

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

**ÇƏKİLİ HARDİ OPERATORUNUN VƏ ONUN
KOMUTATORUNUN ORLIÇ-MORRİ FƏZASINDA
MƏHDUDLUĞU**

İxtisas: 1202.01 – Analiz və funksional analiz
Elm sahəsi: Riyaziyyat
İddiaçı: **Züleyxa Oruc qızı Əzizova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2025

Dissertasiya işi Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin “Ümumi və tətbiqi riyaziyyat” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Cavanşir Cavad oğlu Həsənov

Rəsmi opponətlər:

fizika -riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Alik Malik oğlu Nəcəfov

fizika -riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Fuad Ağca oğlu Abdullayev

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
Cavanşir Vəqif oğlu Əzizov



Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:

Akademik, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

M. Fərman

Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev

Dissertasiya şurasının elmi katibi:

fizika –riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Z. Xankişiyev

Zakir Fərman oğlu Xankişiyev

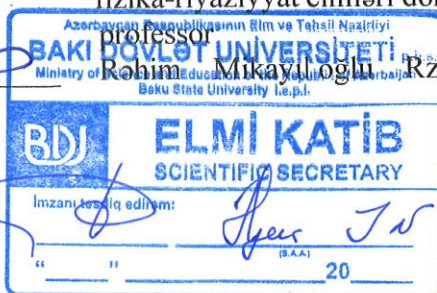
Elmi seminarın sədri:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,

professor

R. R. Rzayev

Rohim Mikayıl oğlu Rzayev



İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi:

Dissertasiya işi ümumiləşmiş çoxdəyişənli çəkili Hardi, çəkili qoşma Hardi operatorlarının və onların komutatorlarının dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş çəkili Morri, ümumiləşmiş “tamamlayıcı” çəkili Morri, ümumiləşmiş çoxdəyişənli çəkili Hardi-Cezaro, çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorlarının və onların komutatorlarının Morri, çoxdəyişənli çəkili kəsr Hardi, çəkili qoşma kəsr Hardi operatorlarının və onların komutatorlarının ümumiləşmiş Orliç-Morri, ümumiləşmiş “tamamlayıcı” Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu məsələsinə həsr olunmuşdur. Bunlardan əlavə alınmış nəticələrin bəzi tətbiqləri araşdırılmışdır.

Keçən əsrin əvvəllərindən başlayaraq D.Hilbert tərəfindən ədəbiyyatlarda Hilbert bərabərsizliyi kimi tanınan bərabərsizlik isbat olundu. Bu işdən sonra bir çox riyaziyyatçılar müxtəlif bərabərsizliklər üzərində çalışdılar.

Hilbert bərabərsizliyindən fərqli və daha sadə isbata malik integral formada Hardi bərabərsizliyi 1920-ci ildə G.Hardi tərəfindən isbat edildi. 1925-ci ildə isə G.Hardi məqaləsində ardıcılıqlar üçün də bu bərabərsizliyi isbat etmişdir. Hardinin işlərindən sonra bir çox riyaziyyatçılar Hardi bərabərsizliyini fərqli şəkildə göstərə bilmişlər. Hardi bərabərsizliyi riyaziyyatın bir çox sahələrində geniş tətbiq olduğundan riyaziyyatçılar tərəfindən çox geniş və fərqli araşdırmalar aparılmışdır. Hardi bərabərsizliyi adi diferensial tənliklər nəzəriyyəsində, diferensial tənliklərin həllərinin xassələri, diferensial operatorun spektral nəzəriyyəsi, operatorlar üçün interpolasiya teoremlərində, çəkili Sobolev fəzalarında daxilolma teoremləri, Furye sıraları, Laplas çevirmələrində çox geniş tətbiq olunan bərabərsizlikdir. Bundan başqa fizikanın elektromaqnit dalğalarının riyazi ifadələrində Hardi bərabərsizliyi tətbiq olunur.

1950-ci illərin sonlarında və 1960-cı illərin əvvəllərində P.R. Beesach Hardi bərabərsizliklərinin sistematik bir araşdırmasına müvəffəq oldu. P.R.Beesach işlərində $p = q$ halı ilə bərabər $p < 0$

halını və hətta $0 < p < 1$ halını da araşdıraraq ikiçəkili tərs bərabərsizliklər almışdır. P.R. Beesach çəkili Hardi bərabərsizliklərini $\varepsilon = p - 1$ daxil olmayan bərabərsizliklər siniflərinə qədər genişləndirdi. 1963-cü ildə Kadlec və Kufner öz işində x^ε qüvvət funksiyası yerinə $x^\varepsilon |\log x|^\eta$ çəki funksiyası götürməklə yeni nəticəyə imza atdılar. $p = q$ olduqda yarımoxda G.Tanelli 1966, 1967 və 1969-cu illərdə, G.Tomaselli 1969-cu ildə çəkili Hardi bərabərsizliklərində zəruri və kafi şərtlər tapmağa nail olmuşlar.

Xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllərinin lokal xassələrini araşdırarkən, çəkili Lebeq fəzası ilə bərabər çəkili Morri fəzasının da böyük rolu vardır. Morri fəzaları 1938-ci ildə elliptik tənliklərin və variasiya hesabının bəzi problemləri ilə bağlı olaraq yaranmış və Ç.B.Morri tərəfindən daxil edilmişdir. Klassik Morri fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} := \sup_{x, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))}$$

kimi təyin olunur. Burada $0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p < \infty$

1969-cu ildə C.Petre Morri fəzasında Riss potensialının məhdudluğu teoremini qeyd etmişdir. 1975-ci ildə D. Adams parametrlər üzərinə qoyulan şərtləri dəyişərək Morri fəzasında Riss potensialının məhdudluğunu isbat etmişdir. Bundan başqa 1975-ci ildə V.P.İlin modifikasiya olunmuş Morri fəzasını daxil etmiş və bu işdə daxilolma teoremləri isbat etmişdir. Morri və modifikasiya olunmuş Morri fəzalarında mühüm nəticələr D.Adams, S.Kampanato, C.Petre, M.Teylor, S.Lu, J. Xiao, D.Yanq, Y.Qiqə, T.Miyakama, A.J.Mazzukato, X.Zhon, G.D.Fazio, V.P.İlin, V.S.Quliyev, V.İ.Burenkov, R.V.Hüseynov, A.M.Nəcəfov, M.Ragusa, L.Softova, A.Qoqataşvili, D.Palagachev, Y.Sawano, D.Fan, L.Tang, Jingshi Xu, C.C.Həsənov, R.Ç.Mustafayev və başqalarının işlərində alınmışdır. Sonralar Navye-Stoks, Şredinger tənliklərində, kəsilən əmsallı elliptik tənliklərdə və potensiallar nəzəriyyəsində Morri fəzasında mühüm tətbiqləri tapılmışdır.

