные, отличные от нуля действительные постоянные (параметры уравнения (47)), т.е. $\theta_m,\gamma_m\in\mathbb{R}^1\setminus\{0\}, m=1,2,3;$ черта над $\overline{u}_m(x,t)$ означает комплексное сопряжение $u_m(x,t)$.

В дальнейшем будем предполагать, что параметры $\theta_m,\gamma_m, m=1,2,3,$ уравнения (47) удовлетворяют условиям

$$\gamma_1+\gamma_2=\gamma_3, \tag{49}$$

$$\frac{\omega_1}{|\omega_1|}=\frac{\omega_2}{|\omega_2|}=\frac{\omega_3}{|\omega_3|}, \tag{50}$$

где $\omega_m=\dfrac{\theta_m}{\gamma_m}$, т.е. $sign(\theta_m\gamma_m)=const, m=1,2,3.$

Справедлива следующая

Теорема 25. *(о глобальной разрешимости). Пусть параметры уравнения (47) удовлетворяют условиям (49), (50) и* $n<4$*.Пусть* $u_{0m}\in H^1$, $m=1,2,3.$

Тогда задача (47), (48) имеет единственное глобальное решение такое, что

$$u_m(x,t)\in C^0\left([0,+\infty);H^1\right)\cap C^1\left([0,+\infty);H^{-1}\right),\; m=1,2,3.$$

Глава пятая посвящена к исследованию разрешимости и разрушения решений задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шредингера-Хартри. Эта глава состоит из трех параграфов. В параграфе 5.1 доказано одно интерполяционное неравенство, содержащее свертку.

Справедлива следующая

Теорема 26. *Пусть* $0<\lambda<\min(4,n),\ \forall V(x)\in H^1(R^n),$ *тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство:*

$$\sqrt[4]{Q(V)}\le \overline{K}_0\|\nabla V\|^{\theta}\cdot\|V\|^{1-\theta}; \tag{51}$$

здесь

$$Q(V)=\int\limits_{R^n}\int\limits_{r^n}\frac{|V|^2(x)|V|^2(y)}{|x-y|^{\lambda}}dxdy,\quad \theta=\frac{\lambda}{4};$$

$$\overline{K}_0=\sqrt[4]{K_L}K_W K_Б,$$

$$K_L=\pi^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\Gamma(n/2-\lambda/2)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n-\lambda/2)\Gamma(n)}^{-1+\frac{\lambda}{n}};$$

$$K_W=\chi_{\theta}^{-1}(\sigma_n B/2)^{\frac{\theta}{n}},\sigma_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)},$$

$B=B\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{n(1-\theta)}{2\theta}\right)$ *– бета–функция,* $\Gamma(\cdot)$ *-гамма-функция Эйлера*

$\chi_{\theta}=\sqrt{\theta^{\theta}(1-\theta)^{1-\theta}};$

$$K_B(p,p')=\left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p'}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{n}{2}},\quad p=\frac{4n}{2n-\lambda},\quad p'=\frac{4n}{2n+\lambda}.$$

Далее исследуем вопрос о вычислении точной константы в неравенстве (51). Пусть $0<\lambda<\min(4,n),\forall\theta=\dfrac{\lambda}{4},\ V(x)\in H^1(R^n).$

Введем в рассмотрение функционал

$$R_0(V)=\frac{\|\nabla V\|^{\theta}\cdot\|V\|^{1-\theta}}{\sqrt[4]{Q(V)}} \tag{52}$$

и рассмотрим вопрос о его минимизации по всему пространству $H^1(R^n),V\ne 0.$ Так как отображение: $R_0(V)\to R,$ является непрерывным и функционал $R_0(V)$ ограничен снизу в силу неравенства (51), следовательно, infimum существует. Положим

$$\frac{1}{K_0} = \Lambda = \inf\{R_0(V) \mid V \in H^1, V \neq 0\}, \qquad (53)$$

Пусть W_r – подпространство $H^1(R^n)$, состоящее из функций $V(x) \in H^1(R^n)$, которые зависят лишь от r, положительны и монотонно убывая, стремятся к нулю $r \to +\infty$. Справедлива следующая.

Теорема 27. *Пусть* $0 < \lambda < \min(4, n)$, $\forall \theta = \dfrac{\lambda}{4}$

$\forall V(x) \in H^1(R^n)$.

