**АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА**

*На правах рукописи*

# КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

Специальность: 1211.01- Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Сарван Тахмаз оглы Гусейнов**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук

**Баку – 2021**

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика» Бакинского Государственного Университета.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
**Таир Сади оглы Гаджиев**
доктор математических наук, профессор
**Махир Мирзахан оглы Сабзалиев**
доктор физико-математических наук, профессор
**Низамеддин Ширин оглы Искендеров**
доктор физико-математических наук, профессор
**Варга Казым оглы Калантаров**

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_______________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
_______________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
академик, д.ф.–м.н., профессор
_______________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы и степень разработки.**

Диссертационная работа посвящена исследованиям качественных свойств решений вырождающихся уравнений эллиптического и параболического типов второго порядка.

В диссертации изучены первая краевая задача для равномерно вырождающихся дивергентных эллиптических уравнений второго порядка, а также гёльдеровская непрерывность решений, плотность гладких функций в одном весовом соболевском пространстве, гёлдеровская непрерывность и неравенства Харнака для решений $p$-лапласиана с Макенхауптовым весом, который вырождается на части области, гёлдеровская непрерывность и неравенство Харнака для решений равномерного вырождающегося на части области эллиптического уравнения, содержащего $p$ -лапласиан. А также изучены гёлдеровская непрерывность и неравенство Харнака для решений равномерного вырождающегося на части области эллиптического $(p,q)$-лапласиана. Кроме того исследована задача Дирихле для одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка. Для решений неравномерно вырождающихся параболических уравнений изучена гёлдеровская непрерывность и неравенство Харнака.

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Число опубликованных работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям весьма значительно. Что касается вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка, то к числу первых в этом направлении относится работа М.В.Келдыша (1951), где впервые указан случай, когда характеристическая часть границы области может освобождаться от граничных условий, которые заменяются условием ограниченности решений. Позже А.В. Бицадзе в своей работе указал, что условие ограниченности может быть заменено граничным условием с некоторой весовой функцией.

Вырожденные эллиптические уравнения возникают в теории малых изгибов поверхностей вращения, в теории оболочек и т.д. Такие уравнения играют значительную роль в газовой динамике. Эти уравнения моделируют процессы, связанные с диффузией и диссипацией. Основополагающие работы по изучению вырожденных эллиптических уравнений принадлежат Трикоми, Хольмгрену, Геллерштедту, Франклю, Жермену, Бицадзе, Бабенко, Келдышу, Вишику, Кудрявцеву, Фикера, Векуа. В работе Фейбса, Кенига и Серапиони изучалась локальная регулярность слабых решений вырожденных линейных эллиптических уравнений в дивергентной форме.

Исследование дивергентных неравномерно эллиптических уравнений с весами общей структуры началось с работ С.Н.Кружкова и Н.Трудингера.

В нестационарном случае эта теория была развита в работах В.А.Солонникова. Эти результаты подробно изложены в ряде книг, например К.Миранды, Д.Гилбарга и Н. Трудингера, Ч. Морри и др. С развитием аппарата соболевских пространств тесно связано и развитие энергетического метода совершенно иными методами была доказана гёльдеровская непрерывность решений линейных дивергентных параболических уравнений второго порядка, из которой в свою очередь были получены оценки для решения эллиптических уравнений.

Выдающимся результатом Ю.Мозера было доказательство для решений дивергентных эллиптических уравнений неравенства Харнака. Из неравенства Харнака легко выводится гёльдеровоская непрерывность решений и сильный принцип максимума. В 1964 году Ю.Мозер перенёс эти результаты на параболический случай.

Неравенство Харнака для слабых решений обобщено на квазилинейные уравнения дивергентного вида Серрином и

Трудингером. Ещё одно доказательство теоремы Э.Де. Джорджи в случае эллиптических уравнений было дано Е.М. Ландисом.

Позже было обнаружено, что на уравнения высших порядков и системы уравнений эти результаты, вообще говоря, не распространяются, что было показано в 1968 году независимо В.Г.Мазьей, Э.ДеДжорджи, Э.Джусти и К.Миранда. Для нелинейных уравнений высокого порядка эти результаты получены в работах И.В.Скрыпника.

Однако неравенство Гёльдера имеет место в случае размерности $n = 2l$ для эллиптических уравнений порядка $2l$ и их квазилинейных аналогов. В случае квазиэллиптических уравнений подобный результат получен в работе Р.В.Гусейнова. Методы, предложенные Э.Ди Джорджи и Ю. Мозером активно развивались Э.Джусти, Г.Стампаккья, О.А.Ладыженской, Н.Н. Уральцевой, Дж. Серрином, Н.Трудингером, С.Н.Кружковым, А.А. Новрузовым, Ю.А. Алхутовым, И.Т.Мамедовым, Ф.И.Мамедовым и многими другими авторами.

Эти идеи и оказались применимыми к решениям дивергентных эллиптических и параболических уравнений, безотносительно их вариационной природы. В многорафии О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой было построена достаточно полная теория линейных и квазилинейных эллиптических уравнений с младшими членами, включая и уравнения типа эллиптического $p$-Лапласиана. Для линейных параболических уравнений (и нелинейных, но с условием, что порядок коэрцитивности и роста главной части линейный) аналогичная теория содержится в книге О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и В.А. Солонникова.

В 1982 году появилась замечательная работа E.Fabes, C.Kenig и R.Serapioni[1], посвящённая регулярности решений линейных дивергентных эллиптических уравнений типа где

---

[1] Fabes, E., Kenig, K., Serapioni, R. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. -1982. v.7, -с. 77-116.

матрица $\{a_{ij}(x)\}$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, а вес $\omega(x)$ принадлежит $A_2$-классу Макенхаупта. В том же году вышла работа E. Fabes, D.S. Jerison, C. Kenig,[2] в которой для таких уравнений был доказан критерий Винера регулярности граничной точки. За этой работой последовали работы F. Chiarenza и M. Frasca 1984 года, работы F. Chiarenza и R.Serapioni 1984-1987 годов посвящённые линейным параболическим уравнениям с весами из классов Макенхаупта.

Особенностью уравнений с весом в параболическом случае служит то, что здесь также пространственно-временной масштаб, на котором надо рассматривать решение, меняется от точки к точке, соответственно с изменением значений веса.

В основном, используемые приёмы схожи с теми, что используются при анализе на евклидовом пространстве, сложность представляет получение нужных неравенств типа Фридихса, Соболева и Пуанкаре. То же относится и к уравнениям с весом.

Ю.А. Алхутовым и В.В. Жиковым разработан техника анализа регулярности решений эллиптических уравнений с частично Макенхауптовым весом, то есть в ситуации, когда область разделена гиперплоскостью на две части и в каждой из частей вес является Макенхауптовым. Получена гёлдеровская непрерывность решений и показано, что неравенство Харнака в обычной форме, вообще говоря, отсутствует.

**Объект и предмет исследования.** Основным объектом диссертационной работы является качественные исследование к свойств решений дифференциальных уравнений.

**Цель и задачи исследования**. Изучение гёлдеровской непрерывности и неравенства Харнака для решений равномерно вырождающегося по малому параметру на части области эллиптического уравнения, содержащего $p$-лапласиан. Иссле-

---

[2] Fabes, E.B. Jerison, D.S., Kenig, C.E. , The Wiener test for degenerate elliptic equations// Annals de l'institut Fourier. -1982, v.32, no 3. –c.151-182.

дование гёлдеровской непрерывности решений линейного вырождающегося эллиптического уравнения в при наличии эффекта Лаврентьева. Отсутствие классического неравенства Харнака для $p$-лапласиана с частично макенхауптовым весом. Нахождение неравенства Харнака соответствующего такому уравнению.

Доказательство однозначной разрешимости задачи Дирихле для линейных дивергентных неравномерно вырождающихся эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Доказательство неравенства Харнака и гёльдеровской непрерывность решений таких уравнений.

**Методы исследования.** В работе использованы методы теории дифференциальных уравнений, теории функциональных пространств, теоремы вложения и функционального анализа. Основным инструментом исследования служит развитие итерационной техники в духе Мозера-Ди. Джорджи–Ладыженской -Уральцевой.

**Основные положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Гёльдеровская непрерывность решений линейных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с весом на плоскости в четырёхфазном случае, когда границами раздела фаз являются координатные прямые, а вес является степенной функцией на каждой из фаз.
2. Гёльдеровская непрерывность решений и неравенство Харнака для уравнения $p$-Лапласа с частично макенхауптовым весом в двухфазном случае, когда границей раздела фаз является гиперплоскость.
3. Неравенство Харнака и гёльдеровская непрерывность решений для уравнения типа $p$-Лапласа, равномерно вырождающегося по малому параметру на части области.
4. Гёльдеровская непрерывность решений $p$-лапласиана с макенхауптовым весом, который равномерно вырождается по малому параметру на части области.

5. Гёльдеровская непрерывность решений равномерно вырождающегося по малому параметру на части области уравнения типа $p(x)-$ лапласа с переменным показателем $p$.

6. Неравенство Харнака и гёльдеровская непрерывность решений $p(x)-$лапласиана с двухфазным кусочно постоянным показателем $p(x)$ в случае, когда границей раздела фаз является гиперплоскость и на одной из фаз уравнение равномерно вырождается по малому параметру.

7. Оценка максимума модуля собственных функций задачи Дирихле для дивергентных равномерного эллиптических операторов второго порядка, содержащих малый параметр на части области.

8. Теоремы существование и единственности решений задачи Дирихле для класса линейных неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с младшими коэффициентами.

