АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НЕЙМАНОВСКОГО ТИПА

Специальность: 3338.01 – “Системный анализ, управление и обработка информации”

Отрасль науки: математика

Соискатель: **Сабир Иса оглу Гамидов**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора наук

Баку – 2024

Диссертационная работа выполнена в Научно-исследовательском Институте Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете

Научный консультант: док.физ.-мат.наук, академик
Фикрет Ахмедали оглу Алиев

Официальные оппоненты: док.физ.-мат.наук, проф.
Фикрет Гюлали оглу Фейзиев

док.физ.мат.-наук, проф.
Адалет Керим оглу Керимов

док.физ.-мат.наук, доц.
Илгар Гурбат оглу Маммадов

док.мат.наук, проф.
Джаваншир Ибрагим оглу Зейналов

Диссертационный совет ED.1.19 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующего на базе Института Систем Управления.

Председатель
диссертационного совета: док.физ.-мат.наук, проф.
Князь Ширaслан оглу Мамедов.

Ученый секретарь
диссертационного совета: док.фил.по мат.
Нигяр Огтай кызы Шукюрова.

Председатель
научного семинара: док.физ.мат.-наук, проф.
Камил Байрамали оглу Мансимов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Начиная с середины XIX века, математические методы начали применяться в экономических исследованиях. Создание математических моделей экономики послужило толчком для развития новой области математики – математической экономики. Первые работы по исследованию экономических процессов с применением математического аппарата появились в конце XIX века и принадлежат Л.Вальрасу, В.Парето и др. Дальнейшее развитие этих идей связаны с именами В.Леонтьева и Дж. Неймана, в работах которых были развиты простые многомерные модели экономической динамики. В дальнейшем в работах таких математиков, как Д.Гейл, Л.В. Макензи, Х.Никайдо, Л.В. Канторович и др. эти идеи были значительно продвинуты в изучении многопродуктовых моделей экономической динамики. Большой вклад в развитие математических моделей экономики также внесли Ф.Рамсей, Дж.Кейнс, Р.Солоу, и др.

В первой половине XX века математическая экономика уже сформировалась как отдельная отрасль математики. Интенсивные исследования в разных направлениях математической экономики продолжаются и в настоящее время.

При исследовании моделей экономической динамики особый интерес представляют изучение поведения траекторий, свойства эффективности траекторий, определение темпа роста модели, решение некоторых оптимизационных задач и т.д. В ходе исследования разнообразных моделей и их модификаций различными авторами удалось разработать подходы и методы, применимые ко многим моделям экономической динамики. Была создана единая теория моделей экономической динамики, и она нашла свое отражение во многих монографиях и учебниках.

Настоящая исследовательская работа тоже лежит в русле названных проблем, и посвящена изучению некоторых теоретических проблем математической экономики, таких, как исследование свойств траекторий моделей экономической динамики Неймановского типа с дискретным временем,

исследование зависимостей некоторых показателей, применение производственных функций различных типов к исследованию производственных процессов, определение темпов роста и условий равновесия в конкретных моделях и т.д., что делают тему диссертации актуальной.

Следует отметить, что результаты исследований моделей экономической динамики носят не только теоретический характер, но и могут использоваться для построения конкретных производственных моделей.

В предлагаемой работе основными объектами исследования являются односекторные и двухсекторные модели экономической динамики неймановского типа с дискретным временем. Модели этого типа представляют собой крайне агрегированные модели экономики, но при этом отражают динамику взаимосвязей между макро показателями и широко применяются при исследовании закономерностей развития экономики.

Преимущество таких моделей состоит в том, что они могут участвовать в более сложных экономико-математических моделях как составная часть и полученные при исследовании таких моделей результаты могут применяться при изучении более сложных динамических систем. Исследованием этого типа моделей занимались Ф.Рамсей, М.Браун, Л.Йохансен, Е.Фелпс, З.К.Эрроу, Н.Н.Моисеев, В.Л.Макаров, А.М.Рубинов и др.

Объектом исследования в отмеченных работах стали проблемы существования состояния равновесия траекторий, нахождение оптимальных стационарных траекторий в смысле того или иного критерия оптимальности, исследование магистральных свойств траекторий и т.д.

В качестве примера можно указать принцип дифференциальной оптимизации Л.В.Канторовича, а также принцип максимального использования потенциальных возможностей экономики А.М. Рубинова.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является дискретные односекторные и двухсекторные модели экономической динамики неймановского типа, которые

описываются с помощью многозначных отображений. Исследуется широкий круг вопросов, в том числе поведение эффективных траекторий, изучение магистральных свойств траекторий, условия равновесия, темпы роста, динамика взаимосвязей различных макропоказателей, таких как потребление, рабочая сила, основные фонды, национальное богатство и др.

В работе эти вопросы изучаются с помощью оптимизационных задач с применением аппарата производственных функций, в частности производственных функций Кобба-Дугласа, Леонтьева и функции с постоянной эластичностью замещения (CES).

Цель работы. Основная цель работы – исследование некоторых проблем дискретных моделей экономической динамики неймановского типа, в т.ч..

- изучение поведения траекторий в односекторных и двухсекторных моделях, заданных суперлинейными многозначными отображениями в конечных и бесконечных временных интервалах.

- определение характеристических цен и темпов роста рассматриваемых моделей.

- определение типов равновесий в специальных моделях неймановского типа.

- определение степеней зависимости некоторых показателей в односекторных и двухсекторных моделях.

- решение некоторых оптимизационных задач, в том числе максимизация суммарного потребления, суммарного выпуска и национального богатства.

расходов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

- исследованы эффективные траектории моделей, допускающие характеристику и найдены виды эффективных траекторий,

- предложен принцип оптимальности, согласно которому потребление выбирается так, чтобы траектории с заданной рабочей силой была эффективный.

- изучено предельное поведение траекторий при строгом состоянии равновесия,

- для односекторной модели определена зависимость функции потребления от вида производственной функции,

- определены условия максимизации суммарного потребления, суммарного выпуска и суммарного национального богатства,

- найдены необходимое и достаточное условия существования решения задачи потребителя.