Далее пусть $R_0(V)$ *определяется соотношением (52),* K_0 *- соотношением (53). Тогда:*

1) Функционал $R_0(V)$ *достигает своего infimuta на функции* $\psi_0(r) \in W_r \cap C^2[0,\infty]$, *которая является положительным решением следующей нелинейной краевой задачи:*

$$\psi_0'' + \frac{n-1}{r}\psi_0' - \psi_0 = \psi_0 \int \frac{\psi_0^2(\xi)d\xi}{|x-\xi|^\lambda}, \qquad (54)$$

$$\psi_0'(0) = 0, \quad \psi_0(+\infty) = 0;$$

2) для решения $\psi_0(r) \in W_r \cap C^2[0,\infty)$ *задачи (54) справедливо соотношение*

$$\|\nabla \psi_0\|^2 = \theta Q(\psi_0) = \frac{\theta\|\psi_0\|^2}{1-\theta} \geq \frac{\theta}{C_B^2} K_L \|G\|^2_{\frac{2n}{2n-\lambda}},$$

где

$$C_B = K_B\left(\frac{2n}{2n-\lambda}, \frac{2n}{2n+\lambda}\right) K_B^2\left(\frac{4n}{2n+\lambda}, \frac{4n}{2n-\lambda}\right),$$

$$G(r) = \frac{K_{(n-2)/2}(r)}{r^{(n-2)/2}}, \quad n \geq 2,$$

$K_{(n-2)/2}$*-функция Макдонольда,* $G(r)$*-ядро интегрального оператора* $(I-\Delta)^{-1}$, *для которого при* $n \geq 2$ *существуют различные интегральные представления, в том числе использованное выше. Как известно, при* $n = 1{,}3$ $G(r)$ *выражается через элементарные функции;*

3) оптимальная константа K_0 *определяется формулой*

$$K_0 = \chi_\theta^{-1}\left[\frac{1-\theta}{\|\psi_0\|^2}\right]^{\frac{1}{4}};$$

4) равенство в интерполяционном неравенстве (51) имеет место тогда и только тогда когда

$$V = \gamma\psi_0\left(\beta|x-\mu|\right), \gamma > 0, \quad \beta \in R^1 - \{0\}, \mu \in R^n.$$

В параграфе 5.2 рассматривается задача Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шредингера-Хартри:

$$iu_t + \Delta u = \omega f(|u|)u \quad \textit{в} \quad R^n \times R_+, \tag{55}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \qquad \textit{в} \quad R^n, \tag{56}$$

здесь

$$f(|u|) = \int |x-y|^{-\lambda}|u(y,t)|^2\, dy, \tag{57}$$

где ω, λ -действительные положительные числа (параметры уравнения (55)), а u_0 − заданная в R^n функция.

Обозначения. $H := L_2(R^n), H^1 : W_2^1(R^n)$ − гильбертово пространство Соболева, $H^{-1} = (H^1)^*$ − сопряженное пространство $H^1; H_\Sigma = \{v \mid v \in H;\ rv \in H,$ где $r = |x|; \nabla v \in H\}$; $\|\cdot\|$ − норма в H, $\|\cdot\|_p$ − норма в $L_p(R^n),\ p \geq 1;$ $|||\cdot|||$ − норма в H^1, $\rho \in (0, \rho_0), \rho_0 = \infty$ при $n = 1{,}2,$ $\rho_0 = \dfrac{4}{n-2}, n \geq 3$ $\alpha = 0{,}5\rho n/(2+\rho)$, $\theta = \lambda/4;$ $\eta = \lambda/2$, $\lambda_0 = \min(4, n)$;

$Q(t)=\frac{1}{2}\iint|x-y|^{-\lambda}|u(x,t)|^2|u(y,t)|^2\,dxdy$.

При отталкивающем взаимодействии, т.е. при $\omega>0$ доказана следующая

Теорема 28. *(о глобальной разрешимости и затухании) Пусть* $\omega>0,\ 0<\lambda<\lambda_0,\ u_0\in H_{\sum}$ *.Тогда задача (55)-(57) имеет единственное глобальное решение* $C^0\left([0,\infty);H_{\sum}\right)$ *и при* $\forall t\in[0,\infty)$ *справедливы следующее оценки:*

1) *при* $\forall n: c(1+t)^{-\lambda}\le Q(t)\le c(1+t)^{-\lambda}$;

2) *при* $n\ge 3,\quad 2\le\lambda<\lambda_0: c(1+t)^{-\alpha}\le\|u(t)\|_{\rho+2}\le c(1+t)^{-\alpha}$,