9. Существование и единственность решений первой краевой задачи для нового класса линейных дивергентных неравномерно вырождающихся параболических уравнений второго порядка, неравенство Харнака и гёльдеровская непрерывность решений таких уравнений.

**Научная новизна исследования.** В диссертации получены следующие основные результаты:

1.Изучены линейные эллиптические уравнения с частично макенхауптовым весом. Доказана гёльдеровская непрерывность решений.

2.Рассмотрены нелинейные эллиптические уравнения типа $p$-лапласиана с частично макенхауптовым весом. Доказаны гёлдеровская непрерывность решений и неравенство Харнака.

3.Изучены равномерно вырождающиеся по малому параметру на части области эллиптические уравнения типа $p(x)-$ лапласиана, доказана гёлдеровская непрерывность решений.

4.Рассмотрены линейные и нелинейные эллиптические уравнения типа $p$-лапласиана, вырождающиеся по малому параметру на части области. Доказаны неравенство Харнака и гёльдеровская непрерывность решений таких уравнений без веса и для уравнений, содержащих макенхауптовый вес. Отдельно рассмотрено уравнение $p$-лапласа с переменным двухфазным показателем $p$ в случае, когда границей раздела фаз является гиперплоскость.

5.Изучены линейные неравномерно вырождающиеся эллиптические уравнения. Доказана разрешимость задачи Дирихле для одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка.

6.Дана оценка модуля непрерывности граничной точке решения задачи Дирихле для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка.

7.Для линейного эллиптического уравнения 2-го порядка, содержащего большой параметр на части области, найдена равномерная по параметру оценки модуля первой собственной функции.

8.Для линейных неравномерно вырождающихся дивергентных параболических уравнений доказана слабая разрешимость первой краевой задачи в весовых пространствах Соболева.

9.Доказано неравенство Харнака для решений неравномерно вырождающихся дивергентных параболических уравнений 2-го порядка.

10.Показана непрерывность по Гёльдеру решений неравномерно вырождающихся параболических уравнений второго порядка в дивергентной форме.

**Теоретическая и практическая ценность**. Результаты полученные в диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер, заполняя определенный пробел в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки качественных свойств решений для вырождающихся эллиптических и параболических уравнений.

**Апробация и применение**. Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах отделов «Уравнения математической физики» (член-корр НАНА, проф. Р.В.Гусейнов), «Дифференциальные уравнения» (проф. А.Б.Алиев), «Негармонический анализ» (чл.-корр НАНА, проф. Б.Т. Билалов), «Математический анализ» (чл.-корр НАНА, проф. В.С. Гулиев), на общеинститутских семинарах Института Математики и Механики НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Уравнения математической физики» БГУ (академик Ю.А.Мамедов), на семинарах кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» БГУ (проф. Н.Ш. Искендеров), и на научных семинарах Института Прикладной Математики БГУ.

Основные результаты диссертации также докладывались на семинаре во ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых под руководством В.В.Жикова и Ю.А.Алхутова, а также нижеследующих конференциях: X международной конференции по математике и механике посв. 45-летию ИММ (Баку 2004), Всесоюзный конференции по математике и механике посв. 50-летию чл.-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова (Баку 2005), «Теоретические и прикладные задачи операторных уравнений» посв. 75-летию проф. Я.Д.Мамедова (Баку 2006), на международной конференции по математике и механике посв. 70-летию акад. А.Д.Гаджиева (Баку 2007), на респ. конференции «Актуальные проблемы математики» посв. 85-летию общенационального лидера Азерб. народа Гейдара Алиева (Баку 2008), 3-й международной конференции посв. 85 летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева (2008), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (2009), на спектральная теория и её приложения тезисы международной конференции, посвященной 80-летному юбилею академика Ф.Г.Максудова (2010), на международная конференция посв. 100-летию акад. З.Халилова (2011), на теория функций и проблемы гармонического анализа материалы международной конференции, посвященной 100-летному юбилею академика И.И.Ибрагимова (2012), на конференциях посв. 90 летию со дня рожд. Гейдара Алиева (2013), материалы международной конференция посвященной 55 летию Института Математики и Механики НАНА (Баку 2014), на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль 2010, 2016, 2018), Proceedings of the $6^{th}$ international conference on control and optimization with industrial applications (Baku 2018).

**Личный вклад автора** заключается в формулировке цели и выборе направления исследования. Кроме того, все выводы и полученные результаты, а также методы исследования принадлежат лично автору.

**Публикации автора.** Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президента Азербайджанской Республики -24, материалы конференций- 1, тезисы докладов- 23.

**Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа.** Работа выполнена на кафедре «Высшая математика» Бакинского Государственного Университета.

**Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).** Общий объем диссертационной работы – 489400 знаков (титульная страница – 288 знаков, оглавление – 2853 знаков, введение –81600 знаков, первая глава – 134000 знаков, вторая глава – 136800 знаков, третья глава – 42000 знаков, четвертая глава – 95000 знаков). Список используемой литературы состоит из 154 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка используемой литературы.

Во введений обосновывается актуальность темы исследования и показана степень ее разработанности, сформулирована цель и задачи исследования, приведена научная новизна, отмечена теоретическая и практическая ценность исследования, а также представлена информация об апробации работы.

**В первой главе** изучены некоторые вопросы качественных свойств решений линейных и нелинейных эллиптических уравнений с частично Макенхауптовым весом, содержащем $p$-лапласиан. Основные результаты этой главы опубликованы в работах авторах [11,12,13,14,15, 18, 35, 42].

В 1.1 исследуется разрешимость модельного равномерно вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка, для которого множество гладких функций не плотно в соответствующем весовом соболевском пространстве $W$. Вводятся понятия $W$- и $H$- решений, доказывается однозначная разрешимость соответствующих $W$- и $H$-задач Дирихле.

Рассмотрим в единичном круге $B \subset R^2$ с центром в начале координат вырождающееся эллиптическое уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad (1)$$

с весом

$$\omega(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha_1}, \; x_1 > 0, \; x_2 > 0; \\ |x|^{\beta_1}, \; x_1 < 0, \; x_2 > 0; \\ |x|^{-\alpha_2}, \; x_1 < 0, \; x_2 < 0; \\ |x|^{\beta_2}, \; x_1 > 0, \; x_2 < 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$0 < \alpha_i < 2, \; 0 < \beta_i < 2, \; i = 1,2.$

С уравнением (1) связан класс функций $W(B,\omega)$:

$$W(B,\omega) = \{u : u \in W_1^1(B), \; (u^2 + |\nabla u|^2)\omega \in L_1(B)\} \qquad (3)$$

Здесь $W_1^1(B)$-классическое соболевское пространство функций, суммируемых в $B$ вместе с обобщенным производными первого порядка. Ниже $W(B,\omega)$ рассматривается как весовое соболевское пространство с нормой

$$\|u\|_W^2 = \int_B (u^2 + |\nabla u|^2)\omega dx.$$

Так как $\omega^{-1} \in L_1(B)$ то пространство $W(B,\omega)$ полно. Замыкание множества функций из $W(B,\omega)$ с компактным носителем в $B$ будем обозначать через $W_0(B,\omega)$. Рассматриваемый вес удовлетворяет $A_2$-условию Макенхаупта в каждой из четвертой плоскости и имеет место неравенство Фридрихса

$$\int_B u^2 \omega dx \le C \int_B |\nabla u|^2 \omega dx \quad \forall u \in W_0(B,\omega). \tag{4}$$

Поэтому в соболевском пространстве $W_0(B,\omega)$ норму можно задавать равенством

$$\|u\|_{W_0}^2 = \int_B |\nabla u|^2 \omega dx \ .$$

Введем одно из возможных понятий решения уравнения (1).

**Определение 1.** Функция $u \in W(B,\omega)$ называется $W$-решением уравнения (1), если интегральное тождество

$$\int_B \nabla u \nabla \psi \omega dx = 0 \tag{5}$$

выполнено на пробных функциях $\psi \in W_0(B,\omega)$.

Множество гладких в $B$ функций не плотно в пространствах $W(B,\omega)$ и $W_0(B,\omega)$. Доказательство этого утверждения в случае, когда весовая функция (2) удовлетворяет условию $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$, содержится в работах В.В.Жикова.

В связи со сказанным выше имеет смысл определить пространства $H(B,\omega)$ и $H_0(B,\omega)$ как замыкание в $W(B,\omega)$ множеств $C^\infty(B) \cap W(B,\omega)$ и $C_0^\infty(B)$ соответственно.

**Определение 2.** Функция $u \in H(B,\omega)$ называется $H$-решением уравнения (1), если интегральное тождество (5) выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(B,\omega)$.

Введенные выше $W$-решения и $H$-решения уравнения (1) связаны с $W$-и $H$-задачами Дирихле

$$Lu_1 = 0 \ \text{ в } B, \quad u_1 \in W(B,\omega), \ h \in C^\infty(\overline{B}), (u_1 - h) \in W_0(B,\omega) \tag{6}$$

и

$Lu_2 = 0$ в $B$, $u_2 \in H(B,\omega)$, $h \in C^\infty(\overline{B})$, $(u_2 - h) \in H_0(B,\omega)$, (7)
соответственно. Для весовой функции вида

$$\omega(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, \ x_1 x_2 > 0; \\ |x|^{\alpha}, \ x_1 \, x_2 < 0, \end{cases} \tag{8}$$

понятие $W$- и $H$-решений уравнения рассматриваемого вида введено в В.В.Жиковым, а однозачная разрешимость $W$-и $H$-задач Дирихле и существование у них различных решений с одной и той же граничной функцией установлено в работах Ю.А.Алхутова и В.В.Жикова.