- доказана теорема о существовании решения задачи потребителя без потерь с фиксированным бюджетом,

- с помощью механизма без потерь построена траектория в одной модели неймановского типа и определено неймановское состояние равновесия,

- при определенных условиях для двухсекторной модели определены неймановский темы роста, неймановские цены и неймановское состояние равновесия

- определены типы равновесий в двухсекторной модели,

- найдены необходимое и достаточное условия существования состояния равновесия в двухсекторной модели,

- доказана единственность неймановских цен в состоянии равновесия

- построена неймановская грань для модели ,

- построены модели с применением теории графов с учетом и без учета транспортных расчодов.

Научная новизна. Для специальной модели неймановского типа определены характеристические цены и темпы роста национального богатства. Решена задача оптимального распределения рабочей силы в многоотраслевой модели. С привлечением аппарата выпуклого анализа установлена связь между характеристическими ценами и супердифференциалом соответствующего функционала в модели неймановского типа.

Для специальной модели неймановского типа найдены условия эффективности траекторий и установлен принцип оптимальности траекторий.

Также исследованы задачи определения зависимости объема потребления от численности рабочей силы, занятых в производстве и от средств производства для производственных функций Кобба-Дугласа и функции с постоянной эластичностью замены (CES).

Получены необходимые и достаточные условия существования состояния равновесия без потерь и определено неймановское состояние равновесия.

Для двухсекторной модели Z^2 определены неймановский темп роста и неймановские равновесные цены, также построены T - шаговые эффективные траектории.

Методы исследования. Основными методами исследования являются методы математического моделирования экономических процессов. При этом широко применяются методы математического анализа, теории суперлинейных многозначных отображений, теории дискретных динамических систем, математического программирования, теории графов, выпуклого анализа и т.д.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, в основном носят теоретический характер. Но некоторые результаты могут быть применены при исследовании конкретных моделей экономики.

Достоверность полученных результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается математической корректностью рассматриваемых задач, применением строгих аналитических методов, а также выступлениями и обсуждениями на многочисленных семинарах и конференциях.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре при кафедре “Математическая теория моделирования систем управления” Санкт-Петербургского Государственного Университета под руководством проф. В.Ф. Демьянова, на семинаре Института Социально-Экономических Проблем АН СССР, г. Ленинград,

под руководством проф. А.М.Рубинова, на семинаре Института Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете под руководством акад. Ф.А.Алиева, на семинаре кафедры “Математическая кибернетика” Бакинского Государственного Университета под руководством профессора К.Б.Мансимова, а также докладывались в следующих научных конференциях:

- Научная конференция, посвященная 90 летию академика М.Л.Расулова, Баку, 2006.
- Научная конференция, посвященная 100 летию академика А.Гусейнова, Баку, 2007.
- Научная конференция, посвященная 90 летию профессора Г.Т.Ахмедова, Баку, 2007.
- Республиканская научная конференция, Сумгаит, 2007.
- The 1st International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2005, Baku, 2005.
- The 2nd International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2008, Baku, 2008.
- The 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications IECMSA-2014, Vienna, Austria, 2014.
- The 4th International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications IECMSA-2015, Athens, Greece, 2015.
- The 5th International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications IECMSA-2016, Belgrad, Serbia, 2016.
- The 6th International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications IECMSA-2017, Budapest, Hungary, 2017.
- The 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2018, Baku, 2018.
- The 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2020, Baku, 2020.
- The 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2022, Baku, 2022

Публикации. По теме диссертации опубликованы 34 работы, в том числе 21 статей в различных журналах, список которых представлен в конце автореферата.

Наименование организации, где выполнена работа. Работа выполнена в Институте Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете.

Структура и объем работы. Общий объем диссертации-254503 знаков (оглавление- 2863 знаков, введение -10334 знаков, I Глава -21000 знаков, II Глава -65957 знаков, III Глава-25766 знаков, IV Глава-51442 знаков, V Глава -49435 знаков, VI Глава-26437 знаков, основные результаты-1499 знаков). Список литературы-214 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, основных результатов и списка литературы.

Во введении дается обоснование актуальности и степень разработанности темы диссертации. Излагается основные направления развития теории математических моделей экономики. Формулируется цель и задачи исследования. Приводится краткий обзор результатов в исследуемой области.

В I Главе приведены основные понятия и определения, используемые в диссертационной работе. Она состоит из семи параграфов. В первом параграфе приведены основные понятия из теории многозначных отображений. При этом основное внимание уделяется описанию суперлинейных многозначных отображений и их свойств. Второй параграф этой главы посвящен описанию дискретных динамических систем. Особое внимание уделяется специальным динамическим системам, определяемые с помощью суперлинейных многозначных отображений. Дается экономическая интерпретация дискретной динамической системы.

Как известно, процессы, происходящие в экономике, описываются технологическими отображениями.

Третий параграф первой главы посвящен технологическим отображениям моделей экономической динамики, исследуемые в настоящей работе.

В четвертом параграфе этой главы описываются модели различных типов, часто встречающихся в практике, в том числе модели леонтьевского и неймановского типов.

В пятом параграфе приведено описание равновесных механизмов построения траекторий. Этот подход широко используется при исследовании моделей экономической динамики и при этом существенную роль играет выбор удельного потребления.

Шестой параграф посвящен моделям расширенного воспроизводства, которые были введены А.М.Рубиновым. Они описывают взаимодействие нескольких секторов, каждая из

которых перерабатывает имеющиеся у него ресурсы в готовую продукцию. И наконец, в седьмом параграфе приведено определение неймановского темпа роста и неймановского равновесного вектора, Приведено описание траектории, допускающей характеристику,

II Глава состоит из 9 параграфов. В первом параграфе приводится определение модели неймановского типа $Z(\omega)$ рассматривается модификация модели В.Л.Макарова[1]. Пусть в экономике имеется n технологий. Технология i описывается парой (F_i, v_i), где F_i – производственная функция, v_i – коэффициент сохранности фондов. Объемы основных фондов и численность рабочей силы обозначаются соответственно через K^i и L^i. Таким образом модель Z, описывающая совместное функционирование n технологий, задается последовательностью $(F_1, v_1;\ F_2, v_2;\ \dots;\ F_n, v_n)$. Состояние экономики в модели Z характеризуется вектором $x = (K^1, \dots, K^n, L^1, \dots, L^n, \omega^1, \dots, \omega^n)$. Здесь ω^i – удельное потребление в i -м производстве. Переход из состояния x_t в момент t в состояние x_{t+1} в момент $t+1$ возможен, если x_{t+1} удовлетворяет следующей системе соотношений:

$$K_{t+1}^i \le v_i K_t^i + I_{t+1}^i, \qquad I_{t+1}^i \ge 0, \qquad (1)$$
$$I_{t+1}^i + \omega_{t+1}^i L_{t+1}^i \le F_i\left(K_t^i, L_t^i\right), \qquad (i = \overline{1,n}),$$

Здесь I_{t+1}^i – инвестиции. Зафиксируем последовательность $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_t, \dots)$ и рассмотрим модель $Z(\omega)$.