$\|u(\cdot,t)\|_{\Omega}\le c(1+t)^{-\max(\alpha,\theta)},\quad \forall\Omega\subset R^n, mes\Omega<+\infty$;

3) *при* $0<\lambda<\min(2,n): c(1+t)^{-\alpha}\le\|u(\cdot,t)\|_{\rho+2}\le c(1+t)^{-\alpha\eta}$,

$\|u(\cdot,t)\|_{\Omega}\le c(1+t)^{\max(\theta,\alpha\eta)},\forall\Omega\subset R^n,\ mes\Omega<+\infty.$

4) $Q_R(t)\ge c(1+t)^{-\lambda},\|u(\cdot,t)\|_{L^{\rho+2}(|x|\le R)}\ge c(1+t)^{-\alpha}$;

5) $\varliminf_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(|x|\le ct)}\ge c,\quad \varliminf_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(ct\le|x|\le ct)}\ge c$;

6) $\varliminf_{t\to+\infty}\left\lfloor t^{\alpha}\|u(\cdot,t)\|_{L^{\rho+2}(|x|\le ct)}\right\rfloor\ge c,\quad \varliminf_{t\to+\infty}\left\lfloor t^{\alpha}\|u(\cdot,t)\|_{L^{\rho+2}(ct\le|x|\le ct)}\right\rfloor\ge c$;

7) $\varliminf_{t\to+\infty}\left[t^{\lambda}Q_{R_1}(t)\right]\ge c,\quad \varliminf_{t\to+\infty}\left[t^{\lambda}Q_{R_1,R_2}(t)\right]\ge c$;

Здесь и далее через с будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от $t,u(x,t)$, *а зависящие лишь от* $u_0,|\omega|,\lambda,n$; *в определении* $Q_R(t),Q_{R_1}(t),Q_{R_1,R_2}(t)-$ *интегрирование по* x *и* y *в интеграле* $\iint|x-y|^{-\lambda}|u(x,t)|^2|u(y,t)|^2\,dxdy$ *проводится соответственно по областям:*

$$\Omega_R=\left\{\{x,y\}\in R^n,|x|\le R,|y|\le R\right\},\ \Omega_{R_1}\equiv\Omega_R \text{ с } R=R_1=ct,$$

$$\Omega_{R_1R_2}=\left\{\{x,y\}\in R^n,R_1\le|x|\le R_2,R_1\le|y|\le R_2,R_1=ct,R_2=ct\right\}.$$

Рассмотрим случай $\omega < 0$, т.е. притягивающее взаимодействие. Справедлива

Теорема 29. *(о глобальной разрешимости). Пусть* $\omega < 0$, $0 < \lambda < \min(2, n), u_0 \in H^1$. *Тогда задача (55)-(57) имеет единственное глобальное решение* $u(x,t)$ *в классе функций* $C^0([0,\infty); H^1)$.

В параграфе 5.3 исследуется задача Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шредингера-Хартри в критическом случае

$$iu_t + \Delta u = \omega f(|u|)u \quad в \quad R^n \times R_+, \tag{58}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \quad в \quad R^n, \tag{59}$$

здесь

$$f(|u|) = \int |x-y|^{-\lambda} |u(y,t)|^2 \, dy, \tag{60}$$

где $\omega \in R^1 \setminus \{0\}, \lambda -$ действительное положительное число, а $u_0 -$ заданная в R^n функция.

Задача (58)-(60) изучается в критическом значении параметра $\lambda = 2$ в случае $\omega < 0$, $n \ge 3$.

Обозначения. $H^1 := W_2^1(R^n) -$ гильбертово пространство Соболева, $H^{-1} = (H^1)^* -$ сопряженное пространство к H^1; $H_{\sum} = \{v \mid v \in L_2(R^n);\ rv \in L_2(R^n),$ где $r = |x|; \nabla v \in L_2(R^n)\}$; $\|\cdot\| -$ норма в $L_2(R^n), \|\cdot\|_p -$ норма в $L_p(R^n), p \ge 1; |||\cdot||| -$ норма в H^1.