Ниже $\omega(x)$ означает вес, определенный равенством (2). Для функций $u \in W(B,\omega)$ используется полярная система координат с центром в начале координат, задаваемая равенством

$$u(x) = u(r,\theta),$$

и используются обозначения

$$D^{(1)} = B \cap \{x : x_1 > 0, \ x_2 > 0\}, \ D^{(2)} = B \cap \{x : x_1 < 0, \ x_2 < 0\},$$

$$D_r^{(i)} = D^{(i)} \cap \{x : |x| < r,\}, \ S_r^{(i)} = D^{(i)} \cap \{x : |x| = r\}, \ i = 1,2.$$

Пусть еще $d\mu_i = |x|^{-\alpha_i} dx, \ i = 1,2.$ Для измеримого множества $E \subset R^2$ и неотрицательной измеримой функции $f$ полагается

$$\mu_i(E) = \int_E d\mu_i, \oint_E f(x) d\mu_i = \frac{1}{\mu_i(E)} \int_E f(x) d\mu_i, \quad i = 1,2.$$

Показано, что сужение функции $u \in W(B,\omega)$ на $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ имеет следы $u^{(i)}(0), \ i = 1,2$, в начале координат, равные

$$u^{(i)}(0) = \lim_{R \to 0} \oint_{D_R^{(i)}} u(x) d\mu_i, \ i = 1,2, \tag{9}$$

и для любого $R \in (0,1]$ имеет место неравенство Харди

$$\oint_{D_R^{(i)}} (u(x) - u^{(i)}(0))^2 |x|^{-2} d\mu_i \le C(a_i) \oint_{D_R^{(i)}} |\nabla u(x)|^2 d\mu_i, \ i = 1,2. \tag{10}$$

Ниже $W_2^1(D)$ означает соболевское пространство функций, $L_2$-суммируемых в области $D$ вместе с обобщенными производными первого порядка. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** Для принадлежности функции $u(x)$ весовому соболевскому пространству $H(B,\omega)$ необходимо и достаточно выполнение равенства $u^{(1)}(0)=u^{(2)}(0)$. При этом пространство $H$ имеет коразмерность 1 в $W$. Приводимая ниже функция $u\in W(B,\omega)$:

$$u(x)=\begin{cases}1, & при \;\; x_1>0, x_2>0;\\ \sin\theta, & при \;\; x_1<0, x_2>0;\\ 0, & при \;\; x_1<0, x_2<0;\\ \cos\theta, & при \;\; x_1>0, x_2<0\end{cases}$$

не принадлежит соболевскому пространству $H(B,\omega)$.

Пространства $W_0(B,\omega)$ и $H_0(B,\omega)$ есть гильбертовы пространства со скалярным произведением

$$\langle u,\upsilon\rangle=\int_B \nabla u\nabla\upsilon\omega dx .$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Задачи (6)-(7) однозначно разрешимы и существует граничная функция $h\in C^\infty(\overline{B})$, для которой решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ различны.

В 1.2 изучается вопрос о гёльдеровой непрерывности $W$- и $H$- решений.

**Теорема 2.** Если вес $\omega(x)$ удовлетворяет условию (2), то $H$ - решения уравнения (1) гёльдеровы в $B$, а $W$ решения, не являющиеся $H$ - решениями, разрывные в начале координат и гёльдеровы в $B\cap\{x: x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$ и $B\cap\{x: x_1\le 0,\ x_2\le 0\}$.

Так как весовые функций $\omega_i(x)$ удовлетворяет $A_2$-условию Макенхаупта и четны относительно координатных прямых, то справедливо неравенство Соболева

$$\left( \oint_{D_r^{(i)}} |\varphi|^4 d\mu_j \right)^{\frac{1}{2}} \le Cr^2 \oint_{D_r^{(i)}} |\nabla \varphi|^2 d\mu_j, \; \varphi \in W_0\,(B,\omega), \; j = 1,23,4\,. \quad (11)$$

Из (11) и итерационной техники Мозера приходим к следующему утверждению.

**Лемма 2.** Любые $W$ - решение и $H$ - решение уравнения (1) локально ограничены в $B$.

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет весовая оценка решений рассматриваемого уравнения. Для ее формулировки обозначим через $B_r$, где $r \le R$, открытые круги достаточно малого радиуса $r$ с центром на дугах $S_R^{(i)}, i = 1,3,$ полагая $D_r^{(i)} = B_r \cap D^{(i)}$. Положим

$$\vartheta(x) = |u(x)|^{1+\varepsilon} + R^\nu\,, \; \nu > 0\,,$$

где $u$ решение уравнения (1). Введенная функция является ограниченным положительным субрешением того же уравнения. Ниже предполагается, что

$$\nu_0 = \min\left\{ \frac{\beta_2 + \alpha_1}{2}, \frac{\beta_2 + \alpha_2}{2} \right\} \text{ и } 0 < \nu < \nu_0\,.$$

**Теорема 3.** Существуют положительные постоянные $C_1$ и $C_2$, не зависящие от $\vartheta, \nu$ и $r$ такие, что при выполнения условия

$$1 \le \gamma \le C_1 R^{\nu - \nu_0}$$

для любого $0 < \rho < r$ справедливы неравенства

$$\left( \oint_{D_\rho^{(1)}} \vartheta^{2(\gamma+1)} d\mu_1 \right)^{1/2} \le C_2 (\gamma+1)^2 \left( \frac{r}{r-\rho} \right)^2 \oint_{D_\rho^{(1)}} \vartheta^{\gamma+1} d\mu_1,$$

$$\left( \oint_{D_r^{(3)}} \vartheta^{(\gamma+1)} d\mu_3 \right)^{1/2} \le C_2 (\gamma+1)^2 \left( \frac{r}{r-\rho} \right)^2 \oint_{D_r^{(3)}} \vartheta^{\gamma+1} d\mu_3\,.$$

Из результатов работ Ю. А. Алхутова и В. В. Жикова о гёльдеровской непрерывности решений эллиптических уравнений с частично макенхауптовым весом следует, что $W$ - решения и $H$-решения уравнения (1) гельдеровы в $B\setminus\{(0,0)\}$. Поэтому доказательство теоремы 2 сводится к исследованию поведения решений в начале координат. Основу доказательства составляют разработанная автором модификация метода Мозера, основанная на оценках теоремы 3 и утверждении леммы 1.

После теоремы 3 рассуждения посвящены доказательству оценки Мозера для максимума субрешения $\vartheta(x)$ на дугах $S_R^{(i)}$, где $i=1,3$, через средние значения интегралов по множествам $D_R^{(i)}$. Для этого необходимо проинтегрировать неравенства, полученные в данной теореме. Однако обычная схема доказательства здесь не проходит ввиду ограничения на постоянную $\gamma$. Предлагаемый метод состоит в интегрировании неравенств по последовательности кругов с геометрически убывающей последовательностью радиусов и позволяет за конечное число шагов, удовлетворяя ограничениям на постоянную $\gamma$, перейти к кругу $B_r^{x_0}\subset D^{(i)}$. После этого используются обычные рассуждения, основанные на технике Мозера.

В 1.3 найдены необходимы и достаточные условия на вес специального вида, обеспечивающее плотность гладких функции в весовом Соболевском пространстве.

Рассмотрим в единичном круге $B=\{x:|x|<1\}$ евклидовой плоскости $R^2$ весовое соболевское пространство с весом

$$\omega(x)=\begin{cases} f^{-1}(|x|), & \textit{при} \quad x_1x_2>0 \\ f(|x|), & \textit{при} \quad x_1x_2<0. \end{cases}$$

От функции $f$, участвующей в определении веса, требуется выполнение следующих условий. Будем считать, что $f(t)$ непрерывна, не убывает на $(0,1]$ и

$$f(2t) \le c\, f(t) \quad \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \tag{12}$$

$$\sup_{t\in(0,1)} \left( \int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right)\left( \int_0^t \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) < \infty. \tag{13}$$

После этого не оговаривая особо, будем дополнительно предполагать, что $\omega^{-1} \in L_1(B)$. Отсюда следует, что пространство $W(B,\omega)$ является полным. В частности, приведенным условиям удовлетворяют функции вида $f(t) = \ln^{\gamma} \frac{1}{2t} \cdot t^{-\alpha}$, где $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, $\alpha \in (0,2)$.

В случае когда $f(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,2)$, данный вопрос ранее был решен в работах В.В.Жикова. В нашем случае при выполнении условий (12),(13) множество функций из $C^{\infty}\left(\overline{B}\right) \cap W(B,\omega)$, вообще говоря, не плотно в $W(B,\omega)$. В связи с этим определим пространство $H(B,\omega)$ как замыкание в $W(B,\omega)$ множества $C^{\infty}\left(\overline{B}\right) \cap W(B,\omega)$.

**Теорема 4.** Функция $u \in W(B,\omega)$ принадлежит пространству $H(B,\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$L_1(u) = L_3(u) \text{,где}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(r,\theta)\, d\theta = L_1(u)\, ,\, L_3(u) = \lim_{r\to 0} \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} u(r,\theta) d\theta,$$

1.4 посвящен внутренней априорной оценке нормы Гёльдера слабых решений равномерно вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида.