В дальнейшем рассматриваются траектории $x_t = (K_t^1, \dots, K_t^n, L_t^1, \dots, L_t^n)$, для которых при каждом t справедливы неравенства

$$I_{t+1}^i = K_{t+1}^i - v_i K_t^i > 0, \qquad L_{t+1}^i > 0$$

Такие траектории будем называть траекториями со свойством (A). Пусть $P_0, \dots, P_t, \dots$ – характеристика некоторой траектории $x_0, \dots, x_t, \dots$. Положим

---

[1]Макаров В.Л. О динамических моделях экономики и развитии идей Л.В. Канторовича // Экономика и мат. методы, 1695, т.1, № 5, ст.10-24.

$$q_{p_{t+1}}(x) = \max_{y \in a(x)} P_{t+1}(y), \qquad x \geq 0.$$

Лемма 2.1.1. Пусть $q_{p_{t+1}}(x) = \max_{y \in a(x)} P_{t+1}(y)$, где $x \geq 0$, тогда функционал $q_{p_{t+1}}$ имеет следующий вид:

$$q_{p_{t+1}} = v_1 P_{t+1}^1 K^1 + \cdots + v_n P_{t+1}^n K^n + c^1 F_1(K^1, L^1) + \cdots + \\ + c^n F_n(K^n, L^n),$$

$$\left(x = (K^1, \dots, K^n, L^1, \dots, L^n)\right),$$

где $c^i = \max\left(P_{t+1}^i, \frac{q_{t+1}^i}{\omega_{t+1}^i}\right)$.

Лемма 2.1.2. Супердифференциал $\partial q_{p_{t+1}}$ функционала $q_{p_{t+1}}$ имеет вид

$$\partial q_{p_{t+1}} = (v_1 P_{t+1}^1, \dots, v_n P_{t+1}^n, 0, \dots, 0) + c^1 \partial \bar{F}_1 + \cdots + c^n \partial \bar{F}_n.$$

Так как траектория x_t допускает характеристику P_t, то выполняются следующие соотношения.

1. $P_t \in \partial q_{p_{t+1}}$. Из леммы 2.1.2 следует, что найдутся $h^i = \left(h_i^i, h_{i+n}^i\right) \in \partial F_i$, при которых

$$P_t = (v_1 P_{t+1}^1 + c^1 h_1^1, \dots, v_n P_{t+1}^n + c^n h_n^n, c^1 h_1^1, \dots, c^n h_{2n}^n);$$

2. $P_t(x_t) = P_{t+1}(x_{t+1})$.

Пусть (x_t)– эффективная траектория модели $Z(\omega)$, допускающая характеристику P_t и обладающая свойством (A). Рассмотрим n простейших однопродуктовых моделей неймановского типа

$$Z^i(\omega^i) = \left(\frac{b_{t+1}^i}{b_t^i} F_i, \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i} v_i, \omega_t^i\right), \quad (i = \overline{1,n})$$

а соответствующие темпы роста этих моделей обозначим через $\alpha_t^i = \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i} \max_{\eta > 0} \frac{v_i \eta + f_i(\eta)}{\eta + \omega_t^i}$, где $\eta = \frac{K}{L}$, $f_i(\eta) = F_i(\eta, 1)$.

Обозначим $\ell_t = (b_t^1, \dots, b_t^{n-1}, 1, b_t^1 \omega_t^1, \dots, b_t^{n-1} \omega_t^{n-1}, \omega_t^n)$. Предположим, далее, что все параметры b_t^i, b_{t+1}^i в период $[t, t+1]$ известны и $x = (K^1, \dots, K^n, L^1, \dots, L^n)$ – состояние экономики в момент t, которое переходит в состояние $y = (K^1, \dots, K^n, L^1, \dots, L^n)$. Поскольку $b_t^i K^i$, $b_t^i \omega_t^i L^i$ представляют собой средства производства и фонд потребления в i-м

производстве в момент t для состояния $x = (K^1, \dots, K^n, L^1, \dots, L^n)$ (в ценностном выражении), то величины

$$\ell_t(x) = \sum_{i=1}^{n} b_t^i\left(K^i + \omega_{t+1}^i L^i\right) \text{ и}$$

$$\ell_{t+1}(y) = \psi_t(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{t+1}^i\left(v_i K^i + F_i\left(K^i, L^i\right)\right)$$

можно трактовать как национальные богатства в моменты t и $t + 1$ при данных состояниях x и y.

Теорема 2.1.1. Для траекторий со свойством (A)

$$\alpha_t^1 = \alpha_t^2 = \dots = \alpha_t^n = \alpha_t.$$

Второй параграф II Главы посвящен исследованию эффективных траекторий модели $Z(\omega)$. Рассмотрим траекторию (x_t) модели $Z(\omega)$, допускающую характеристику $p_t = p_t^n \ell_t$, где

$$\ell_t = (b_t^1, \dots, b_t^{n-1}, 1, b_t^1\omega_t^1, \dots, b_t^{n-1}\omega_t^{n-1}, \omega_t^n).$$

Теорема 2.2.2. 1) Пусть $x_t = A_t\bar{x}_t$ эффективная траектория модели $Z(\omega)$, исходящая из строго положительной точки x_0. Тогда *а*) последовательность x_t^n является эффективной траекторией модели неймановского типа $Z^n(\omega^n)$, определяемой набором (F_n, v_n, ω_t^n), *б*) если $\gamma_t^i\bar{K}_{t+1}^i \geq v_i\bar{K}_t^i$, то $\left(x_t^i\right)$ – эффективная траектория модели

$$Z^i\left(\omega^i\right) = \left(\frac{b_{t+1}^i}{b_t^i}F_i, \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i}v_i, \omega_t^i\right)(i = \overline{1, n}),$$

2) Если $\left(x_t^i\right)$ – эффективная траектория модели $Z^i\left(\omega^i\right)$, исходящая из точки $x_0^i > 0$, то (x_t) – эффективная траектория модели $Z(\omega)$.