Maksimal operator, kəsir-maksimal operator, Riesz potensialı, sinqulyar integral operator və s. kimi harmonik analizin klassik operatorlarının məhdudluq məsələləri geniş araşdırılmışdır. Bu nəticələr xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində səmərəli şəkildə tətbiq oluna bilər. Qeyd etmək lazımdır ki, xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində son illərdə ümumiləşmiş Morri tipli fəzalar mühüm rol oynayır.

XX əsrin 90-cı illərində ümumiləşmiş Morri tipli fəzaların geniş tədqiqatına başlandı. 1991-ci ildə T.Mizuhara ümumiləşmiş Morri fəzasını daxil etdi və bu fəzada bəzi klassik operatorların məhdudluğunu isbat etdi. 1994-ci ildə E.Nakai maksimal operator, Riesz potensialı və sinqulyar integral operatorların ümumiləşmiş Morri fəzasında məhdudluğunu isbat etmişdir. V.S. Quliyev doktorluq dissertasiyasında lokal və tamamlayıcı lokal Morri tipli fəzaları daxil etdi və Li qruplarında təyin edilmiş funksional fəzalarda kəsir integral operatorların və sinqulyar integral operatorların məhdudluğunu araşdırdı. Klassik operatorların ümumiləşmiş Morri tipli fəzalarında məhdudluğu ilə bağlı bir sıra nəticələr bir neçə müəllif tərəfindən əldə edilmişdir. Lakin bütün bu nəticələrdə yalnız Morri tipli fəzaları xarakterizə edən, məhdudluğu təmin edən parametrlər üzrə kafi şərtlər əldə edilmişdir.

XXI əsrin əvvəllərində bu tədqiqat sahəsində yeni dərin inkişaf baş verdi. Xüsusilə, V.S. Quliyev və V.İ. Burenkov ümumiləşmiş Morri tipli fəzalarda klassik operatorların öyrənilməsi ilə əlaqəli harmonik analizdə yeni bir perspektiv inkişaf etdirmişlər. Hazırlanmış metodların əhəmiyyəti ondadır ki, sinqulyar tipli operatorlar siniflərinin məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər əldə edildi. Bu da elliptik və parabolik xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli üçün rəqulyarlıq məsələlərinə tətbiq edildi. Nəticədə ədədi parametrlərin üzərində müəyyən bir sıra zəruri və kafi şərtlər tapıldı.

Harmonik analizin klassik operatorlarının ümumiləşmiş lokal Morri tipli fəzalardan digərinə məhdudluğunu təmin edən funksional parametrlər üzərində şərtlər əldə edilmişdir. Bu tip nəticələr müasir

harmonik analizin inkişafı üçün və ilk növbədə xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün çox vacibdir.

Məlumdur ki, integral operatorların komutatorları harmonik analizdə xüsusi rol oynayır. Komutatorun vacib, ayrılmaz bir operator olduğu və harmonik analizdə əsas rol oynadığı məlumdur. 1965-ci ildə Kalderon Lipschitz əyrisinin Koşi integral problemlərində ortaya çıxan bir növ komutatoru tədqiq etdi. K Kalderon-Ziqmund singulyar integral operatoru və $b \in BMO(R^n)$ olsun. Koifman, Roçberq və Veyss tərəfindən məşhur bir nəticə, $1 < p < \infty$ olduqda $[b, K] = K(bf) - Kf$ komutator operatoru $L^p(R^n)$ fəzasında məhdudluğu isbat edilmişdir. Kalderon-Ziqmund operatorlarının komutatoru ikinci dərəcəli elliptik xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinin requlyarlığının öyrənilməsində mühüm rol oynayır.

$1 < p < \infty$, $r > 0$ olduqda $f \in L^p(R^n \setminus B(x_0, r))$ funksiyası üçün lokal "tamamlayıcı" ümumiləşmiş Morri ${}^c M_{\{x_0\}}^{p, \omega}(R^n)$ fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{{}^c M_{\{x_0\}}^{p, \omega}(R^n)} = \sup_{r>0} \frac{r^{\frac{n}{p'}}}{\omega(r)} \|f\|_{L^p(R^n \setminus B(x_0, r))}$$

şəklindədir.

Lokal "tamamlayıcı" klassik Morri fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{{}^c L_{\{x_0\}}^{p, \lambda}(R^n)} = \sup_{r>0} r^{\frac{\lambda}{p'}} \|f\|_{L^p(R^n \setminus B(x_0, r))} < \infty, \quad x_0 \in R^n$$

şəklindədir, burada $1 < p < \infty$, $f \in L^p(R^n \setminus B(x_0, r))$ və $0 \leq \lambda < n$. Əgər $\lambda = 0$ olarsa ${}^c L_{\{x_0\}}^{p, 0}(R^n) = L^p(R^n)$ olur.

Lokal "tamamlayıcı" ümumiləşmiş Morri fəzasında $\omega(r) = r^{\frac{n-\lambda}{p'}}$ götürsək lokal "tamamlayıcı" klassik Morri fəzasını alarıq, yəni

$${}^c L_{\{x_0\}}^{p, \lambda}(R^n) = {}^c M_{\{x_0\}}^{p, \omega}(R^n) \Big|_{\omega(r)=r^{\frac{n-\lambda}{p'}}}.$$

2008-ci ildə A. Almeida, J.J. Hasanov, S.G. Samko sonlu ölçülü çoxluqda dəyişən dərəcəli Morri fəzasını daxil edib və bu fəzanın xassələri öyrənilməsi ilə yanaşı maksimal operator və dəyişən parametrlı potensial tip operatorun bu fəzada məhdudluğu məsələlərini öyrənmişlər. Sonralar bu fəzada V. Kokilaşvili və A. Mesxi bircins qruplarda maksimal və sinqulyar integral operatorların məhdudluğunu, P.Hästö isə sonsuz ölçülü çoxluqda bu fəzalarda maksimal operatorun məhdudluğunu isbat etdilər.

Tədqiqatın obyektı və predmeti. Çəkili Hardi operatorlarının və onların komutatorlarının dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş çəkili Morri fəzasında, dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş tamamlayıcı çəkili Morri fəzasında, ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasında və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu teoremləri tədqiq olunmuşdur.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin məqsədi çəkili Hardi operatorunun və onun komutatorunun dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş çəkili Morri fəzasında, dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş tamamlayıcı çəkili Morri fəzasında, ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasında və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzasında araşdırılmasına həsr edilmişdir.