Определение 3. *Стационарными решениями уравнения (58) при* $\omega < 0$ *с нелинейным членом (60) будем называть решения вида* $u(x,t) = e^{ikt}\psi(x)$ *где* $k \in R_+, \psi(x)$ *(действительная функция) есть решение из класса* H^1 *следующей задачи:*

$$\begin{gathered} \Delta\psi - k\psi = \omega\psi \int |x-y|^{-\lambda} |\psi(y)|^2 \, dy, \quad x \in R^n, \\ \psi(x) \to 0 \quad при \quad |x| \to \infty. \end{gathered} \tag{61}$$

Определение 4. *Положительное, радиально-симметричное* $(n \ge 2)$ *решение* $\psi(r)$ *задачи (61) из класса*

$C^2([0,\infty))$ *с конечной нормой* $\|\psi(r)\|$ *будем обозначать через* $\psi_0(r)$ *и называть основным состоянием.*

Для основного состояния ψ_0 уравнения (61) при $k=1, \omega=-1, \lambda=2, n\ge 3$ справедливо соотношение

$$\int|\nabla\psi_0|^2dx=\frac{1}{2}\iint\frac{|\psi_0(x)|^2|\psi_0(y)|^2}{|x-y|^2}dxdy=\int|\psi_0|^2dx.$$

Определим для $\forall v(x)\in H^1(R^n)$ функционалы

$$R(v)=\int|\nabla v|^2dx-\frac{1}{2}\iint\frac{|v(x)|^2|v(y)|^2}{|x-y|^2}dxdy$$

и множество

$$M=\{v\,|\,v\in H^1(R^n)/\{0\},R(v)=0\}.$$

Справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть* $\psi_0(x)-$ *есть основное состояние уравнения (61) при* $k=1, \omega=-1, \lambda=2, n\ge 3$. *Тогда ,*

$$S(\psi_0)=\min_{v\in M}S(v),\ \textit{где}\ S(v)=\int|\nabla v(x)|^2dx.$$

В критическом случае доказаны следующие теоремы

Не умаляя общности, в дальнейшем будем полагать $\omega=-1$.

Теорема 30. *Пусть* $\lambda=2, n\ge 3, \omega=-1,\ \lambda=2,\ n\ge 3,$ $u_0\in H^1(R^n)\setminus\{0\},\ ru_0\in L_2(R^n)$ *и удовлетворяет условию* $E(u_0)<0.$

Тогда решение $u(t)$ *задачи (58)-(60) разрушается через конечное время* $t_{\max}$ *, оцениваемое сверху определенных числом, зависящим от начальной функции* u_0.

Теорема 31. *Пусть* $\lambda=2,\quad n\ge 3, \omega=-1,\ \forall u_0\in H^1(R^n)$ *удовлетворяет условию*

$$J(u_0)=\int|\nabla u_0|^2dx+\int|u_0|^2dx-\frac{1}{2}\iint\frac{|u_0(x)|^2|u_0(y)|^2}{|x-y|^2}dxdy<S(\psi_0).$$

Тогда :

а) если u_0 *удовлетворяет условию* $R(u_0) < 0$ *и* $ru_0 \in L^2(R^n)$, *то решение* $u(t)$ *задачи (58)-(60) разрушается через конечное время* $t_{\max}$, *оцениваемое сверху некоторым числом, зависящим от* u_0 *;*

б) если

$$R(u_0) > 0,$$

то решение задачи (58)-(60) существует глобально:

$$u(x,t) \in C([0,\infty); H^1(R^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{-1}(R^n)).$$

Теорема 32. *Пусть* $\lambda = 2,\quad n \geq 3, \omega = -1,\ \forall u_0 \in H^1(R^n)$ *удовлетворяет условиям*

$$E_0 = \int \left|\nabla u_0\right|^2 dx - \frac{1}{2}\iint \frac{\left|u_0(x)\right|^2 \left|u_0(y)\right|^2}{\left|x-y\right|^2} dxdy \geq 0.$$

$$J(u_0) < S(\psi_0).$$

Тогда решение $u(t)$ *задачи (58)-(60) существует глобально,*

$$u(t) \in C([0,\infty); H^1(R^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{-1}(R^n))$$