Рассмотрим в области $D \subset R^n$, $n \ge 2$, эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \omega(x) \left|\nabla u\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \;\; p = const > 1, \tag{14}$$

где $\omega(x) \geq 0$. Для того, чтобы определить решение, введем класс функций

$$W_{loc}(D,\omega) = \{u : u \in W^{1,1}_{loc}(D), |\nabla u|^p \omega \in L^1_{loc}(D)\}$$

Где $W^{1,1}(D)$-классическое Соболевское пространство. Под решением уравнения (14) понимается функция $u \in W_{loc}(D,\omega)$, для которой интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \omega\ (x)|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx = 0$$

выполнено на финитных пробных функциях $\xi \in W_{loc}(D,\omega)$. Целью является доказательство гёльдеровской непрерывности решений уравнения (14). Для вырождающихся уравнений этой тематике посвящено большое число работ. Наиболее полно исследован случай, когда весовая функция $\omega(x)$ удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта. Случай $p \neq 2$ изучен в работах J.Heinonen, T.Kilpelainen, O.Martio[3]. Напомним, что вес $\omega(x)$, определенной во всем пространстве $R^n$, удовлетворяет $A_p$-условию, если

$$\sup\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} < \infty,\ 1 < p < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $B \subset R^n$.

Стандартным примером такого веса является степенная функция $\omega(x) = |x|^\alpha$, где $-n < \alpha < n(p-1)$, а также $\omega(x) = |x_n|^\alpha$, где $-1 < \alpha < p-1$.

Важными следствиями $A_p$-условия Макенхаупта являются условия удвоения

---

[3] Heinonen, J., Kilpelainen, T., Martio, O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations// Mineola. NY: Dover Publ. Inc.,- 2006. XII, 404 pp.

$$\omega(B_{2r}) \le c\omega(B_r), \qquad (15)$$

неравенство Соболева

$$\left( \oint\limits_{B_r} |\varphi|^{pk} d\mu \right)^{\frac{1}{k}} \le c(n,p) r^p \oint\limits_{B_r} |\nabla\varphi|^p d\mu,\ \varphi \in C_0^\infty(B_r),\ k = \frac{n}{n-1}, \qquad (16)$$

неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{B_r} |\varphi|^p d\mu \le c(n,\nu,p) r^p \int\limits_{B_r} |\nabla\varphi|^p d\mu,$$

$$\varphi \in C^\infty(\overline{B}_r),\ \varphi\big|_E = 0,\ |E| \ge \gamma|B_r|,\ \gamma > 0 .$$

В работе Ю.А.Алхутова и В.В.Жикова рассмотрены весовые функции более общего вида. Именно, предполагается, что гиперплоскость $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ разделяет область $D$ на две подобласти

$$D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\} \text{ и } D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\} \text{ и}$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) & \text{в } D^{(1)}, \\ \omega_2(x) & \text{в } D^{(2)}, \end{cases} \qquad (17)$$

где каждая из четных относительно $\Sigma$ весовых функций $\omega_i(x)$, $i = 1,2$, удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта. Кроме этого, для шаров $B_r$ с центрами на $\Sigma$ для почти всех $x \in B_r$ при $r \le r_0$ выполнено неравенство

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(B_r)} \le c \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(B_r)} \qquad (18)$$

с постоянной $c$, не зависящей от $r$ и $x$. В частности, в $r_0$-окрестности $\Sigma$

$$\omega_1(x) \le c\omega_2(x).$$

Для таких весов условие удвоения (15) и неравенство соболева (16) в общем случае нарушаются. В работе Ю.А.Алхутова и В.В.Жикова было показано, что при $p = 2$ и выполнении условий (17) и (18) решения уравнения (14) непрерывны по Гельдеру, при этом классическое неравенство

Харнака в общем случае отсутствует.

Ключевую роль в доказательстве гёльдеровской непрерывности решений играет следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть $\vartheta(x)$-является положительным ограниченным субрешением уравнения (14), то есть

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \omega(x) \left|\nabla \vartheta\right|^{p-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx \le 0, \ \forall \xi \in C_0^{\infty}(D), \ \xi \ge 0 \text{ в } D.$$

Тогда для любого шара $B_{8R} \subset D$ выполнено неравенство

$$\sup_{B_R} \vartheta(x) \le c \left( \oint_{B_{2R}^{(1)}} \vartheta^p(x) d\mu_1 + \oint_{B_{2R}^{(2)}} \vartheta^p(x) d\mu_2 \right)^{1/p},$$

где постоянная $c$ зависит только от $n, p, u, \omega$.

Области $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ играют различную роль в доказательстве данной леммы. Это связано с тем, что в шарах с центром на разделяющей гиперплоскости отсутсвует весовая теорема вложения Соболева с повышенным показателем суммируемости.

Далее доказывается основной результат.

**Теорема 5.** Если $\omega$ удовлетворяет условиям (17) и (18), где $\omega_1$ и $\omega_2$ являются четными относительно гиперплоскости $\sum$ функциями, принадлежащими $A_p$-классу Макенхаупта, то все решения уравнения (14) Гёльдеровы в $D$.

**В 1.5** доказывется отсутствие классического неравенства Харнака для решений уравнения (14) с весом, удовлетворяющим условиям (17), (18) и устанавливается неравенство Харнака, соответствующее данному уравнению.

Ранее показано, что если $\omega \in A_p$, то решения уравнения (14) гельдеровы в $D$ и для всех неотрицательных в $B_{4R} \subset D$ решений выполнено классическое неравенство Харнака

$$\inf_{B_R} u \ge const \cdot \sup_{B_R} u. \tag{19}$$

Нами установлено, что если в шарах $B_R$ с центром на $\sum \cap D$ выполнено соотношение

$$\frac{\omega_2(B_r)}{\omega_1(B_r)} \to \infty \text{ при } r \to 0,$$

то классическое неравенство Харнака (19) и неравенство Соболева (17) заведомо не имеют место. Доказательство этого результата основано на оценках емкостного потенциала.

Поскольку классическое неравенство Харнака (19) нарушается в шарах с центром на гиперплоскости $\sum$, в формулировке результата участвуют именно такие шары, и ниже полагается, что

$$B_R^{-} = B_R \cap \{x : -R < x_n < -R/2\}. \tag{20}$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 6.** Если вес $\omega(x)$ удовлетворяет условиям (17), (18) и $u(x)$ - неотрицательное решение уравнения (14) в шаре $B_{4R} \subset D$ с центром на $\sum$, то имеет место неравенство

$$\inf_{B_R} u \geq \gamma \sup_{B_R^{-}} u, \tag{21}$$

в котором положительная постоянная $\gamma < 1$ не зависит от $u$ и $R$.

Из теоремы 6 вытекает гёльдеровость решения в точках $\sum \cap D$ и, как следствие, гёльдеровская непрерывность решений во всей области $D$.

В разделе 1.6 исследуется уравнение типа $p(x)-$лапласа с переменным показателем $p$, равномерно вырождающееся по малому параметру на части области. А именно, в области $D \subset R^n, n \geq 2,$ рассматривается семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = div\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = 0 \tag{22}$$

с измеримым показателем $p(x)$, таким, что

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \quad \text{почти всюду в } D, \tag{23}$$

и положительным весом $\omega_\varepsilon(x)$, который сейчас определим. Предполагается, что область $D$ разделена гиперплоскостью $\sum = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если} \quad x \in D^{(1)} \\ 1, & \text{если} \quad x \in D^{(2)} \end{cases}, \ \varepsilon \in (0,1]. \tag{24}$$

Для определения решения уравнения (22) введем класс функций

$$W_{loc}(D) = \left\{u : \ u \in W^{1,1}_{loc}(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L^1_{loc}(D)\right\},$$

где $W^{1,1}_{loc}(D)$ – соболевское пространство функций, локально суммируемых в $D$ вместе с обобщенными производными первого порядка.

Под решением уравнения (22) понимается функция $u \in W_{loc}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D \omega_\varepsilon(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = 0 \tag{25}$$

на пробных функциях $\psi \in C_0^\infty(D)$.

Важную роль играет вопрос о плотности гладких функций в введенном классе решений $W_{loc}(D)$. В работе В.В. Жиковым и Х.Фан показано, что если выполнено логарифмическое условие

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c}{\ln \frac{1}{|x-y|}} \text{ при } x, y \in D, \quad |x-y| < \frac{1}{2} \tag{26}$$

то для произвольной функции $u \in W_{loc}(D)$ существует последовательность $\{u_j\}$, где $u_j \in C^\infty(D)$, такая, что в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$ выполнено соотношение

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W^{1,1}(D')} = 0, \ \lim_{j\to\infty} \int_{D'} |\nabla u_j|^{p(x)} dx = \int_{D'} |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

В настоящее время условие (26) играет большую роль в теории пространств Соболева с переменным показателем суммируемости и вопросе о гёльдеровской непрерывности $p(x)$-гармонических функций. В работе Ю.А.Алхутова доказана априорная оценка нормы Гёльдера решений уравнения (22) при условии (26) в случае, когда $\varepsilon = 1$. В настоящей работе предполагается, что при $i = 1{,}2$

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c_0}{\ln \frac{1}{|x-y|}} \qquad при\ x, y \in D^{(i)}, |x-y| < 1/2, \tag{27}$$

в некоторой окрестности $D \bigcap \sum$, имеет место неравенство

$$p(x) \ge p(\widetilde{x}) \quad при \quad x \in D^{(2)}, \tag{28}$$

где $\widetilde{x}$ - точка симметричная $x$ относительно гиперплоскости $\sum$. В работе Ю.А. Алхутова показано, что при выполнении условия (27) множество гладких функций плотно в классе $W_{loc}(D)$. Отсюда следует, что в интегральном тождестве (25) можно использовать пробные функции $\psi \in W_{loc}(D)$ с компактным носителем в $D$. Нас интересует вопрос о независимости показателя Гёльдера $\alpha$ от малого параметра $\varepsilon$.

Пусть $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ - семейство решений уравнения $L_{\varepsilon} u^{\varepsilon} = 0$, ограниченное в $L_{\infty}$ равномерно по $\varepsilon$ на компактных подмножествах $D$. Доказано следующее утверждение.