Tədqiqat metodları. İşdə həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin, funksional fəzalar nəzəriyyəsinin, harmonik analiz, operatorlar nəzəriyyəsinin, daxilolma teoremləri və funksional analizin üsullarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

1. Çəkili Hardi, çəkili qoşma Hardi operatorların və onların komutatorlarının dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Morri fəzalarında məhdudluğu araşdırılır.

2. Çəkili Hardi-Cezaro, çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorların və onların komutatorlarının Morri fəzasında məhdudluğu araşdırılır.

3. Çəkili kəsir Hardi, çəkili qoşma kəsir Hardi operatorların və onların komutatorlarının ümumiləşmiş Orliç-Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

1. Çəkili Hardi operatorunun və onun komutatorunun dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.
2. Çəkili qoşma Hardi operatorunun və onun komutatorunun dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.
3. Çəkili Hardi-Cezaro operatorunun Morri fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.
4. Çəkili Hardi-Cezaro operatorunun komutatorunun Morri fəzasında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
5. Çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorunun Morri fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.
6. Çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorunun komutatorunun Morri fəzasında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
7. Çəkili kəsr Hardi operatorunun və onun komutatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.
8. Çəkili qoşma kəsr Hardi operatorunun və onun komutatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınmış nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Alınmış yeni nəticələr funksional fəzalar nəzəriyyəsində xüsusi maraq kəsb edir, bundan başqa harmonik analizin inteqral operatorlarının məhdudluq məsələlərində, xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində sərhəd məsələlərinin həlli zamanı, kvazielliptik və hipoelliptik diferensial tənliklərin ümumiləşmiş həllinin diferensial xassələrinin tədqiqində və subelliptik tənliklər nəzəriyyəsində tətbiq oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyada alınmış nəticələr Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin “Ümumi və tətbiqi riyaziyyat” kafedrasının (rəh. prof. A.R.Əliyev), Azərbaycan Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Riyazi analiz” (rəh. AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev) və “Funksional analiz” (rəh. f.-r.e.d., prof. H.İ.Aslanov) şöbələrinin seminarlarında məruzə edilmişdir.

Dissertasiyanın nəticələri “Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics” Beynəlxalq konfransında, Xəzər Universiteti (Bakı, 2018), “Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri” adlı Riyaziyyat və Mexanika Institutunun 60 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2019), ADNSU-nun 100 illiyinə həsr olunmuş “Doktorant, dissertant və gənc tədqiqatçıların” Respublika elmi konfransında (Bakı, 2020), «Уфимская осенняя математическая школа– 2020» Beynəlxalq elmi konfransda (Ufa, 2020), Dahi Azərbaycan alimi və mütəfəkkiri Nəsirəddin Tusinin xatirəsinə həsr olunmuş “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” XI Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2024) məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhvəsi. Alınmış nəticələr və təkliflər müəllifə aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiya işinin əsas nəticələri müəllifin aftoreferatın sonunda verilmiş 12 elmi işində nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin “Ümumi və tətbiqi riyaziyyat” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 194504 işarədir (titul səhifəsi - 372 işarə, mündəricat -1537 işarə, giriş -58271 işarə, birinci fəsil - 84000 işarə, ikinci fəsil - 49000 işarə, nəticə - 1324 işarə). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 101 addan ibarətdir.

Dissertasiyada alınmış nəticələri müzakirə etdiyinə, dəyərli qeydlərə və ruhlandırdığına görə elmi rəhbərim r.e.d. C.C.Həsənova dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

DİSSERTASIYANIN MƏZMUNU

Fərz edək ki, $\Omega \subseteq R^n$ açıq çoxluqdur, $\chi_E(x)$ funksiyası E çoxluğunda xarakteristik funksiyadır, $B(x,r) = \{y \in R^n : |x - y| < r\}$,

$\tilde{B}(x, r) = B(x, r) \cap \Omega$. İndi isə fərz edək ki, Ω çoxluğunda təyin olunmuş və qiymətlər çoxluğu $[1, \infty)$ olan ölçülən $p(\cdot)$ funksiyası verilib. Tutaq ki, $p(\cdot)$ funksiyası

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$$

şərtini ödəyir, burada

$$p_- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) > 1, \quad p_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty.$$

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ fəzası ilə Ω çoxluğunda ölçülən və

$$I_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

şərtini ödəyən $f(x)$ funksiyalar sinifini işarə edək.

$p'(\cdot)$ funksiyasına $p(\cdot)$ funksiyasının qoşması o zaman deyilir ki, istənilən $x \in \Omega$ üçün $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ şərti ödənsin. Onda Hölder bərabərsizliyi

$$\int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| dx \leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} \right) \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}$$

kimi olur.

Dəyişən dərəcəli Lebeq $L^{p(\cdot)}$ fəzası

$$\left\{ f(x) : \left| \int_{\Omega} f(y) g(y) dy \right| < \infty \quad g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega) \right\}$$

fəzası ilə üst-üstə düşür və

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} := \sup_{\|g\|_{L^{p'(\cdot)}} \leq 1} \left| \int_{\Omega} f(y) g(y) dy \right|$$

normaları ekvivalentir.

Dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzası $L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$ aşağıdakı normaya malik ölçülən funksiyalar çoxluğudur

$$\|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \eta > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\eta} \right)^{p(x)} \omega(x) dx \leq 1 \right\}.$$

Aşağıdakı şərti ödəyən ω funksiyalar sinifini $A_{p(\cdot)}(\Omega)$ işarə edirik və dəyişən dərəcəli Makenxaup sinifi adlanır:

$$\sup_B |B|^{-1} \|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))} \|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))} < \infty.$$

$P(\Omega)$ məhdud ölçülən $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ funksiyalar çoxluğudur, $P^{\log}(\Omega)$ isə

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{-\ln|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}, \quad x, y \in \Omega,$$

şərtini ödəyən $p \in P(\Omega)$ funksiyalar çoxluğudur, burada $A = A(p) > 0$ sabiti x, y -dən asılı deyil. $P^{\log}(\Omega)$ ilə $p \in P^{\log}(\Omega)$ və $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğunu işarə edirik. $P_{\infty}^{\log}(\Omega)$ ilə qeyri-məhdud Ω çoxluğunda $p \in P^{\log}(\Omega)$ şərtini və sonsuzluğun ətrafında

$$|p(x) - p(\infty)| \leq \frac{C}{\ln(e+|x|)}, \quad x \in R^n$$

şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğunu işarə edirik, burada $p(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$.