В третьем параграфе II Главы предполагается, что задан вектор $L_t = (L_t^1, \dots, L_t^n)$, $L_t^i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n L_t^i = 1$, где L_t – общая численность рабочей силы. По набору $\omega = (\omega_t^1, \dots, \omega_t^n)$ строится модель $Z(\omega)$ в предположении, что ее состояние $x_t = (K_t^1, \dots, K_t^n, L_t^1, \dots, L_t^n)$ лежит на эффективной траектории модели, имеющая характеристику P_t. По известной формуле

устанавливается ставка заработной платы ω_t^i и определяется состояние модели $Z(\omega)$.

Введем $2n$ простейших односекторных моделей $Z^i(\omega^i)$, $Z^i(L^i)$, $i=\overline{1,n}$, задаваемые одним и тем же набором $\left(\frac{b_{t+1}^i}{b_t^i}F_i, \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i}v_i, \omega_t^i\right)$, в которых коэффициенты b_t^i, $i=\overline{1,n}$, определяется по характеристическим ценам P_t состояния x_t модели $Z(\omega)$. В модели $Z^i(L^i)$ считается известным L_t^i, а в модели $Z^i(\omega^i)$ – удельное потребление ω_t^i, $i=\overline{1,n}$. Управляемым параметром в $Z^i(L^i)$ выступает ω_t^i, $i=\overline{1,n}$. Предлагается принцип оптимальности, согласно которому $\omega=\omega(L)$ выбирается так чтобы траектория (K_t, L_t) с заданной рабочей силой L_t была бы эффективной в простейшей модели (F, v, ω), которая получается при данном ω.

Используя указанный выше принцип оптимальности можно, с одной стороны, определить состояние модели $Z(L)$, а с другой состояние эффективной траектории модели $Z(\omega)$. Докажем последнее утверждение.

Последовательность (K_t^i, L_t^i) с фиксированной рабочей силой L_t^i при выборе ω_t^i как функции от L_t^i является эффективной траекторией модели $Z^i(\omega^i)$.

В четвертом параграфе II Главы рассматривается один способ распределения рабочей силы. Предполагается что, общая численность рабочей силы постоянна и равна единице. Рассмотрим случай, когда ставка заработной платы в каждом из производств одинакова, т.е. $\omega_t^1=\omega_t^2=\cdots=\omega_t^n=\omega_t$.

Таким образом, требуется найти такое распределение общей численности рабочей силы L_{t+1}, $t=1,2,\ldots$, на рабочие силы $L_{t+1}^i\left(\sum_{i=1}^n L_{t+1}^i=1\right)$, что

$$\omega_{t+1}^1(L_{t+1}^1)=\omega_{t+1}^2(L_{t+1}^2)=\cdots=\omega_{t+1}^n(L_{t+1}^n)\,.$$

Теорема 2.4.1. Уравнение $L_{t+1}(\omega)=1$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\omega\to\bar{s}} L_{t+1}(\omega)<1$; указанное решение единственно.

Следствие. Если $F_i(i=\overline{1,n})$ функция Кобба-Дугласа, то условия теоремы 2.4.1 выполняются всегда.

Теорема 2.4.2. *а*) Если начальная ставка заработной платы ω_1 принадлежит промежутку $[\overline{\omega}^1, \overline{\omega}^2]$, то $\omega_t \in [\overline{\omega}^1, \overline{\omega}^2]$ для всех t и $\omega_t \to \overline{\omega}^2$, при этом $\beta_t^2 > 1$, $\beta_t^1 < 1$ для всех t, $\lim L_t^1 = 1$, $\lim L_t^2 = 0$,

б) если $\omega_1 < \overline{\omega}^1$, то существует такой момент времени T, что $\overline{\omega}^1 \le \omega_T \le \overline{\omega}^2$, причем ω_t на $(0,\ \overline{\omega}^1]$ возрастает,

в) если $\omega_1 > \overline{\omega}^2$ и $\omega_t > \overline{\omega}^2$ для всех t, то ω_t убывает, стремясь к $\overline{\omega}^2$, причем $L^1 = 0$

Теорема 2.4.3. *а*) Если $\omega_1 \in [\overline{\omega}^1, \overline{\omega}^n]$, то и $\omega_t \in [\overline{\omega}^1, \overline{\omega}^n]$ для всех t и $\omega_t \to \overline{\omega}^n$, $L_t^n \to 1$, $L_t^i \to 0$, $i < n$.

б) Если $\omega_t < \overline{\omega}^1$, то существует момент времени $T : \overline{\omega}^1 < \omega_T < \overline{\omega}^n$, причем ω_t на $(0, \overline{\omega}^1]$ возрастает.

в) Если $\omega_1 > \overline{\omega}^n$ и $\omega_t > \overline{\omega}^n$ для всех t, то ω_t убывает, стремясь к $\overline{\omega}^n$.