**Теорема 7.** Если выполнены условия (23), (24), (27) и (28), то существует постоянная $\alpha \in (0{,}1)$, не зависящая от $\varepsilon$, такая, что семейство $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ компактно в $C^{\alpha}(D')$ в произвольной подобласти $\overline{D}' \subset D$.

**Вторая глава** диссертации посвящена доказательству гёльдеровской непрерывности решений и неравенства Харнака для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка, равномерно вырождающихся по малому параметру на части области. Основные результаты этой главы опубликованы в работах авторах [20, 21, 24, 34,36,37,38,39,40,42,45,46,47].

В 2.1 в области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, рассматривается семейство линейных эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left( a_{ij}(x)\omega_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{29}$$

в предположении, что область $D$ разделена гиперплоскостью $\sum = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} =$ $= D \cap \{x : x_n < 0\}$ с весом $\omega_\varepsilon(x)$, удовлетворяющим условию (24), и измеримой симметричной матрицей $\{a_{ij}(x)\}$, удовлетворяющей условию равномерной эллиптичности

$$\gamma^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma|\xi|^2. \tag{30}$$

Под решением уравнения (29) понимается функция $u \in W^1_{2,loc}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{i.j=1}^{n} \int_D a_{ij}(x)\omega_\varepsilon(x)u_{x_i}\varphi_{x_j}dx = 0$$

на пробных функциях $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ с компактным носителем в $D$.

Пусть $\{u^\varepsilon(x)\}$ - семейство решений уравнения $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$, ограниченное в $L_\infty$ равномерно по $\varepsilon$ на компактных подмножествах $D$.

Получен следующий результат.

**Теорема 8.** Существует постоянная $\alpha \in (0,1)$, зависящая только от размерности пространства $n$ и константы $\gamma$ из условия (30) и такая что семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ компактно в $C^\alpha(D')$ в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$.

2.2 посвящен обобщению теоремы 8 на случай уравнения типа р-лапласиана, равномерно вырождающегося по малому параметру $\varepsilon$ на части области. В области

$D \subset R^n$, $n \geq 2,$ разделенной гиперплоскостью на две части, рассматривается семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_\varepsilon(x)\left|\nabla u\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad p > 1 \qquad (31)$$

с весом $\omega_\varepsilon(x)$, удовлетворяющим условию (24).

Под решением уравнения (31) понимается функция $u \in W^1_{p,loc}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \omega_\varepsilon(x)\left|\nabla u\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = 0$$

на пробных функциях $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ с компактным носителем в $D$.

Хорошо известно что при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0,1]$ любое решение уравнения (31) в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$ принадлежит пространству $C^\alpha(D')$ гёльдеровых в $D'$ функций. Нас интересует вопрос о независимости показателя $\alpha$ от $\varepsilon$ .

Рассмотрим семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ решений уравнений $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0,$ ограниченное в $L_\infty$ равномерно по $\varepsilon$ на компактных подмножествах $D$. Основу настоящего раздела составляет доказательство следующего утверждения.

**Теорема 9.** Существует постоянная $\alpha \in (0,1),$ зависящая только от размерности пространства $n$ и р такая, что семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ компактно в $C^\alpha(D')$ в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$.

В 2.3 доказывается аналог неравенства Харнака для неотрицательных решений уравнения (31).

Если $\omega_\varepsilon \equiv 1,$ то для неотрицательного в шаре $B_{4R} \subset D$ решения уравнения (31) имеет место классическое неравенство Харнака (19). Нас интересует вопрос об аналоге неравенства Харнака для неотрицательных решений с постоянной, не зависящей от $\varepsilon$. Нами установлено, что неравенство Харнака (19) в шарах с центром на гиперплоскости с постоянной, не зависящей от $\varepsilon$, не имеет места. Основная цель получить аналог неравенства Харнака шарах с центром на $\sum$. Ниже используется обозначение из (20).

**Теорема 10.** Если $u(x)$-неотрицательное решение уравнения (31) в шаре $B_{4R} \subset D$ с центром на $\sum$, то имеет место неравенство (21) с постоянной, не зависящей от $u$, $R$, $\varepsilon$.

Из неравенства (21) вытекает утверждение теоремы 9.

В разделе 2.4 также исследуется уравнение вида (31) в области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, в области $D$, разделенной гиперплоскостью на две части с весом

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon\omega(x), \; x \in D^{(1)}, \\ \omega(x), \; x \in D^{(2)}, \varepsilon \in (0,1], \end{cases} \tag{32}$$

где $\omega(x)$ - вес, удовлетворяющий $A_p$ -условию Макенхаупта.

Кроме того, предполагается, что в открытых шарах $B_{R_0}$ достаточно малого радиуса $R_0$ с центром на гиперплоскости $\sum$ для почти всех точек $x$ из полушара $B_{R_0} \cap \{x : x_n > 0\}$ выполнено неравенство

$$\omega(x) \leq \gamma\omega(x'), \; \gamma = const > 0, \tag{33}$$

где $x'$ -точка, симметричная $x$ относительно гиперплоскости $\sum$. В частности, данному условию удовлетворяют веса $|x|^\alpha$, где $-n < \alpha < n(p-1)$, и $|x_n|^\alpha$, где $-1 < \alpha < p-1$. Кроме того, подходит любой вес, удовлетворяющий $A_p$-условию Макенхаупта который является четным относительно гиперплоскости $\sum$. Хорошо известно, что при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0,1]$ любое решение рассматриваемого уравнения в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$ принадлежит пространству $C^\alpha(D')$ гёльдеровых в $D'$ функций. Нас интересует вопрос о независимости показателя $\alpha$ от $\varepsilon$. Ниже, как и ранее, $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ - семейство решений уравнений $L_{\varepsilon}u^{\varepsilon}=0$, ограниченное в $L_{\infty}$ равномерно по $\varepsilon$ на компактных подмножествах $D$.

**Теорема 11.** Если вес $\omega$ удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта и выполнено условие (33), то существует постоянная $\alpha\in(0,1)$, зависящая только от $p$, размерности пространства $n$, константы $\gamma$ из (33) и веса $\omega$, такая, что семейство $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ компактно в $C^{\alpha}(D')$ произвольной подобласти $\overline{D}'\subset D$.

В разделе 2.5 продолжается исследование уравнения (31) с весом $\omega_{\varepsilon}(x)$, удовлетворяющим условиям (32) и (33).

Здесь показано отсутствие классического неравенства Харнака(19) в шарах с центром на гиперплоскости с постоянной, не зависящей от $\varepsilon$.

Основной результат, в котором используется обозначение (20), состоит в следующем утверждении.

**Лемма 4**. Если вес удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта и выполнено предположение (33), то для любого $q>0$ справедливо неравенство

$$\inf_{B_R} u(x)\geq C\left(\oint_{B_{2R}} v^{-q}(x)d\mu\right)^{-1/q}$$

с постоянной C, не зависящей от u и R.

**Лемма 5.** Если вес удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта и выполнено предположение (33), то для любого шара $B_{2r}\subset B_{3R}$ – имеет место оценка

$$\int_{B_r}\left|\nabla \ln v\right|^p d\mu\leq Cr^{-p}\omega(B_r),$$

в которой постоянная C не зависит от u, r, R и $\varepsilon$.

**Теорема 12**. Если вес $\omega(x)$ удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта и выполнено предположения (33), то для неотрицательного в шаре $B_{4R} \subset D$ с центром на $\sum$, решения $u$ уравнения (31) справедливо неравенство (21), в котором положительная постоянная не зависит от $u, R$ и $\varepsilon$ .

В 2.6 в области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, разделенной гиперплоскостью на две части, рассматривается семейство эллиптических уравнений (22) с весом из (24) и показателем $p(x)$ вида

$$p(x) = \begin{cases} q, \text{ если } x \in D^{(1)} \\ p, \text{ если } x \in D^{(2)}, \end{cases} \qquad 1 < q < p. \tag{34}$$

Для определения решения вводится класс функций, связанный с показателем $p(x)$:

$$W_{loc}(D) = \{u : u \in W^{1,1}_{loc}(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L^1_{loc}(D)\},$$

где $W^{1,1}_{loc}(D)$ -соболевское пространство функций, локально суммируемых в $D$ вместе с обобщенными производными первого порядка.

Под решением уравнения (22) понимается функция $u \in W_{loc}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D \omega_\varepsilon(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0$$

на пробных функциях $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Вновь, как и ранее, $\{u^\varepsilon(x)\}$ означает семейство решений уравнений $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$, ограниченное в $L_\infty$ равномерно по $\varepsilon$ на компактных подмножествах $D$.

Доказано следующее утверждение.

**Теорема 13.** Существует постоянная $\alpha \in (0,1)$, зависящая только от размерности пространства $n$, и констант $p$, $q$ из условия (34), такая, что семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ компактно в $C^\alpha(D')$ в произвольной подобласти $\overline{D}' \subset D$.

Доказательство вышеуказанного результата основано на следующих ниже двух вспомогательных результатов, в которых $B_R \subset D$ -- шары с центром на гиперплоскости $\Sigma$, $M = \sup\limits_{B_{R_0}} |u(x)|$, где, $R_0 \le 1/4$, и для $R \le R_0/6$ полагается

$$M_6 = \sup_{B_{6R}} u, \quad m_6 = \inf_{B_{6R}} u, \quad \vartheta(x) = \ln \frac{M_6 - m_6 + 2R}{M_6 - u(x) + R}.$$

**Лемма 6.** Для любых $R \le \rho < r \le 3R$ имеет место неравенство

$$\sup_{B_\rho} \vartheta \le C(n,p,q,M) \left( \frac{r}{r-\rho} \right)^a \left( \oint_{B_r} \vartheta^p \, dx \right)^{1/p}$$

с постоянной $a(n,p) > 0$.