Fərz edək ki, $\lambda(x)$ funksiyası Ω çoxluğunda təyin olunmuş qiymətlər çoxluğu $[0, n]$ olan ölçülən funksiyadır. Dəyişən dərəcəli Morri fəzası $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ lokal inteqrallanan və

$$\|f\|_{L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega, t > 0} t^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|f \chi_{\tilde{B}(x, t)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

sonlu normaya malik funksiyalar fəzasıdır. Analoji olaraq $L_{\omega}^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ dəyişən dərəcəli çəkili Morri fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega, t > 0} t^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|f \chi_{\tilde{B}(x, t)}\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

şəklindədir.

Dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş Morri $M^{p(\cdot), \varphi}(\Omega)$ fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{M^{p(\cdot), \varphi}} = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \frac{r^{-\theta_p(x, r)}}{\varphi(x, r)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x, r))}$$

şəklindədir, haradaki $\theta_p(x, r) = \begin{cases} \frac{n}{p(x)}, & r \leq 1, \\ \frac{n}{p(\infty)}, & r \geq 1 \end{cases}$.

Bu tərifdə $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda(x)-n}{p(x)}}$ götürsək $M^{p(\cdot), \varphi(\cdot)}(R^n)$ fəzası $L^{p, \lambda}(R^n)$ fəzasına çevrilir.

Dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş çəkili lokal Morri $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi, \omega}$ fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi, \omega}(\Omega)} = \sup_{t>0} \frac{1}{\varphi(t)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(0,t))}} \|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(0,t))}$$

şəklindədir.

Bu işdə $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi, \omega}$ fəzasının trivial fəza olmaması üçün φ funksiyasını hər yerdə $\inf_{t>0} \varphi(t) > 0$ şərti ödəyən funksiya kimi götürəcəyik.

Dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş çəkili Morri $M^{p(\cdot), \varphi, \omega}$ fəzasının sonlu norması

$$\|f\|_{M^{p(\cdot), \varphi, \omega}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega, t>0} \frac{1}{\varphi(x, t)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}} \|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}$$

şəklindədir. Qeyd edim ki, p sabit və φ müsbət sabit funksiya olduqda bu fəza $L^{\infty}(\Omega)$ fəzası ilə üst-üstə düşür.

İndi isə dəyişən dərəcəli lokal "tamamlayıcı" ümumiləşmiş Morri ${}^c M_{\{x_0\}}^{p(\cdot), \omega}(\Omega)$ fəzasını daxil edək.

Tərif 1. Fərz edək ki, $x_0 \in \Omega$, $1 \leq p(x) \leq p_+ < \infty$. Dəyişən dərəcəli lokal "tamamlayıcı" ümumiləşmiş Morri ${}^c M_{\{x_0\}}^{p(\cdot), \omega}(\Omega)$ fəzası aşağıdakı sonlu normaya malik

$$\|f\|_{M_{\{x_0\}}^{p(\cdot), \omega}} = \sup_{r>0} \frac{r^{\theta_{p(\cdot)}(x_0, r)}}{\omega(r)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega \setminus \tilde{B}(x_0, r))}$$

funksiyalar sinifinə deyilir.

${}^c M_{\{x_0\}}^{p(\cdot), \omega}(\Omega)$ fəzasının trivial olmaması üçün ümumiləşdirən

funksiya $\sup_{r>0} \frac{r^{\theta_{p(\cdot)}(x_0, r)}}{\omega(r)} < \infty$, şərtini ödəməlidir. Buna görə də bütün işdə

bu şərti qəbul edəcəyik

Dəqiq maksimal funksiya

$$M^\# f(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{\tilde{B}(x, r)} |f(y) - f_{\tilde{B}(x, r)}| dy$$

kimi təyin olunur, burada $f_{\tilde{B}(x, t)}(x) = |\tilde{B}(x, t)|^{-1} \int_{\tilde{B}(x, t)} f(y) dy$.

Fərz edək ki, φ funksiyası müsbət və ölçülən funksiyadır. Lokal integrallanan və aşağıdakı sonlu normaya malik

$$\|b\|_{BMO_{0, p(\cdot), \varphi}} = \sup_{r>0} \frac{\|b(\cdot) - b_{B(0, r)}\|_{L_{\varphi}^{p(\cdot)}(B(0, r))}}{\|\chi_{B(0, r)}\|_{L_{\varphi}^{p(\cdot)}(\Omega)}}$$

funksiyalar sinifinə çəkili lokal $BMO_{0, p(\cdot), \varphi}$ fəzası deyilir.

İkinci paraqrafda çoxdəyişənli çəkili Hardy, çəkili qoşma Hardy operatorların və onların komutatorlarının dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş lokal Morri fəzasında məhdudluğu məsələsi tədqiq edilmişdir.

Fərz edək ki, f funksiyası R^n -də lokal integrallanan mənfi olmayan, u funksiyası müsbət ölçülən funksiyadır. Çoxdəyişənli çəkili Hardy və çəkili qoşma Hardy operatorları

$$H_u f(x) = |x|^{-n} u(|x|) \int_{|y| \leq |x|} \frac{f(y)}{u(|y|)} dy, \quad H_u^* f(x) = u(|x|) \int_{|y| > |x|} \frac{f(y)}{|y|^n u(|y|)} dy$$

kimi təyin edək.

Teorem 1. Fərz edək ki, $p \in \mathbf{P}_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $0 < t < r$, $\gamma \in R$,

$$\frac{t^{\gamma}}{u(t)} \leq C \frac{r^{\gamma}}{u(r)} \text{ və } (\varphi_1, \varphi_2) \text{ funksiyaları}$$

$$\int_0^r \varphi_1(s) \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(r) \quad (1)$$

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(s)}{u(s) \|\omega\|_{L^{p'(\cdot)}(B(0,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_1(t)}{u(t) \|\omega\|_{L^{p'(\cdot)}(B(0,t))}} \quad (2)$$

şərtini ödəyir. Onda çoxdəyişənli çəkili Hardi operatoru $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 2. Fərz edək ki, $p \in \mathbf{P}_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $0 < r < t$,

$$\gamma \in R, \frac{t^{\gamma}}{u(t)} \leq C \frac{r^{\gamma}}{u(r)} \text{ və } (\varphi_1, \varphi_2) \text{ funksiyaları (1) şərtini və}$$

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi_1(s)}{u(s)} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_1(r)}{u(r)} \quad (3)$$

şərtini ödəyirlər. Onda çoxdəyişənli çəkili qoşma Hardi operatoru $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Çoxdəyişənli çəkili Hardi və qoşma Hardi operatorunun komutatorları

$$[b, H_u] f(x) = |x|^{-n} u(|x|) \int_{|z| < |x|} \frac{(b(z) - b(x)) f(z)}{u(|z|)} dz,$$

$$[b, H_u^*] f(x) = u(|x|) \int_{|z| > |x|} \frac{(b(z) - b(x)) f(z)}{|z|^n u(|z|)} dz$$

kimi təyin edək.