В пятом параграфе общая численность рабочей силы $L = 1$ в модели Z распределяется между двумя производствами так, чтобы максимизировать суммарное потребление, при этом в качестве производственных функций рассматриваются функции с постоянной эластичностью замены (CES):

$$F_i\left(K_t^i, L_t^i\right) = \left(A_i K_t^{-\rho_i} + B_i L_t^{-\rho_i}\right)^{-\frac{1}{\rho_i}}, \quad i = \overline{1,2}$$

где $\rho_i > 0$. Итак,рассматривается задача

$$W_{t+1}^1(L_{t+1}^1) + W_{t+1}^2(L_{t+1}^2) \to max$$

при условии $L_{t+1}^1 + L_{t+1}^2 = 1$. Здесь $W_{t+1}^i\left(L_{t+1}^i\right)$ – фонд потребления в i -м производстве. L_{t+1}^i можно выразить как функцию переменной η_{t+1}^i:

$$L_{t+1}^i\left(\eta_{t+1}^i\right) = \frac{M_t^i}{\Phi_i\left(\eta_{t+1}^i\right)},$$

то справедливо

$$W_{t+1}^i\left(L_{t+1}^i\right) = M_t^i \frac{f_i\left(\eta_{t+1}^i\right) - \eta_{t+1}^i f_i'\left(\eta_{t+1}^i\right)}{v_i \eta_{t+1}^i + f_i\left(\eta_{t+1}^i\right)},$$

Лемма 2.5.1. Пусть выполняются следующие условия

а) $\tilde{\eta}^2 > \bar{\eta}^2$,

б) $\bar{L}_\tau^2 \le \tilde{L}_\tau^2$ для некоторого момента времени τ. Тогда $\tilde{L}_{\tau+1}^2 \le \tilde{L}_\tau^2$.

Замечание. Нетрудно проверить, что условие $\tilde{\eta} > \bar{\eta}$ выполняется, если

$$A \in \left[\frac{1}{\left((1-v)(1+\rho)^{1+\frac{1}{\rho}}\right)^{\rho}}, \qquad \frac{1}{(1-v)^{\rho}}\right].$$

Теорема 2.5.1. Пусть выполняются следующие условия

a) $\eta_{\tau-1}^1 < \bar{\eta},\ \tilde{\eta}^2 > \eta^2$,

b) $\bar{L}_{\tau-1}^2 \ge \bar{L}_\tau^2$ и $M_{\tau-1} \ge \Phi_1(\bar{\eta})$.

Тогда $\bar{L}_t^2 \le \tilde{L}_t^2$ для всех $t > \tau$, при этом $\tilde{L}_t^2$ убывает.

В шестом параграфе этой главы рассматривается модель $\tilde{Z}$, состоящий из n простейших однопродуктовых моделей экономической динамики и дается описание модели. Итак ,однопродуктовые модели обозначим $\tilde{Z} = \left(F_i, v_i, \omega_t^i\right)$ и предположим, что ставка заработной платы во всех моделях одинакова во все моменты времени:

$$\omega_t^1 = \cdots = \omega_t^n = \omega, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

В этом же параграфе исследуются асимптотические свойства траекторий модели $\tilde{Z}$. Через

$$\alpha^i = \max_{K,L\ge 0} \frac{v_i K + F_i(K,L)}{K + \omega L} = \max_{\eta > 0} \frac{v_i \eta + f_i(\eta)}{\eta + \omega}. \qquad (2)$$

обозначим темпы роста моделей $\tilde{Z}^i$, $i = \overline{1,n}$.

Из свойств траекторий модели со строгим состоянием равновесия вытекает

Теорема 2.6.1. Для любой траектории (x_t) существует

$$\lim \frac{K_t^1 + \cdots + K_t^n + \omega\, L_t}{\alpha^t} = \lambda > 0\,.$$

Если $\lambda > 0$, то $\frac{K_t^n}{L_t} \to \bar{\eta}$, $\frac{K_t^i}{\alpha^t} \to 0$, $i = \overline{1, n-1}$.

Пусть функция $\hat{g}_i$ определена равенством $\hat{g}_i(\eta) = v_i\eta + f_i(\eta)$, $(i = \overline{1,n})$. Тогда справедлива

Теорема 2.6.2. Пусть для последовательности η_t^n выполняются равенства и $\bar{\eta}$ – фондовооруженность, на которой достигается максимум в (2) при $i = n$. Тогда

1) η_t^n убывает,

2) $\eta_t^n \to \bar{\eta}$, если $\eta_0^n > \bar{\eta}$ и $\xi_t^n \leq \min\left(\frac{\hat{g}_n(\eta_t^n)}{\hat{g}_n(\bar{\eta})}, \frac{f_n(\eta_t^n)}{\omega}\right)$ для всех t, если $\eta_0^n \to \bar{\eta}$, или $\xi_t^n > \min\left(\frac{\hat{g}_n(\eta_t^n)}{\hat{g}_n(\bar{\eta})}, \frac{f_n(\eta_t^n)}{\omega}\right)$ хоть при одном t, то последовательность η_t^n становится, начиная с некоторого места, отрицательной

Предположим, что $\alpha^n > \alpha^i$, $i \neq n$, и обозначим $\alpha = \alpha^n$, $x = (0, \dots, 0, \bar{K}, \bar{L})$, где $\bar{K} = \bar{K}^n$, $\bar{L} = \bar{L}^n$ и $\bar{K}$, $\bar{L}$ выбирается из условий $\bar{K} + \omega\bar{L} = 1$, $\alpha = v_n\bar{K} + F_n(\bar{K}, \bar{L})$. Фондовооруженность $\bar{\eta} = \frac{\bar{K}}{\bar{L}}$, на которой достигается максимум в (2) при $i = \bar{n}$, называется оптимальной. Так как $\alpha = \alpha^n = \gamma^n$, то оптимальность фондовооруженности $\bar{\eta}$ равносильна равенству

$$\alpha = v_n + f_n(\bar{\eta}). \tag{3}$$

Седьмой параграф посвящен исследованию свойств траекторий модели $\tilde{Z}$ вида $(K_t^1, \dots, K_t^n, 1)$, $L_t^1 + \dots + L_t^n = 1$.

Пусть $n = 2$. Определим множество U как совокупность таких пар (K^1, K^2), что из точки $(K^1, K^2, 1)$ исходит траектория вида $(K_t^1, K_t^2, 1)$, $L_t^1 + L_t^2 = 1$. Отметим некоторые свойства множество U.

1. U устойчиво (в смысле R_+^2); если $(K^1, K^2) \geq (\tilde{K}^1, \tilde{K}^2)$ и $(\tilde{K}^1, \tilde{K}^2) \in U$, то $(K^1, K^2) \in U$.

2. Множество U выпукло.

3. Точка $(0, \lambda\bar{\eta}) \in U$, где $\lambda > 1$ и $\bar{\eta}$ таково, что $\alpha(\omega(\bar{\eta})) = 1$.