Из приведенной выше леммы с помощью метода Мозера устанавливается следующий факт.

**Лемма 7.** Справедлива оценка

$$\sup_{B_R} \vartheta \le C(n,p,q,M) \oint_{B_{2R}} \vartheta dx.$$

Попутно в ходе доказательства сформулированной теоремы установлено, что любое решение уравнения (31) непрерывно по Гёльдеру в области $D$ с показателем, зависящим только от $n$, $p$ и $q$. Отметим, что при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0,1]$ гёльдеровская непрерывность решений вытекает из результатов работы E. Acerbi и N. Fusco[4].

**В 2.7** доказывается неравенство Харнака для неотрицательных решений $(p,q)$-лапласиана.

**Теорема 14.** Если выполнены условия (24),(34) и u есть неотрицательное решение уравнения (22) в шаре $B_{8R} \subset D$ с

---

[4] Acerbi, E., Fusco, N. A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. -1991. v.2, no. 1. -p.1-16.

центром нагиперплоскости $\sum$, то в концентрическом шаре $B_R$ радиуса $R$ справедливо неравенство

$$\inf_{B_R} u + R \geq C(n,p,q) \sup_{B_R^-} u$$

в котором используется обозначение (20) и постоянная $C$ зависит только от $n,p,q$.

Доказательство теоремы 14 основано на следующем утверждении, в котором полагается

$$\vartheta(x) = \begin{cases} w(x), & \text{если} \quad x \in D^{(2)} \\ \min(w(x), \widetilde{w}(x)), & \text{если} \quad x \in D^{(1)}. \end{cases}$$

**Лемма 8.** Для любого $q_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\inf_{B_R} \vartheta(x) \geq C(n,p,q,q_0) \left( \oint_{B_{2R}} \vartheta^{-q_0}(x) dx \right)^{-1/q_0}.$$

Или, так как $w \geq \vartheta$, то

$$\inf_{B_R} w(x) \geq C(n,p,q,q_0) \left( \oint_{B_{2R}} \vartheta^{-q_0}(x) dx \right)^{-1/q_0}.$$

**В третьей главе** рассматриваются неравномерно вырождающиеся дивергентные эллиптические уравнения второго порядка. Основные результаты этой главы опубликованы в работах авторах [2,3,7,9, 23,41].

В 3.1 доказывается однозначная слабая разрешимость в анизотропных весовых пространствах Соболева первой краевой задачи в ограниченной области D диаметра d для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u =$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad u/\partial D = 0, \tag{35}$$

где $f \in L_2(D)$, $\dfrac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}} \in L_2(D)$; $i = 1,...,n$.

Матрица старших коэффициентов является измеримой, симметричной и для всех $\xi \in E_n$, $x \in D$

$$\gamma \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\xi_i^2,\ \gamma \in (0,1]\text{-константа}, \quad (36)$$

где

$$\lambda_i(x) = \left(|x|_\alpha\right)^{\alpha_i},\ |x|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{2}{2+\alpha_i}},\ \alpha_i \ge 0;\ i = 1,...,n. \quad (37)$$

В этом разделе доказывается следующее утверждение типа неравенства Соболева. Ниже обозначим через $W^1_{p,\alpha}(D)$ банахово пространство функций $u(x)$, заданных на $D$, с конечной нормой

$$\|u\|_{W^1_{p,\alpha}(D)} = \left[\int_D \left(|u|^p + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(x))^{p/2} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right) dx\right]^{1/p},\ (1 < p < \infty),$$

а через $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\alpha}(D)$-подпространство $W^1_{p,\alpha}(D)$, плотным множеством в котором является совокупность всех функций из $C_0^\infty(D)$. Положим $\alpha^- = \min\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, $\alpha^+ = \max\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$.

**Теорема 15.** Пусть функции $\lambda_i, i = 1,...,n$ определены равенством (37). Тогда для всякого $p, \dfrac{2n}{n+2} < p < 2$ и любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(D)$ при выполнении условия

$$\alpha^+ < \frac{4-2p}{3p-2} \quad (38)$$

справедлива оценка

$$\|u\|_{L_{\frac{np}{n-p}}(D)} \le c_2 \left( \int_D \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \tag{39}$$

где $c_2 = c_1 \left(2d^{n-1}\right)^{\frac{2-p}{2p}} \left( \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{\frac{p-2}{p}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{\gamma_i(2-p)}{p}} \right)^{1/2}$,

$$\gamma_i = \frac{4-2p-\alpha_1(3p-2)}{(2+\alpha_i)(2-p)}, \; i = 1,\dots,n.$$

Будем предполагать, что относительно младших коэффициентов оператора $L$ выполнены условия

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{b_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right\|_{L_r(D)} < \frac{\mu}{c_3}, \tag{40}$$

$$c(x) \in L_r(D), \; c(x) \le 0. \tag{41}$$

Здесь $r > n$, а константа $c_3$ определяется точно так же как и константа $c_2$ при $p = \dfrac{2rn}{(n-1)r+n}$. С помощью сформулированной теоремы вложения устанавливается однозначная слабая разрешимость первой краевой задачи.

**Теорема 16.** Если выполнены условия (36)-(41), то первая краевая задача (35) однозначно слабо разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(D)$ для всех $f \in L_2(D)$, $\dfrac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}} \in L_2(D)$; $i = 1,\dots,n$.

Кроме того, установлена оценка решений задачи (35).

**Теорема 17.** Если выполнены условия предыдущей теоремы, то для слабого решения $u(x)$ первой краевой задачи (35) справедлива оценка

$$\|u\|_{W^1_{2,\alpha}(D)} \le c \left( \|f\|_{L_2(D)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right\|_{L_2(D)} \right),$$

в которой положительная константа $c$ зависит только от $n,d,r,\mu,\omega$ и вектора $\alpha$.

В 3.2 исследуется модуль непрерывности в граничной точке решения задачи Дирихле для однородного уравнения Lu=0 из (35) без младших коэффициентов с краевым условием $u=\varphi$ на границе области D с непрерывной на $\partial D$ граничной функцией $\varphi$. Ниже $\varepsilon_R^y(k)$, где $y\in R^n, R>0, k>0$, означает замкнутый эллипсоид $\left\{x:\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-y_i)^2}{R^{\alpha_i}}\le (kR)^2\right\}$. Введем еще понятие емкости компакта K, строго внутреннего относительно фиксированного эллипсоида $\Sigma$. Пусть $V_\Sigma(K)=\{u\in \dot{W}^1_{2,\alpha},\quad u\ge 1$ на $K$ в смысле $W^1_{2,\alpha}\}$,

$$J_\Sigma(u)=\int_\Sigma \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.$$

Число $cap_\Sigma(K)=\inf_{u\in V_\Sigma(K)} J_\Sigma(u)$ называется емкостью компакта $K$ относительно $\Sigma$, порожденной оператором $L$. В следующем утверждении $\Sigma$ означает эллипсоид $\varepsilon_1^0(1)$ и предполагается, что граница области D содержит начало координат.

**Теорема 18.** Если $u\in W^1_{2,\alpha}(D)$ слабое решение задачи Дирихле для уравнения $Lu=0$, коэффициенты которого удовлетворяют условию (36) и граничная функция $\varphi$ обращается в нуль в пересечении $\partial D$ с $\Sigma$, то имеет место оценка

$$|u(x)|\le C_1(\alpha,\mu,n)\sup_{\partial D}|\varphi|\exp\times$$
$$\times\left[-C_2(\alpha,\mu,n)\sum_{i=1}^{\ln\frac{1}{|x|}/(2+\alpha^+)} e^{i(n-2+|\alpha|/2)}cap_{\Sigma}\left(\varepsilon^0_{e^{-i}}\setminus D\right)\right].$$

3.3 посвящен оценке максимума модуля собственных функций задачи Дирихле для эллиптических уравнений, содержащих большой параметр на части области. А именно, в ограниченной липшицевой области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, разделенной гиперплоскостью на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ ,рассматриваются собственные функции задачи

$$-L_\varepsilon u = \lambda \omega_\varepsilon(x) u, u\big|_{\partial D} = 0, \tag{42}$$

для оператора $L_\varepsilon$ вида (29), коэффициенты которого удовлетворяют условию (30) с весом

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, x \in D^{(1)} \\ \varepsilon^{-1}, x \in D^{(2)}, \varepsilon \in (0,1] \end{cases}. \tag{43}$$

Собственные функции нормированы равенством

$$\int_D u^2 \omega_\varepsilon dx = 1. \tag{44}$$

Ниже $u_m$ означает собственную функции задачи (42) отвечающую собственному значению $\lambda_m$.

**Теорема 19.** Если выполнены условия (30) и (43), то в предположении (44) для собственных функций задачи (42) справедлива оценка

$$\sup_{x \in D} |u_m(x)| \leq C \lambda_m^{\frac{n}{4}}.$$

с постоянной $C$, зависящей только от $n$, области $D$ и константы $\gamma$ из (30).

**В четвертой главе** рассматриваются неравномерно вырождающиеся дивергентные параболических уравнений второго порядка. Основные результаты этой главы опубликованы в работах авторах [1,4,5,6,32,39].

В 4.1 исследуется класс параболических уравнений 2-го порядка дивергентной структуры с неравномерным степенным вырождением. Доказывается однозначная слабая разрешимость первой краевой задачи для таких уравнений в весовых пространствах Соболева.