Teorem 3. Fərz edək ki, $p \in \mathbf{P}_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $0 < t < r$,

$$\gamma \in R, \frac{t^{\gamma}}{u(t)} \leq C \frac{r^{\gamma}}{u(r)}, b \in BMO_{0, p'(\cdot), \omega^{-1}}(R^n) \text{ və } (\varphi_1, \varphi_2) \text{ funksiyaları}$$

(1), (2) şərtini ödəyir. Onda çoxdəyişənli çəkili Hardi operatorun $[b, H_u]$ komutatoru $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 4. Fərz edək ki, $p \in P_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $0 < r < t$,

$$\gamma \in R, \quad \frac{t^{\gamma}}{u(t)} \leq C \frac{r^{\gamma}}{u(r)}, \quad b \in BMO_{0, p(\cdot), \omega^{-1}}(R^n) \quad \text{və} \quad (\varphi_1, \varphi_2)$$

funksiyaları (1), (3) şərtlərini ödəyirlər. Onda çoxdəyişənli çəkili qoşma Hardi operatorun $[b, H_u^*]$ komutatoru $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını $M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Birinci fəslin üçüncü paraqrafında çoxdəyişənli çəkili Hardi, çəkili qoşma Hardi operatorların və onların komutatorlarının dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş lokal tamamlayıcı Morri fəzasında məhdudluğu teoremləri tədqiq edilmişdir.

Teorem 5. Fərz edək ki, $p \in P_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$ və $u(r)r^{\gamma}$, $\gamma > 0$ funksiyası sanki artan funksiyadır, (φ_1, φ_2) funksiyaları

$$\int_0^t \frac{s^n \varphi_1(s)}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_2(t)}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,t))}}, \quad (4)$$

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(s)}{u(s) \|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_1(t)}{u(t) \|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,t))}} \quad (5)$$

şərtlərini ödəyirlər, burada $t > 0$. Onda çoxdəyişənli çəkili Hardi operatoru ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 6. Fərz edək ki, $p \in P_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $b \in BMO_{0, p(\cdot), \omega^{-1}}(R^n)$ şərtləri ödənilir, $u(r)r^{\gamma}$, $\gamma > 0$ funksiyası sanki artan funksiyadır və (φ_1, φ_2) funksiyaları (4), (5) şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili Hardi operatorunun $[b, H_u]$ komutatoru ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 7. Tutaq ki, $p \in P_{\infty}^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$ şərtləri ödənilir, $u(r)$ funksiyası sanki azalan funksiyadır və (φ_1, φ_2) funksiyaları $t > 0$ olduqda

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(s)}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_2(t)}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,t))}}, \quad (6)$$

$$\int_t^\infty \frac{1}{u(s)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \frac{1}{u(t)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,t))}}, \quad (7)$$

şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili qoşma Hardi H_u^ operatoru ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.*

Teorem 8. *Tutaq ki, $p \in P_\infty^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $b \in BMO_{0, p'(\cdot), \omega^{-1}}(R^n)$ şərtləri ödənilir, $u(r)$ funksiyası sanki azalan funksiyadır və (φ_1, φ_2) funksiyaları (6), (7) şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili qoşma Hardi operatorun $[b, H_u^*]$ komutatoru ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.*

İndi isə bu paraqrafda alınmış nəticələrin tətbiqini verək.

Aşağıdakı L operatorunu

$$Lv = [b, H_u^*]v - v$$

kimi təyin edək. Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$Lv = f.$$

Teorem 9. *Fərz edək ki, $p \in P_\infty^{\log}(R^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(R^n)$, $b \in BMO_{0, p'(\cdot), \omega^{-1}}(R^n)$ şərtləri ödənilir, $u(r)r^\gamma$, $\gamma > 0$ funksiyası sanki artan funksiyadır və (φ_1, φ_2) funksiyaları (1), (2) şərtlərini ödəyirlər. Onda elə $C = C(n, p)$ müsbət sabit var ki,*

$$\|v\|_{M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_2, \omega}(R^n)} \leq C \|Lv\|_{M_{\{0\}}^{p(\cdot), \varphi_1, \omega}(R^n)}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Birinci fəslin dördüncü paraqrafında çoxdəyişənli çəkili Hardi-Cezaro və çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorlarının Morri fəzasında məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır. Bundan başqa çoxdəyişənli çəkili Hardi-Cezaro və Çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorlarının komutatorlarının Morri fəzasında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

Fərz edək ki, f funksiyası R^n -də, u funksiyası R -də lokal integrallanan funksiyalardır. Çoxdəyişənli çəkili Hardi-Cezaro və çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorları

$$H_u f(x) = \int_{B(0,1)} |f(x|y)| |u(|y|)| dy, \quad H_u^* f(x) = \int_{B(0,1)} \left| f\left(\frac{x}{|y|}\right) \right| u(|y|) dy$$

kimi təyin olunurlar.

Teorem 10. Fərz edək ki, $1 \leq p < \infty$ və $0 \leq \lambda < n$. Onda H_u Hardi-Cezaro operatoru $L^{p,\lambda}(R^n)$ fəzasında məhdud olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_{B(0,1)} |y|^{\frac{\lambda-n}{p}} u(|y|) dy < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 11. Fərz edək ki, u funksiyası müsbət ölçülən funksiyadır və

$$\int_{B(0,1)} u(|y|) dy < \infty \quad (8)$$

şərtini ödəyir, onda H_u Hardi- Cezaro operatoru $BMO(R^n)$ fəzasında məhduddur.

Teorem 12. Fərz edək ki, $1 \leq p < \infty$ və $0 \leq \lambda < n$. Onda H_u^* Hard-Cezaro i operatoru $L^{p,\lambda}(R^n)$ fəzasında məhdud olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_{B(0,1)} |y|^{\frac{n-\lambda}{p}} u(|y|) dy < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 13. Fərz edək ki, u funksiyası müsbət ölçülən funksiyadır və (8) şərtini ödəyir, onda H_u^* Hardi- Cezaro operatoru $BMO(R^n)$ fəzasında məhduddur.

Çoxdəyişənli çəkili Hardi-Cezaro və çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorların komutatoru

$$H_{u,b} f(x) = \int_{B(0,1)} |b(x|y) - b(x)| |f(x|y)| |u(|y|)| dy,$$

$$H_{u,b}^* f(x) = \int_{B(0,1)} \left| b\left(\frac{x}{|y|}\right) - b(x) \right| f\left(\frac{x}{|y|}\right) u(|y|) dy$$

kimini təyin edək.