$$\left\|\nabla u(t)\right\| < \left\|\nabla \psi_0\right\|, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность своим научным консультантам: -академику НАН Азербайджана, доктору физико-математических наук, профессору Ф.А. Алиеву и академику НАН Азербайджана, доктору физико-математических наук, профессору Ю.А.Мамедову за ценные советы, постоянное внимание к работе и оказание всесторонней поддержки при выполнении диссертационной работы.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию глобальной разрешимости и разрушения решений задачи Коши, а также смешанной задачи для некоторых нелинейных эволюционных уравнений Шрёдингера, Гинзбурга-Ландау и Шрёдингера - Хартри. С этой целью доказаны некоторые точные интегральные неравенства, вычислена наилучшая константа и приведена ее оценка в одном интерполяционном неравенстве Соболева.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Доказаны новые точные интегральные неравенства, которые применены к доказательству неравенства энтропии. Обобщено неравенство энтропии. Доказано неравенство типа Трудингера для неограниченных областей, которое применено к нелинейному эволюционному уравнению Шрёдингера. Вычислены точные константы в некоторых неравенствах математической физики.
2. Вычислены точные константы и приведены их оценки в некоторых неравенствах Соболева, которые применены к доказательству разрешимости уравнений Шрёдингера.
3. Получены достаточные условия для разрешимости, разрушения и самоканализации решений задачи Коши, а также смешанной задачи для некоторых нелинейных эволюционных уравнений Шрёдингера.
4. Получены достаточные условия отсутствия глобальных решений для смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения типа Шрёдингера, а также типа Гинзбурга-Ландау.
5. Исследован вопрос о глобальной разрешимости и разрушении решений задачи Коши для одной системы эволюционных уравнений Шрёдингера с квадратичной нелинейностью.
6. Исследован вопрос о глобальной разрешимости и разрушении, затухании решений задачи Коши для нелинейного

эволюционного уравнения Шрёдингера-Хартри в критическом и сверхкритическом случаях.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Насибов, Ш.М. О численном выделении ограниченных решений систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных эволюционного типа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., -1971. 17:1, -с. 119–135
2. Насибов, Ш.М. Об одном нелинейном уравнении типа Шрёдингера//Дифф. уравнения, -1980. 16:4, -с.660–670.
3. Насибов, Ш.М. Об устойчивости, разрушении, затухании и самоканализации решений одного нелинейного уравнения Шрёдингера// Докл. АН СССР, -1985. 285:4, -с.807-811.
4. Насибов, Ш.М. Об оптимальных константах в некоторых неравенствах Соболева и их приложении к нелинейному уравнению Шрёдингера// Докл. АН СССР, -1989. 307:3, -с.538–542.
5. Насибов, Ш.М. Об одном нелинейном уравнении Шредингера с диссипативным членом// Докл. АН СССР, -1989. 304:2, -с.285–289.
6. Насибов, Ш.М. Об одной классе нелинейного эволюционного уравнения Гинзбурга-Ландау-Шредингера.// Доклады Академии Наук, -2001. том 376, №5, - с. 605-607
7. Насибов, Ш.М. О точной константе в одном неравенстве Соболева-Ниренберга и ее приложении к оценке снизу времени разрушения нелинейного эволюционного уравнения Шредингера с критической степенью// ДАН, -2002. т.382, №6, -с.750-753.
8. Насибов, Ш.М. Об эволюционном кубическом уравнении Шредингера с кубическим диссипативным членом $iu_t + i\beta|u|^2 u =$ $= \Delta u + \alpha|u|^2 u$ // Докл. РАН, -2003. 392:4, -с.457–461.
9. Насибов, Ш.М. О разрушении решений смешанной задачи

для нелинейного эволюционного уравнения Гинзбурга–Ландау–Шредингера// Дифференц. уравнения, -2003. 39:8, -с.1087–1091
10. Nasibov, Sh.M. On a class of nonlinear evolution Ginzburg-Landau-Schrodinger type equations// Appl. Comput. Math., -2004. 3(2), - pp.142-151.
11. Nasibov, Sh.M. On some sufficient conditions for the blow-up solutions of the nonlinear Ginzburg-Landau-Schrodinger evolution equation. // J. Appl. Math., -2004. 2004:1, -p.23-35
12. Насибов, Ш.М. Об одной верхней оценке точной константы в неравенстве Соболева и ее применении к внутренней задаче Дирихле для однородного стационарного уравнения Шредингера $\Delta u + q(x)u = 0$ // Доклады Академии Наук, -2005. том 403, №4, -с. 443-447
13. Насибов, Ш.М. Об одном интерполяционном неравенстве и его применении к нелинейному эволюционному уравнению Шредингера-Хартри.// Доклады Академии Наук, -2005. том 401, №4, - с. 1-4
14. Насибов, Ш.М. Об одном неравенстве типа Трудингера и его применении к одному нелинейному уравнению Шредингера // Мат. заметки, -2006. 80:5, -с.786-789.
15. Nasibovб, Sh.M. On a nonlinear evolution Schrödinger–Hartree equation.// Doklady Mathematics, -2006. v. 74, № 2, -pp. 704–707.
16. Nasibov, Sh.M. Remarks on the Gross–Sobolev, Hirschman, and Pauli–Heisenberg–Weyl fundamental inequalities and the entropy inequality.// Doklady Mathematics, -2007. v.76, №1, -pp. 589–591.
17. Nasibov, Sh.M. A system of nonlinear evolution Schrödinger equations. Doklady Mathematics, -2007. v. 76, №2, -pp. 708–712.
18. Насибов, Ш.М. Об одном интегральном неравенстве и его применении к доказательству неравенства энтропии// Математические заметки, -2008. 84:2, -с.231-237.
19. Nasibov, Sh.M. On a nonlinear Schrödinger–Hartree evolution equation in the critical case.// Doklady Mathematics, -2009. v.80, №1, -pp. 606–609.
20. Насибов, Ш.М. О точной константе в одном неравенстве Соболева-Ниренберга и ее приложении к уравнению Шрёдин-