Ниже $E_n$ и $R_{n+1}$ – евклидовы пространства точек $x=(x_1,...,x_n)$ и $(x,t)=(x_1,...,x_n,t)$ соответственно, $\Omega \subset E_n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$, $0\in\Omega$, $T_0$ и $T$ – положительные числа, $Q_T=\Omega\times(-T_0,T)$.Рассмотрим в цилиндре $Q_T$, с ограниченным основанием $\Omega$ первую краевую задачу

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f,\ f\in L_2(Q_T), \tag{45}$$

$$u\big|_{S_T}=0, \qquad u\big|_{Q_0}=0, \tag{46}$$

в предположении, что $\left\|a_{ij}(x,t)\right\|$ – симметрическая матрица с измеримыми в $Q_T$ элементами, и для $(x,t)\in Q_T$, $\xi\in E_n$ выполнено условие равномерной эллиптичности

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2. \tag{47}$$

$\mu\in(0,1]$ – константа, где $\lambda_i(x,t)=\left(|x|_\alpha+\sqrt{|t|}\right)^{\alpha_i}$, $|x|_\alpha=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\overline{\alpha}_i}$,

$\overline{\alpha}_i=\dfrac{2}{2+\alpha_i}$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\alpha_i\ge 0$, $i=1,...,n$.

Разрешимость задачи (45) – (46) исследуется в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$, которое определяется пополнением по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)}=\left[\underset{t\in[-T_0,T]}{vrai\max}\int_\Omega u^2dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\lambda_i(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}$$

множества бесконечно дифференцируемых в замыкании $Q_T$ функций, равных нулю вблизи $S_T$. Ниже $\alpha^+<2$, определяется как в (38).

Получен следующий результат.

**Теорема 20.** Если коэффициенты оператора $L$ удовлетворяют условию (47) и $\alpha^+ < 2,$ то первая краевая задача (45)-(46) однозначно слабо разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ для всех $f \in L_2(Q_T)$ и для решения $u$ этой задачи справедлива оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)} \le C_3(\mu, \alpha, \Omega,)\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

4.2 посвящен гёльдеровской непрерывности решений однородного параболического уравнения (45) в ограниченной области $\Omega \subset R^{n+1}$ при дополнительном предположении

$$0 \le \alpha_i < \frac{2}{n-1}, i = 1,...,n \tag{48}$$

Предварительно обозначим через $\Omega^\rho$ совокупность точек $(x', t') \in \Omega,$ для которых цилиндр $\{(x,t): |x - x'| < \rho, t' - \rho^2 < t < t'\}$ содержится в $\Omega$. Для слабых решений указанного уравнения доказывается следующая априорная оценка нормы Гёльдера в окрестности точки вырождения.

**Теорема 21.** Слабое решение u однородного уравнения (45), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (47), (48) непрерывно по Гёльдеру в $\Omega$ и для любого $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{C^\lambda(\Omega^\rho)} \le H\|u\|_{C(\Omega)},$$

в котором $\lambda$ зависит от $\alpha_1,...,\alpha_n$ ,n,а $H$ - еще и от $\rho$.

В 4.3 доказывается неравенство Харнака в окрестности точки вырождения для слабых неотрицательных решений однородного уравнения из предыдущего раздела.

Для формулировки полученного результата положим

$$Q(\rho) = (-\rho^2 R^2, 0) \times \varepsilon^0_{\rho R}(1),\ S(\rho) = \left(-\left(\frac{1}{3} + \rho\right)R^2, -\left(\frac{3}{4} - \rho\right)R^2\right) \times \varepsilon^0_{\rho R}(1)$$

$$P(R) = (-R^2, 0) \times \varepsilon^0_R(1).$$

**Теорема 22.** Если и является неотрицательным решением однородного уравнения (45) в цилиндре P(4R), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (47) и (48), то справедливо неравенство Харнака вида

$$\sup_{S\left(\frac{1}{3}\right)} u(x,t) \le c \inf_{Q\left(\frac{1}{3}\right)} u(x,t)$$

с постоянной c, не зависящей от u и R.

В 4.4 результаты раздела 4.3 обобщаются на однородные неравномерно вырождающиеся уравнения вида (45) при более общих требованиях на функции $\lambda_i(x,t)$ , $i = 1,...,n$ . А именно, предполагается, что коэффициенты уравнения (45) в рассматриваемой области удовлетворяют условию (47), в котором

$$\lambda_i(x,t) = g_i\left(\rho(x) + \sqrt{|t|}\right), \quad \rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\left(|x_i|\right), \tag{49}$$

где $g_i(z) = \dfrac{\left(\omega_i^{-1}(z)\right)^2}{z^2}; i = 1,2,...,n.$ Функции $\omega_i(t)$ строго монотонно возрастают, $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i^{-1}(t)$-, обратная к функции $\omega_i(t)$ и для $i = 1,2,...,n$

$$\omega_i(2t) \le 2\omega_i(t), \tag{50}$$

$$\left(\frac{\omega_i(t)}{t}\right)^{q-1} \int_0^{\omega_i^{-1}(t)} \left(\frac{\omega_i(z)}{z}\right)^{q} dz \le c_1 t \tag{51}$$

с некоторой постоянной $q > n$ и положительной постоянной $c_1$ не зависящей от $t$. Простым примером функций $\omega_i$ является функция $\omega_i(t) = t^{\alpha_i}$ где

$$\alpha_i \ge \frac{-1 + \sqrt{1 + 4q(q-1)}}{2(q-1)}.$$

Положим

$$S(\rho)=\{(x;t):|x_i|<\rho\omega_i^{-1}(R), i=1,2,...,n\}\times(-(1/3+\rho)R^2, -(3/4-\rho)R^2),$$

$$Q(\rho)=\Pi_{\rho R}\times(-\rho^2R^2,0);$$

где

$$\Pi_R=\{x:|x_i|<\omega_i^{-1}(R), i=1,2,...,n\},$$

$$P(R)=\Pi_R\times(-R^2,0).$$

Получен следующий результат

**Теорема 23.** Если $u$ неотрицательное решение уравнения (45) в цилиндре P(4R), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (47)-(48) и (50)-(51), то справедливо неравенство Харнака

$$\sup_{S\left(\frac{1}{3}\right)} u \le C \inf_{Q\left(\frac{1}{3}\right)} u$$

с постоянной C, не зависящей от $u$ и $R$.

В 4.5 неравенство Харнака, полученное в 4.4, применяется для доказательства гёльдеровской непрерывности слабых решений однородного уравнения.

## ВЫВОДЫ

В диссертации получены следующие основные результаты:

1.Изучены линейные эллиптические уравнения с частично макенхауптовым весом. Доказана гёльдеровская непрерывность решений.

2.Рассмотрены нелинейные эллиптические уравнения типа $p$-лапласиана с частично макенхауптовым весом. Доказаны гёлдеровская непрерывность решений и неравенство Харнака.

3.Изучены равномерно вырождающиеся по малому параметру на части области эллиптические уравнения типа $p(x)-$ лапласиана, доказана гёлдеровская непрерывность решений.

4. Рассмотрены линейные и нелинейные эллиптические уравнения типа $p$-лапласиана, вырождающиеся по малому параметру на части области. Доказаны неравенство Харнака и гёльдеровская непрерывность решений таких уравнений без веса и для уравнений, содержащих макенхауптовый вес. Отдельно рассмотрено уравнение $p$-лапласа с переменным двухфазным показателем $p$ в случае, когда границей раздела фаз является гиперплоскость.

5.Изучены линейные неравномерно вырождающиеся эллиптические уравнения. Доказана разрешимость задачи Дирихле для одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка.

6.Дана оценка модуля непрерывности граничной точке решения задачи Дирихле для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка.

7.Для линейного эллиптического уравнения 2-го порядка, содержащего большой параметр на части области, найдена равномерная по параметру оценки модуля первой собственной функции.

8.Для линейных неравномерно вырождающихся дивергентных параболических уравнений доказана слабая разрешимость первой краевой задачи в весовых пространствах Соболева.

9.Доказано неравенство Харнака для решений неравномерно вырождающихся дивергентных параболических уравнений 2-го порядка.
10.Показана непрерывность по Гёльдеру решений неравномерно вырождающихся параболических уравнений второго порядка в дивергентной форме.

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах**:

1. Mamedov, I.T., Guseynov, S.T. On weak solvability of the first boundary value problem for second order non-uniformly degenerate parabolic equations in divergence form// -Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, -2000. v.XIII(XXI), -p.97-104.
2. Mamedov,I.T., Guseynov,S.T. Dirichlet problem for one class of nonuniformly degenerate second order elliptic equations//-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,- 2001, v.XIV(XXII), -p.59-66.
3. Гусейнов, С.Т. О модуле непрерывности в граничной точке решения задачи Дирихле для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук, -2001. №4. -с.92-99.
4. Guseynov, S.T. On an apriori estimation of a Holder norm of solutions of the second order non-uniformly degenerating parabolic equations //-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,-2002. vol.16(24) -p.45-49.
5. Гусейнов, С.Т. О внутренней гладкости решений вырождающихся параболических уравнений 2-го порядка// Науч. конф. посвящ.70-летию проф.Г.К.Намазова , -Баку: 2002, -с.56-58.