Пусть

$$(\tilde{K}^1, \bar{\eta}, 1) \in a(K^1, \bar{\eta} - \varepsilon, 1); \quad 0 < \varepsilon \leq \bar{\eta}, \tag{4}$$

где $1 = L^1 + L^2 = \tilde{L}^1 + \tilde{L}^2$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть

$$\mathcal{L}_\varepsilon(L^1) = -(1 - v_2)\bar{\eta} - v_2\,\varepsilon + F_2(\bar{\eta} - \varepsilon, 1 - L^1). \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что $\mathcal{L}_\varepsilon(L^1)$ убывающая и вогнутая функция. Кроме того, $\mathcal{L}_\varepsilon(L^1) \geq \omega$.

Рассмотрим равенство

$$F_2(\bar{\eta} - \varepsilon, 1 - L^1) - v_2\, \varepsilon = (1 - v_2)\bar{\eta}. \qquad (6)$$

Легко проверить, что (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$F_2(\bar{\eta} - \varepsilon, 1) - v_2\, \varepsilon > (1 - v_2)\bar{\eta}.$$

Так как $\tilde{L}^1 = 1 - \tilde{L}^2$ и $\omega\tilde{L}^2 = \mathcal{L}_\varepsilon(L^1)$, то

$$F_1(K^1, L^1) > \omega - \mathcal{L}_\varepsilon(L^1) = \mathcal{L}_\varepsilon(L^1). \qquad (7)$$

Теорема 2.7.1. (7) имеет решение при некотором ε тогда и только тогда, когда

$$F_1'(K^1, 0) \geq F_1'(\bar{\eta}, 1). \qquad (8)$$

Замечание 1. Для производственной функции Кобба-Дугласа условие (8) выполняется всегда, так как $F_1'(K^1, 0) = +\infty$.

Замечание 2. Для производственной функции CES соотношение (8) эквивалентно неравенству

$$B_1^{-\frac{1}{\rho_1}} \geq B_2(A_2\bar{\eta}^{-\rho_2} + B_2)^{-\frac{1+\rho_2}{\rho_2}}.$$

В моделях экономической динамики неймановского типа большой интерес вызывает асимптотическое поведение траекторий различных классов. В восьмом параграфе исследуется асимптотическое поведение траекторий, имеющих средний темп роста α. Эти траектории представляют как самостоятельный, так и прикладной интерес: они позволяют в ряде случаев описать асимптотическое поведение оптимальных траекторий. Приведем его описание.

Пусть Z - выпуклый конус, лежащий в $R_+^n \times R_+^n$ и такой, что $P_r Z \cap int R_+^n \neq \emptyset$. Неймановским темпом роста конуса Z назовем число

$$\alpha = \sup_{(x,y)\in Z} \min_{i\in I} \frac{y^i}{x^i},$$

где $I = \{1,2, \dots, n\}$.

Последовательность (x_k, y_k) элементов конуса Z назовем неймановской, если

$$\min_{i \in I} \frac{y^i}{x^i} \to \alpha.$$

Введем в рассмотрение множество индексов $I_Z \subset I$. Номер $i \in I_Z$ тогда и только тогда, когда найдется неймановская последовательность (x_k, y_k) такая, что $y_k^i > 0$ $(k = 1,2, \dots)$.

Пусть Z – модель Неймана-Гейла. Конус порождает конечную последовательность конусов $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ следующим образом. Положим $Z_1 = Z$, обозначим $R_+^n = K_1$. Таким образом, $Z_1 \subset K_1 \times K_1$. Если $I^1 = I_{Z_1} = I$, то процесс окончен; если $I^1 \neq I$, то рассмотрим грань K_2 конуса R_+^n, натянутую на орты с номерами из $I \backslash I^1$, и определим Z_2 как проекцию конуса K_1 на грань $K_2 \times K_2$ конуса $R_+^n \times R_+^n$.

Если $I^2 = I_{Z_2} = I \backslash I^1$, то процесс окончен; в противном случае рассмотрим грань K_3 конуса R_+^n, натянутую на орты с номерами из $I \backslash (I^1 \cup I^2)$, и обозначим через Z_3 проекцию Z_2 на грань $K_3 \times K_3$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. Если $I^3 \equiv I_{Z_3} = I \backslash (I^1 \cup I^2)$, то строим конус Z_4, и т.д.

Этот процесс закончится на некотором шаге N.

В результате у нас построены конусы Z_j и множества индексов I^j $(j = 1,2, \dots, N)$, причем $I^j \cap I^{j_1} = \emptyset, I^j \equiv I_{Z_j}$ $(j \neq j_1)$. Через α_j обозначим неймановский темп роста конуса Z_j. Число α_j будем называть квазитемпами роста модели. Известно, что $\alpha_{j-1} > \alpha_j$.

Магистралью M_α называется коническая оболочка множества всех предельных по угловому расстоянию точек всех траекторий со средним темпом α. Угловым расстоянием между точками x и y называется величина $\left\| \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\|$.

Обозначим через A_z коническую оболочку множества всех предельных по угловому расстоянию точек всех онтимальных траекторий.

Рассматривается модель Неймана-Гейла $Z \subset R_+^n \times R_+^n$, имеющая N квазитемпов, и двойсвенная к ней модель Z'.

Лемма 2.8.1. Для любого квазитемпа α_j, любого число $\lambda > \alpha_j$, любого индекса $i \in \bigcup_j^N I_\mu$ и любой траектории $X = (x_t)$ существует предел

$$\lim \lambda^{-t} x_t^i = 0.$$

Теорема 2.8.2. Пусть Z – модель Неймана-Гейла и существует траектория, X и бесконечное множество моментов времени τ такие, что множества индексов $I = \{1,2,\dots,n\}$ можно разбить на три подмножества J_1, J_2, J_3 следующим образом:

$$x_t^i = 0 \text{ для любых } i \in J_1, t \in \tau, \tag{9}$$

$$0 < c_1 \le x_t^i \le c_2 < \infty \text{ для любых } i \in J_2, t \in \tau, \tag{10}$$

$$\lim x_t^i = +\infty \text{ для любого } i \in J_3. \tag{11}$$

Тогда для любой точки $x \in R_+^n$, удовлетваряющей условиям

$$x^i = 0 \text{ для любого } i \in J_1 \cup J_2,$$

$$x^i > 0 \text{ для любого } i \in J_3$$

существует траектория X_1, удовлетворяющая условиям (9)-(11) и имеющая среди своих предельных по угловому расстоянию точек точку x.