Teorem 14. *Fərz edək ki, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$, $b \in BMO(R^n)$ və u funksiyası müsbət ölçülən funksiyadır*

$$\int_{B(0,1)} (2 + |\ln |y||) |y|^{\frac{\lambda-n}{p}} u(|y|) dy < \infty$$

şərtini ödəyir. Onda $H_{u,b}$ Hardi-Cezaro operatorun komutatoru $L^{p,\lambda}(R^n)$ fəzasında məhduddur.

Teorem 15. *Fərz edək ki, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$, $b \in BMO(R^n)$ və u funksiyası müsbət ölçülən funksiyadır*

$$\int_{B(0,1)} (2 + |\ln |y||) |y|^{\frac{n-\lambda}{p}} u(|y|) dy < \infty$$

şərtini ödəyir. Onda $H_{u,b}^$ çoxdəyişənli çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorun komutatoru $L^{p,\lambda}(R^n)$ fəzasında məhduddur.*

İkinci fəslin birinci paragrafında ümumiləşmiş lokal Orliç-Morri və ümumiləşmiş lokal tamamlayıcı Orliç-Morri fəzaları haqqında məlumat verilmiş və bu fəsildə istifadə olunan faktlar qeyd olunmuşdur.

Tərif 2. $\Phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty]$ funksiyası qabarıq, soldan kəsilməz və $\lim_{r \rightarrow +0} \Phi(r) = \Phi(0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = \infty$ şərtlərini ödəyərsə Φ funksiyasına Yunq funksiyası deyilir.

Bu tərifdə funksiyanın qabarıqlığı və $\Phi(0) = 0$ şərtindən aydın görünür ki, Yunq funksiyası artandır. Əgər $s \in (0, +\infty)$ varsa ki, $\Phi(s) = +\infty$ olsun, onda istənilən $r \geq s$ üçün $\Phi(r) = +\infty$ olur.

Aşağıdakı şərti ödəyən

$$0 < \Phi(r) < +\infty \text{ olduqda } 0 < r < +\infty.$$

Φ Yunq funksiyalar çoxluğunu Y ilə işarə edirik. Əgər $\Phi \in Y$ olarsa, onda Φ funksiyası $[0, +\infty)$ aralığında mütləq kəsilməzdir və həmin aralıqda öz-özünə qarşılıqlı birqiymətlidir.

Tərif 3. Fərz edək ki, f funksiyası lokal integrallananıdır və istənilən $k > 0$ üçün

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(k | f(x) |) dx < +\infty$$

şərtini ödəyən f funksiyalar çoxluğuna Orliç fəzası deyilir. Başqa sözlə

$$L_\Phi(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(k | f(x) |) dx < +\infty \text{ hər bir } k > 0\}.$$

Əgər $1 \leq p < \infty$ olduqda, $\Phi(r) = r^p$ olarsa, onda $L_\Phi(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ olur. Əgər $\Phi(r) = 0$ ($0 \leq r \leq 1$) və $\Phi(r) = \infty$ ($r > 1$) olarsa, onda $L_\Phi(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ olur. $L_\Phi^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fəzası dedikdə bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ kürələr üçün $f|_B \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ olan f funksiyalar çoxluğu götürülür.

Orliç $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ fəzası Banax fəzasıdır və sonlu norması

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

şəklindədir.

Fərz edək ki, ω çəki funksiyası $\mathbb{R}^n$ -də müsbət ölçülən funksiyadır. Çəkili Orliç $L_{\Phi,\omega}(\mathbb{R}^n)$ fəzası

$$L_{\Phi,\omega}(\mathbb{R}^n) := \{f : f\omega \in L_\Phi\}$$

və sonlu norması

$$\|f\|_{L_{\Phi,\omega}} = \|\omega f\|_{L_\Phi}$$

şəklindədir.

Φ Yunq funksiyası və $0 \leq s \leq +\infty$ üçün

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\} \quad (\inf \emptyset = +\infty)$$

olsun.

Əgər $\Phi \in Y$ olarsa, onda Φ^{-1} funksiyası Φ funksiyasının tərs funksiyası adlanır. Qeyd edək ki, Φ^{-1} və Φ funksiyaları

$$\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(\Phi(r))$$

şərti ödənilir.

Əgər hər hansı $k > 1$ üçün $\Phi(2r) \leq k\Phi(r)$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda deyəcəyik ki, Φ Yunq funksiyası Δ_2 şərtini ödəyir

və $\Phi \in \Delta_2$ kimi işarə olunur. Əgər Φ Yunq funksiyası Δ_2 şərtini ödəyirsə, onda $\Phi \in Y$ olur.

$$\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \sup\{rs - \Phi(s) : s \in [0, \infty)\} & , \quad r \in [0, \infty) \\ +\infty & , \quad r = +\infty. \end{cases}$$

funksiyaya Φ Yunq funksiyası üçün tamamlayıcı funksiya adlanır.

$\tilde{\Phi}$ tamamlayıcı funksiyası həmçinin Yunq funksiyasıdır və $\tilde{\tilde{\Phi}} = \Phi$. Əgər $0 \leq r \leq 1$ olarsa, onda $\Phi(r) = r$ funksiyasının tamamlayıcı funksiyası sıfır olar, yəni $\tilde{\Phi}(r) = 0$. Əgər $\Phi(r) = r$ olarsa, onda $0 \leq r \leq 1$ olduqda Φ funksiyasının tamamlayıcı funksiyası sıfır olar, yəni $\tilde{\Phi}(r) = 0$ və $r > 1$ olduqda $\tilde{\Phi}(r) = \infty$ olur. Əgər $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ və $\Phi(r) = r^p/p$ olarsa, onda $\tilde{\Phi}(r) = r^{p'}/p'$ olur. Əgər $\Phi(r) = e^r - r - 1$ olarsa, onda $\tilde{\Phi}(r) = (1+r)\log(1+r) - r$ olur. Qeyd edək ki, $\Phi \in \nabla_2$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ olmasıdır. Aydınır ki, $r \geq 0$ olduqda $r \leq \Phi^{-1}(r)\tilde{\Phi}^{-1}(r) \leq 2r$ olur.

Qeyd edək ki, Yunq funksiyası istənilən $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq t < \infty$ üçün $\Phi(\alpha t) \leq \alpha \Phi(t)$ və istənilən, $0 \leq t < \infty$ üçün $\Phi(\beta t) \geq \beta \Phi(t)$ xassələrini ödəyir.