6. Guseynov, S.T. A Harnack's i nequality for the solution of non-uniformly degenerate divergent parabolic equations of the second order//-Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, series of phys.-tech. and math. sciences, -2002. v. XXII, № 1,-pp. 102-112.
7. Гусейнов, С.Т. Оценка максимума модуля решений вырож- дающихся эллиптических уравнений 2-го порядка// Тезисы X межд.конф.по мат.и механ. посвящ.45-летию ИММ, -Баку: -5-7 ,мая-2004, -с.60.
8. Гусейнов, С.Т. О Гельдеровости W и H- решений одного эллиптического уравнения// Всерос. конф. «Диф. уравнения и их приложения», - Самара: -27 июня-2 июля,-2005, -с.24-25.
9. Гусейнов, С.Т. О разрешимости первой краевой задачи для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка//Тезисы межд. конф. по мат.и механ. посвящ. 50-летию чл.-корр. НАНА проф. И.Т.Мамедова, -Баку: -11-13 мая -2005, -с.81.
10. Гусейнов, С.Т. Однозначная разрешимость задачи Дирихле для равномерно вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка.// Тезисы конф. «Теор. и прикладные задачи операторных уравнений», посвящ. 75-летию проф. Я.Д.Мамедова, - Баку:-2006, -с.56-57.
11. Гусейнов, С.Т. Первая краевая задача для равномерно вырождающихся дивергентных эллиптических уравнений второго порядка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат. наук,- 2006. № 2 -с.41-48.
12. Guseynov, S.T. On Holder continuity of solutions of a second order one uniformly degenerating elliptic equation //-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, -2006. vol. XXIV (XXXII). -p.75-86.
13. Guseynov, S.T. On density of smooth functions in Sobolev weight space//-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,-2007. v. XXVI (XXXIV). -p.69-74.
14. Гусейнов, С.Т. О Гельдеровости решений одного эллип-тического уравнения. Тезисы XIII международной конф. по мат.

и мех. посв.70-летию со дня рожд. действительного члена НАНА, проф. А.Д.Гаджиева ,-Баку:-21-23 ноября, -2007, -с.61.
15. Гусейнов, С.Т. О разрешимости задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений //Əməkdar elm xadimi akad. Ə.Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konf. tezisləri,-Bakı:- 2007, s.72-73.
16. Гусейнов, С.Т. Внутренняя оценка нормы Гельдера решений неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений// Мат. меж. Российско-Азерб. симп. «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информ.» и VI школы молод. учён. «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики»//- Нальчик:-Эльбрус, 30-31-марта,-2008, -с.58.
17. Гусейнов, С.Т. О гёльдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений// Azərbaycanın ümummilli lideri Heydər Əliyevin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Resp. Elmi konf. mater., Баку:- 2008, -с.46-48.
18. Гусейнов, С.Т. Гёльдерова непрерывность решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста// Вестник Бакинского Унив. сер.физ.-мат. наук, Баку: -2008, №3, -с.25-33.
19. Гусейнов, С.Т., Алиев, М.Дж. Первая краевая задача для вырождающихся уравнений второго порядка//Тезисы Док. III меж. Конф. Посв.85-летию чл.корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева,-Москва: 25-29 марта - 2008. -с.251-252.
20. Алхутов, Ю.А., Гусейнов, С.Т. Гёльдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения//-Москва: Дифференциальные уравнения, - 2009. т.45, №1, -с.54-59.
21. Guseynov, S.T., Aliyev, M.J. On Hölder continuity of p(x)-hormonik funktions// Abstracns of the third congress of the world matematical socirty of Turkic countries ,-Almaty: -Yune 30-Yuly 4,-2009,-p.211.
22. Гусейнов,С.Т. О Гёльдеровости решений одного эллиптического уравнения//Тезисы международной конференций по

математике и механике, посвященной 50-летию ИММ НАН Азербайджана,-Баку:-6-8 мая,-2009,-с.120-121.
23. Гусейнов, С.Т., Алиев М.Дж. Теорема типа Фрагмена-Линдельефа для решений неравномерно вырождающихся на бесконечности эллиптических уравнений второго порядка// Межд. конф. по дифференц. уравн. и динамическим системам, -Суздаль: - 2-7 июля,- 2010, -с.69-70.
24. Гусейнов, С.Т.,Алиев, М.Дж. Неравенства типа Харнака для решений эллиптических уравнений с нестандартным услови- ем роста// Тезисы международной конференций по матема- тике и механике, посвященной 80-летному юбилею академика Ф.Г. Максудова,- Баку:-17-19 март,-2010,- с.135-136.
25. Гусейнов, С.Т. Задача Дирихле для одного класса равномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка// -Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук,- 2010. № 1, -с.15-20.
26. Гусейнов, С.Т. О Гельдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений с нестандартным условием роста. Мат. конф., посвящ.100-летнему юбилею акад. З.И.Халилова, -Баку:- 12-14 января, -2011, -с.121-122.
27. Guseynov, S.T. On solvability of Dirichlet generalized problem for second order quasilinear elliptic equations//IV Congress of the Turkic world mathematical society,- Baku: -1-3 Yuly ,-2011,-p.203.
28. Гусейнов, С.Т. О разрешимости задачи Дирихле для квази- линейных эллиптических уравнений второго порядка// -Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук,-2011.№ 2, -с. 50-54.
29. Гусейнов, С.Т.,Алиев, М.Дж. О гёльдеровой непрерывности решений равномерно вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка//Теории функций и проблемы армонического анализа материалы межд. конф., посв. 100-летному юбилею академика И.И.Ибрагимова, 28 феврал-01март, –Баку:-2012, -с.82.

30. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака слабого типа для решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук,-2012. №3, -с.63-67.
31. Гусейнов, С.Т., Алиев, М.Дж. Гёльдерова непрерывность решений неравномерно вырождающихся параболических уравнений //Тезисы межд. конф., посв. 90-летию со дня рождения Г.Алиева, -Баку: -2013 , -с.152-153.
32. Guseynov, S.T. On Hölder continuity of solutions of second order non uniformly degenerate parabolic equations in divergent form// Appled. Mathematical Sciences, Hikari Ltd., -2013.v.7, no 90. -pp.4475-4482.
33. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака для неравномерно вырождающихся параболических уравнений второго поря- дка// Riyaziyyat və Mexanika Institutunun 55-illiyinə həsr olunmus Beynəlxalq konfransın Materialları,15-16 may,-Баку:- 2014, -с. 137-138.
34. Huseynov, S.T., On Holder property of solution of degenerate quasilinear elliptic equations//Applied Mathematical Sciences, Hikari Ltd., -2015.vol.9, no.100, -pp.4979-4986.
35. Huseynov, S.T. Hölder continuity of solutions of $p$-laplacian with partially Muckenhoupt weigh// International Journal of Evolution Equations, -2015. vol. 10, no. 1, -pp.43-51.
36. Guseynov, S.T. On a class of degenerated quazilinear elliptic equations with non-standart growth condition// The 5-th International Conference on Control and Optimization With Industrial Applications, 27-29 Auqust , Baku:- 2015.-p.333-335.
37. Гусейнов, С.Т. Оценка нормы Гёльдера и неравенство Харнака для решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений. Межд. конф. по дифференц. уравн. и динамическим системам,- Суздаль:-8-12 июля ,-2016, -с.58-59.
38. Гусейнов, С.Т. Гёльдеровская непрерывность решений $p$-лапласиана с вырождающимся в части области макен-хауптовым весом//-Баку: Proceedings of IAM. -2016. v. 5, № 2, -p.196-204.

39. Huseynov, S.T. Harnack type inequality for non-negative solu- tions of second order degenerate parabolic equations in divergent form// Electronic Journal of Differential Equations, vol. -2016 (2016), no.278, -pp.1-11.
40. Huseynov, S.T. Hölder continuity for $(p,q)$-Laplace equations that degenerate uniformly on part of the domain// Electronic Journal of Differential Equations, vol.-2017(2017), no.308 , -pp. 1-12.
41. Гусейнов, С.Т. О равномерной в области оценке модуля собственной функции для эллиптического уравнения, содержащего большой параметр на части области// -Баку:Proceedings of IAM, -2017. v.6, №1, -pp.151-156.
42. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака для решений p-лапласиана с частично макенхауптовым весом//-Москва: Дифференциальные уравнения, -2017. т. 53, № 5, -с. 653–664.
43. Гусейнов, С.Т. Гёльдеровская непрерывность и неравенство Харнака для решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения, содержащего $p-$Лапласиан//-Киев: Украинский математический журнал, -2017. т.69, №12, -с.1596-1604.
44. Гусейнов, С.Т., Садигов, М.Н. О непрерывности по Гёльдеру решений вырождающихся квазилинейных уравнений эллип- тического типа// Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Баку: -25-26 мау, -2017, -s.144-145.
45. Alkhutov, Yu. A., Huseynov, S.T. Harnak's inequality for *p*-Laplacian equations with Muckenhoupt weight degenerating in part of the domain// Electronic gournal of differential equations.-Texac:-vol. 2017 (2017), no.79, pp.1-13.
46. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка// Межд.конф.по дифференц. уравн. и динамическим системам, -Суздаль:- 6-11 июля, -2018,-с.77-78.

47. Huseynov, S.T. Harnack inequality for $(p,q)$ -laplacian equations uniformly degenerated in a part of domain// Electronic Journal of Differential Equations, vol. -2018(2018), no.143 , -pp. 1-7.
48. Huseynov, S.T. Harnack inequality of solutions to nonlinear elliptic equations degenerated on a part of the domain// Proceedings of the 6th international conference on control and optimization with industrial applications, -Baku:- vol.2,11-13 July,-2018,p. 157-159.

Автор глубоко чтит память своего учителя, покойного профессора член-корр. НАН Азербайджана И.Т.Мамедова и выражает искреннюю благодарность профессору Ю.А.Алхутову за постоянное внимание к работе.

Защита диссертации состоится **14 января 2022 года в $14^{00}$** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **10 декабря 2021 года.**

Подписано в печать: 29.10.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 72399
Тираж: 70