Девятый параграф второй главы посвящен исследованию магистральных свойств траекторий моделей экономической динамики. Пусть моделируемая экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит разные продукты. Фазовое пространство модели – конус $(R_+^n)^n$. Вектор $x = (x', \dots, x^n) \in (R_+^n)^n$ является состоянием модели, вектор $x^i = \left(x^{ij}\right) \in R_+^n$- вектором ресурсов, находящимся в распоряжении i - ой отрасли. Производственная деятельность i - ой отрасли описывается с помощью суперлинейной непрерывной производственной функции $\Phi^i: R_+^n \to R_+$и диагональной матрицы A^i, на диагонали, которой стоят числа $v^{ij} \in [0,1], \left(j = \overline{1,n}\right)$. Предполагается, что $\Phi^i(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in K$, где $K = \left\{y \in R^n: y_i > 0, (i = \overline{1,n})\right\}$. Производственное отображение определяется следующим образом:

$$a(x) = \left\{y = \left(y^i\right) \in (R_+^n)^n \middle| 0 \le y^i \le A^i x^i + d^i,\right.$$

$$d^i = \left(d^{ij}\right) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} d^{ij} \leq \Phi^j(x^j), j = \overline{1,n}\Bigg\},$$

где $x = (x^{'}, \dots, x^n) \in (R_+^n)^n$.

Лемма 2.9.1. Пусть (x_t) – траектория отображения b, имеющая средний темп роста α; Ω (соответственно Ω_1) – множество предельных точек последовательности $\{\alpha^{-t}x_t\}$ (соответственно $\{\alpha^{-t}(x_t, x_{t+1})\}$). Тогда для любого $y_0 \in \Omega$ (соответственно $(y_0, y_1) \in \Omega_1$) существует последовательность $\{y_t\}, (t = 0, \pm 1, \dots)$ такая, что $y_t \in \alpha^t \Omega, y_{t+1} \in b(y_t)$.

Рассмотрим суперлинейное нормальное отображение b: $R_+^n \to \pi(R_+^n)$, неймановский темп роста, которого равен α, причем существует состояние равновесия $(\alpha, (x, \alpha x), p)$ такое, что $p \in K$. В дальнейшем нам понадобится

Лемма 2.9.4. Для любого $x \in R^n$,целого числа $m \geq 0$ выполняется

$$\left\| B^m x - \left(r^i(p)\right)^{-1} \alpha^m x^i r(p) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| A^i \right\|^m \left\| x - \left(r^i(p)\right)^{-1} x^i r(p) \right\|.$$

Теорема 2.9.2. Магистралью отображения a' является луч $\{\lambda p | \lambda \geq 0\}$.

Третья Глава состоит из пяти параграфов и посвящена исследованию функции потребления в однопродуктовых моделях экономической динамики. В первом параграфе этой главы приводится описание модели. Модель задается соотношениями

$$0 \leq K \leq v\,\overline{K} + I, \quad I \geq 0, \quad I + \omega L \leq F(\overline{K}, \overline{L})$$

и предполагается, что $F_t = F$, $v_t = v$ и задана неизменная норма накопления s, не зависящая от численности рабочей силы. Пусть $L = \beta \cdot \overline{L}$, где β – темп роста рабочей силы. Тогда

$$W(L) = (1 - s) F\left(\overline{K}, \frac{1}{\beta} L\right),$$

а удельное потребление ω выражается через норму накопления s равенством

$$\omega = \frac{W(L)}{L} = (1-s)F\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} \cdot \frac{\tilde{L}}{L}, \frac{1}{\beta}\right) = (1-s)F(\bar{\eta}, 1)\frac{1}{\beta} =$$

$$= (1-s)\frac{1}{\beta}\, f(\bar{\eta}). \qquad (12)$$

Второй параграф третей Главы посвящен исследованию зависимости функции потребления $W(L)$ от вида производственной функции. Поскольку $F_t = F$ и $v_t = v$ для всех t, то

$$\omega = \frac{f(\eta) - \eta\, f'(\eta)}{v + f'(\eta)}, \qquad (13)$$

где $\eta = \eta(L)$ есть корень уравнения

$$\eta = \frac{M}{L} - \frac{f(\eta) - \eta\, f'(\eta)}{v + f'(\eta)}. \qquad (14)$$

Здесь через M обозначена величина $v\bar{K} + F(\bar{K}, \bar{L})$ – национальное богатство в момент t. Считаем, что функция f трижды непрерывно дифференцируема, причем $f'(\eta) > 0$, $f''(\eta) < 0$ при $\eta > 0$.

Теорема 3.2.1. Пусть $F(K, L) = AK^r L^{1-r}$ – функция Кобба-Дугласа (здесь $0 < r < 1$), и удельное потребление ω вычисляется с помощью формул (12) и (13). Тогда W – возрастающая вогнутая функция, причем $\lim\limits_{L \to +\infty} W(L) \to +\infty$.

Пусть теперь $F(K, L) = (AK^{-\rho} + BL^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$– функция (CES). В дальнейшем $\rho > 1$. Введем обозначение $Y = A + B\eta^{\rho}$. Тогда для $W'(L)$ получим

$$W'(L) = \mu\left(vB\eta^{\rho} - vA\rho - A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}}\right),$$

где $\rho > 0$.

Поэтому

$$Sign\, W'(L) = Sign\left(vB\eta^{\rho} - vA\rho - A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}}\right).$$

Лемма 3.2.1. Уравнение $g(\eta) = vB\eta^2 - vA\rho - A\rho(A + B\eta^{\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = 0$ имеет на положительной полуоси единственный

корень $\bar{\eta}_1$, причем $g(\eta) > 0$ при $\eta > \bar{\eta}_1$ и $g(\eta) < 0$ при $\eta < \bar{\eta}_1$.