Tərif 5. (Ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzası) Fərz edək ki, $\varphi(x, r)$ funksiyası $R^n \times (0, \infty)$ -da müsbət, ölçülən funksiya və Φ Yunq funksiyasıdır. $M_{\Phi, \varphi}(R^n)$ ilə $f \in L_{\Phi}^{loc}(R^n)$ sinifindən olan və aşağıdakı sonlu kvazinormaya malik

$$\|f\|_{M_{\Phi, \varphi}} = \sup_{x \in R^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} \|f\|_{L_{\Phi}(B(x, r))}.$$

funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik və bu fəza ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzası adlanır.

Fərz edək ki, f funksiyası R^n -də lokall inteqrallanan mənfə olmayan funksiya. Çoxdəyişənli çəkili kəsir Hardi və çəkili qoşma kəsir Hardi operatorları

$$H_u^\alpha f(x) = |x|^{\alpha-n} u(|x|) \int_{|y|<|x|} \frac{f(y)}{u(|y|)} dy, \quad H_u^\alpha f(x) = |x|^\alpha u(|x|) \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^n u(|y|)} dy$$

kimi təyin edək, burada $\alpha \geq 0$.

Bu paragrafda çəkili kəsir Hardi və çəkili qoşma kəsir Hardi operatorlarının ümumiləşmiş lokal Orliç-Morri fəzasında məhdudluğu üçün Φ , Ψ və φ_1, φ_2 funksiyaları üzərinə kafi şərtlər tapılmışdır.

Teorem 16. *Tutaq ki, Φ , Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$,*

$$f \in L_\Phi^{loc}(R^n), \quad \frac{r^\beta}{u(r)} \leq C \frac{t^\beta}{u(t)}, \quad \varphi_1(0, t)/t^\beta u(t) \leq C \varphi_1(0, r)/r^\beta u(r)$$

$0 < r < t$, $\beta \in R$, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları

$$\int_0^r \frac{t^n \varphi_1(0, t)}{u(t)} \frac{dt}{t} \leq C \frac{r^n \varphi_1(0, r)}{u(r)}, \quad (13)$$

$$\int_0^r \frac{s^\alpha \varphi_1(0, s)}{\Psi^{-1}(s^{-n})} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_2(0, r)}{\Psi^{-1}(r^{-n})} \quad (14)$$

şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili kəsir Hardi H_u^α operatoru $M_{\Phi, \varphi_1}^{0, loc}(R^n)$ fəzasını $M_{\Psi, \varphi_2}^{0, loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 17. *Fərz edək ki, Φ , Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$,*

$$\frac{r^\beta}{u(r)} \leq C \frac{t^\beta}{u(t)} \quad r^\alpha \varphi_1(0, r) \Phi^{-1}(r^{-n}) \leq C t^\alpha \varphi_1(0, t) \Phi^{-1}(t^{-n}), \quad 0 < r < t,$$

$\beta \in R$ şərtləri ödənilir, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları

$$\int_r^\infty \frac{\varphi_1(0, t) \Phi^{-1}(t^{-n})}{u(t)} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi_1(0, r) \Phi^{-1}(r^{-n})}{u(r)}$$

$$\int_0^r \frac{t^\alpha \varphi_1(0, t) \Phi^{-1}(t^{-n})}{\Psi^{-1}(t^{-n})} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi_2(0, r)}{\Psi^{-1}(r^{-n})}$$

şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili kəsir qoşma Hardi H_u^α operatoru $M_{\Phi, \varphi_1}^{0, loc}(R^n)$ fəzasını $M_{\Psi, \varphi_2}^{0, loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Fərz edək ki, f və b funksiyaları R^n -də lokall inteqrallanan mənfi olmayan funksiyalardır. Çoxdəyişənli çəkili kəsir Hardi və çəkili qoşma kəsir Hardi operatorların komutatorları

$$[b, H_u^\alpha] f(x) = |x|^{\alpha-n} u(|x|) \int_{|y|<|x|} \frac{(b(y)-b(x)) f(y)}{u(|y|)} dy,$$

$$[b, H_u^\alpha] f(x) = |x|^\alpha u(|x|) \int_{|y|>|x|} \frac{(b(y)-b(x)) f(y)}{|y|^n u(|y|)} dy$$

kimisi təyin olunur, burada $\alpha \geq 0$.

Teorem 18. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$,

$$b \in BMO_{0,\tilde{\Phi}}(R^n), \quad \frac{r^\beta}{u(r)} \leq C \frac{t^\beta}{u(t)}, \quad \varphi_1(0,t)/t^\beta u(t) \leq C \varphi_1(0,r)/r^\beta u(r)$$

$0 < r < t$, $\beta \in R$ şərtləri ödənilir, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları (13), (14) şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili kəsir Hardi operatorunun $[b, H_u^\alpha]$ komutatoru $M_{\Phi, \varphi_1}^{0,loc}(R^n)$ fəzasını $M_{\Psi, \varphi_2}^{0,loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 19. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$,

$$\frac{r^\beta}{u(r)} \leq C \frac{t^\beta}{u(t)}, \quad 0 < r < t, \quad \beta \in R, \quad b \in BMO_{0,\tilde{\Phi}}(R^n),$$

$r^\alpha \varphi_1(0,r) \Phi^{-1}(r^{-n}) \leq C t^\alpha \varphi_1(0,t) \Phi^{-1}(t^{-n})$, $0 < r < t$ şərtləri ödənilir, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları

$$\int_r^\infty \frac{\varphi_1(0,t)}{u(t)} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi_1(0,r)}{u(r)},$$

$$\int_0^r \frac{t^\alpha \varphi_1(0,t)}{\Psi^{-1}(t^{-n})} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi_2(0,r)}{\Psi^{-1}(r^{-n})}$$

şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili qoşma kəsir Hardi operatorunun $[b, H_u^\alpha]$ komutatoru $M_{\Phi, \varphi_1}^{0,loc}(R^n)$ fəzasını $M_{\Psi, \varphi_2}^{0,loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

İkinci fəslin üçüncü paragrafında çəkili kəsir Hardi, çəkili qoşma kəsir Hardi operatorlarının və onların komutatorlarının ümumiləşmiş lokal tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.