гера// Российская Академия наук, серия математическая, -2009. 73:3, -с.127-150.
21. Nasibov, Sh.M., Huseynova, R.M. On n-dimensional analogue of Hirschman's inequality // Transactions of NAS of Azerbaijan.- 2009. v.29. №4, - pp.129-134.
22. Насибов, Ш.М. О самоканализации решений нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера// Матем. заметки,-2011. **90**:5, -с. 789–792.
23. Nasibov, Sh.M. A non-linear ground state problem.// Proceedings of IAM, -2012. v. 1, №2, - pp. 218-221 .
24. Насибов, Ш.М., Намазов, М.А. Об одном неравенстве Соболева.// Proc. of IAM, -2013. v. 2, № 2, -pp. 187-195
25. Насибов, Ш.М. Смешанная задача для эволюционного кубического уравнения Шрёдингера с кубическим диссипативным членом// Матем. заметки, -2014. 96:4, -с.539–547
26. Насибов, Ш.М. О двух неравенствах Соболева.// Proceedings of IAM, -2015. v. 4, №1, - pp. 46-50
27. Насибов, Ш.М. Об одном обобщении неравенства энтропии// Математические заметки, -2016. 99:2, -с. 278-282.
28. Насибов, Ш.М. Об уравнении $\Delta u+q(x)u=0$ // Математич. заметки, -2017. 101:1, -с.101–109
29. Nasibov, Sh.M. Blow-up of solutions of the Cauchy problem for a nonlinear Schrodinger evolution equation//Doklady Mathematics, -2018. 98(3), - pp. 586-588.
30. Насибов, Ш.М. Об отсутствии глобальных решений смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения типа Шредингера// ТМФ, -2018. 195:2, -с.190–196 .
31. Nasibov, Sh.M. On the collapse of solutions of the Cauchy problem for the cubic Schrodinger evolution equation.// Mathematical Notes, -2019. v. 105, №1, -pp. 64–70.
32. Насибов, Ш.М. Об отсутствие глобальных решений смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения типа Гинбурга-Ландау.// Доклады Академии Наук, -2019. том 484, №2, -с. 147-149.

33. Насибов, Ш.М. Об одном обобщении логарифмического неравенства Гросса-Соболева.// Доклады Академии Наук, -2019. том 487, №1, -с. 7-10.
34. Насибов, Ш.М. Нелинейное эволюционное уравнение Шредингера в двумерной области.//Теоретическая и математическая физика, -2019. том 201, №1, -с. 118-125
35. Nasibov, Sh.M., Veling, E.J.M. Upper and lower bounds for the optimal constant in the extended Sobolev inequality. Derivation and numerical results.// Journal of Mathematical Inequalities, -2019. v 13, № 3, -pp. 753-778.
36. Насибов, Ш.М. О скорости разрушения решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера.// Теоретическая и Математическая Физика, -2020. том 203, № 3, - с. 342-350.
37. Насибов, Ш.М. Интерполяционное неравенство Соболева и логарифмическое неравенство Гросса–Соболев// Математические заметки, -2020. Том 107, вып. 6, - с. 894-901.
38. Насибов, Ш.М. Об одном замечании к неравенству Стеклова–Пуанкаре// Математические заметки, -2021. т.110 вып. 2, - с. 234-238.
39. Насибов, Ш.М. Об отсутствии глобальных периодических решений нелинейного эволюционного уравнения типа Шредингера.// Теоретическая и Математическая Физика. -2021. том 208, № 1, - с. 69-73.

Защита диссертации состоится **15 апреля 2022 года в 14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **09 марта 2022 года.**

Подписано в печать: 28.01.2022
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 76712
Тираж: 70