Teorem 20. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$ və $u(r)r^\gamma$, $\gamma > 0$ funksiyası mütləq artan funksiyadır, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları

$$\int_0^r \frac{\varphi_1(t)}{t^n u(t) \Phi^{-1}(t^{-n})} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi_1(r)}{r^n u(r) \Phi^{-1}(r^{-n})}, \quad (15)$$

$$\int_0^r \frac{s^{\alpha-n} \varphi_1(s)}{\Psi^{-1}(s^{-n})} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\varphi_2(r)}{r^n \Psi^{-1}(r^{-n})} \quad (16)$$

şərtlərini ödəyirlər, burada $t > 0$. Onda çoxdəyişənli çəkili Hardi operatoru ${}^c M_{\Phi, \varphi_1}^{0,loc}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\Psi, \varphi_2}^{0,loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 21. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$, $b \in BMO_{0, \tilde{\Phi}}(R^n)$, $\frac{r^\beta}{u(r)} \leq C \frac{t^\beta}{u(t)}$, $\varphi_1(t)/t^\beta u(t) \leq C \varphi_1(r)/r^\beta u(r)$

$0 < r < t$, $\beta \in R$ şərtləri ödənilir və (φ_1, φ_2) funksiyaları (15), (16) şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili kəsir Hardi operatorunun $[b, H_u^\alpha]$ komutatoru ${}^c M_{\Phi, \varphi_1}^{0,loc}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\Psi, \varphi_2}^{0,loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 22. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$, $u(r)$ funksiyası sanki azalan funksiyadır, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları (16),

$$\int_t^\infty \frac{\Phi^{-1}(s^{-n})}{u(s)} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\Phi^{-1}(t^{-n})}{u(t)}, \quad (17)$$

şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili qoşma Hardi H_u^α operatoru ${}^c M_{\Phi, \varphi_1}^{0,loc}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\Psi, \varphi_2}^{0,loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

Teorem 23. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $0 < \alpha < n$, $b \in BMO_{0, \tilde{\Phi}}(R^n)$ şərtləri ödənilir, $u(r)$ funksiyası sanki azalan funksiyadır, (φ_1, φ_2) və (Φ, Ψ) funksiyaları (16), (17) şərtlərini ödəyirlər. Onda çəkili kəsir qoşma Hardi operatorunun $[b, H_u^\alpha]$ komutatoru ${}^c M_{\Phi, \varphi_1}^{0,loc}(R^n)$ fəzasını ${}^c M_{\Psi, \varphi_2}^{0,loc}(R^n)$ fəzasına məhdud köçürür.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi harmonik analizin inteqral operatorlarından olan çəkili Hardi, çəkili qoşma Hardi operatorların və onların komutatorlarının dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş lokal Morri, dəyişən dərəcəli tamamlayıcı ümumiləşmiş lokal Morri, ümumiləşmiş lokal Orliç-Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı lokal Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu məsələlərinə həsr edilmişdir. İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

1. Çəkili Hardi-Cezaro operatorun Morri fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.
2. Çəkili Hardi-Cezaro operatorun komutatorunun Morri fəzasında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
3. Çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorun Morri fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.
4. Çəkili qoşma Hardi-Cezaro operatorun komutatorunun Morri fəzasında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
5. Çəkili Hardi operatorun və onun komutatorunun dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.
6. Çəkili qoşma Hardi operatorun və onun komutatorunun dəyişən dərəcəli çəkili ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.
7. Çəkili kəsr Hardi operatorun və onun komutatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.
8. Çəkili qoşma kəsr Hardi operatorun və onun komutatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri və ümumiləşmiş tamamlayıcı Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat edilmişdir.

Dissertasiyanın nəticələri aşağıdakı işlərdə nəşr olunmuşdur:

1. Aykol C., Azizova Z.O., Hasanov J.J., Generalized weighted Hardy operators and their commutators in the local "complementary" generalized variable exponent weighted Morrey spaces.// J. Math. Anal. -2022. 13(1), -p.14-27.
2. Aykol C., Azizova Z.O., Hasanov J.J., Weighted Hardy operators in local generalized Orlicz-Morrey spaces.// Carpathian Math. Publ. - 2021. 13 (2), -p.522–533.
3. Azizova R.Q., Azizova Z.O., The Boundedness Weighted Hardy Operator in the Orlics- Morrey Spaces.// Caspian Journal of Applied Mathematics Ecology and Economics, -2017.- ISSN:1560- 4055- 2017, v. 5, № 1, -p. 87-92.
4. Azizova Z.O., Hasanov J.J., The weighted Hardy operator and it is commutator on Orlicz-Morrey spaces.// Inter. J. Pure Appl. Math.- 2018, 118(2), -p.385-395.
5. Azizova Z.O., Hasanov J.J., The boundednes weighted Hardy operator in the Orlics-Morrey spaces.//“Riyaziyyat və Mexanikanin Müasir Problemləri” Akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfrans, - Bakı, 6-8 dekabr, -2017, -p. 52.
6. Azizova Z.O., Hasanov J.J., Weighted Hardy type operator in Orlicz-Morrey spaces.// “Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics” International conference, Khazar University – Bakı: - 21-24 may. -2018, -p. 73.
7. Azizova Z.O., Hasanov J.J., Hardy operator in the local “complementary” generalized variable exponent weighted Morrey spaces.// “Riyaziyyat və mexanikanin müasir problemləri” RMI-nın 60 illik yubileyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransı, - Bakı: -23-25 oktyabr -2019, s. 146-148.
8. Azizova Z.O., Hardy type operators in the local "complementary"generalized variable exponent weighted Morrey spaces. // Сборник аннотаций международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа– 2020» г. Уфа, 11 – 14 ноября 2020 г. С. 14.

9. Azizova Z.O., Weighted Hardy operators in the local "complementary" weighted Morrey spaces.// Journal of contemporary Applied Mathematics -2020. v.10, №1, ISSN 2222-5498 -p.76-82.
10. Azizova Z.O., Hardy operators in the local complementary generalized variable exponent weighted Morrey spaces. // International Journal Applied Mathematics, -2020. v.33, №4, -p. 675-684.
11. Azizova Z.O., Generalized weighted Hardy operators in generalized locally weighted Orlicz-Morrey spaces.// ADNSU-nun 100 illiyinə həsr olunmuş doktorant, dissertant və gənc tədqiqatçıların respublika elmi konfransı. –Bakı: 7-8 may -2020, -5 səh.
12. Azizova Z.O., Hasanov J.J., Weighted adjoint fractional Hardy operators in local generalized Orlicz-Morrey space.// The XI International conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" dedicated to the memory of a genius Azerbaijani scientist and thinker Nasiraddin Tusi, -Baku: -July 03-06, -2024, -p.237.

Z. Azizova

Dissertasiyanın müdafiəsi 24 iyun 2025-ci il tarixində saat 12⁰⁰-da Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küçəsi, 23

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya işinin avtoreferatının elektron versiyası Bakı Dövlət Universiteti rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 14 may 2025 tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 07.05.2025
Kağızın formatı: A5
Həcm: 42537
Tiraj: 100