Теорема 3.2.2. Пусть $F(K,L) = (AK^{-\rho} + BL^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$, где $\rho > 1$ и удельное потребление ω вычисляется с помощью формул (12), (13). Тогда:

1) потребление $W(L)$ достигает на положительной полуоси максимума в некоторой точке $\bar{L}_1$, причем $\bar{L}_1$ является единственной точкой локального экстремума;

2) функция $W(L)$ имеет единственную точку перегиба $\bar{L}_2$, в которой меняет вогнутость на выпуклость, при этом $\bar{L}_2 > \bar{L}_1$;

3) $\lim\limits_{L\to\infty} W(L) = 0$.

Третий параграф третьей Главы посвящен исследованию зависимости объема потребления от средств производства. Пусть $\bar{L}$ и L заданы, и ω вычисляется по формулам (12), (13). Показывается, что в этом случае потребление в момент $t+1$ будет, зависит от объема фондов $\bar{K}$.

Поскольку $\bar{L}$ и L фиксированы, и $M = v\bar{K} + F(\bar{K},\bar{L})$, то потребление W зависит от $\bar{K}$ (или от M).

Из уравнения (14) можно выразить M как функцию η:

$$M(\eta) = L\frac{u(\eta)}{\beta(\eta)}.$$

Отметим, что M возрастающая функция, причем

$$\lim_{\eta\to+0} M(\eta) = 0\,, \qquad \lim_{\eta\to+\infty} M(\eta) = \infty\,.$$

Имеем

$$W(M) = L\cdot\omega(M) = L\,\frac{\delta\big(\eta(M)\big)}{\beta\big(\eta(M)\big)}.$$

Предположим что, $F(K,L) = (AK^{-\rho} + B_iL^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$ CES функция. Введем следующие обозначения:

$$d(\eta) = d_1(\eta) - d_2(\eta),$$

$$d_1(\eta) = \left(-vB\eta^{\rho} + vA\rho + A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}}\right)\left(1 + vAY^{\frac{1}{\rho}-1}\right),$$

$$d_2(\rho) = v(1+\rho)B^2\eta^{2\rho}\left(1 + vY^{\frac{1}{\rho}}\right)Y^{-1}.$$

Очевидно, что $W'' = 0$ тогда и только тогда, когда $d_1(\eta) = d_2(\eta)$. Легко можно вычислить $d'(\eta)$ и $d''(\eta)$.

Аналогично теореме 3.2.2 можно показать, что существует единственная точка $\bar{M} = M(\bar{\eta}_2)$, где $\bar{\eta}_2$– корень уравнения $d(\eta) = 0$, такая, что $W''(M) = 0$.

Из полученных результатов следует, что

$$\lim_{M\to+\infty} W(M) = L \lim_{\eta\to+\infty} \frac{\delta(\eta)}{v} = \frac{L}{v} \lim_{\eta\to+\infty} \delta(\eta)\,.$$

Нетрудно проверить, что в случае, когда $F(K,L) = AK^rL^{1-r}$ – функция Кобба-Дугласа, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \delta(\eta) = +\infty$. Если же $F(K,L)$ – функция с постоянной эластичностью замещения (CES), то $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \delta(\eta) = B^{-\frac{1}{\rho}}$. Действительно, пусть F – функция Кобба-Дугласа. Поскольку в этом случае $f(\eta) = A\eta^\rho$, то из (3.2.3) следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty} \delta(\eta) = \lim_{\eta\to+\infty} (A\eta^\rho - \eta A\rho\eta^{\rho-1}) = \lim_{\eta\to+\infty} A\eta^\rho(1-\rho) = +\infty.$$

Для функции CES имеем:

$$\lim_{\eta\to+\infty} \delta(\eta) = B \lim_{\eta\to+\infty} \frac{(\eta^\rho)^{1+\frac{1}{\rho}}}{(A + B\eta^\rho)^{1+\frac{1}{\rho}}} =$$

$$= B \lim_{\eta\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{A}{\eta^\rho} + B\right)^{1+\frac{1}{\rho}}} = B^{-\frac{1}{\rho}}\,.$$

Таким образом, для функции Кобба-Дугласа потребление $W(M)$ – возрастающая вогнутая функция, причем $\lim\limits_{M\to+\infty} W(M) = +\infty$, в случае, когда F – функция с постоянной эластичностью замены потребление $W(M)$ – возрастающая функция, имеющая единственную точку перегиба $\bar{M}$, в которой меняет выпуклость на вогнутость, и $\lim\limits_{M\to+\infty} W(M) < +\infty$.

В четвертом параграфе третей Главы максимизируются некоторые показатели, в том числе суммарное потребление, суммарный выпуск и суммарное национальное богатство.

$$\sum_{i=1}^{n} W_i(\ell_i) \to max\,, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\left(K^i, \ell_i\right) \to max\,, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i K^i + F_i\left(K^i, \ell_i\right) \to max\,, \tag{17}$$

при условии $0 \le \ell_i \le L$, $\sum_{i=1}^{n} \ell_i = L$. Здесь $W_i(\ell_i)$ – фонд потребления, F_i – выпуск, $F_i\left(K^i, \ell_i\right) + v_i K^i$ – национальное богатство в -ой модели в предположении, что удельное потребление ω выбирается по формулам (12), (13).

Теорема 3.4.1. Пусть F_i – функция Кобба-Дугласа, $i = \overline{1, n}$. Тогда в задачах (15)-(17) вектор $\bar{\ell}_i$ принадлежит внутренности конуса $R_+^n(\ell \ge 0)$.

Теорема 3.4.2. Рассмотрим модели (F_1, v_1) и (F_2, v_2), где F_i – функции CES

$$F_i(K, L) = \left(A_i K^{-\rho_i} + B_i L^{-\rho_i}\right)^{-\frac{1}{\rho_i}}, \qquad (i = 1, 2),$$

причем $\rho_i > 0$. Тогда суммарное потребление $\sum_{i=1}^{n} W_i(\ell_i)$ достигает максимума на отрезке $[0, L]$ в точке $\ell_j = L$ тогда и только тогда, когда $L \le \bar{L}_j$ и $W_j'(L) \ge \frac{1}{v_i} B_i^{-\frac{1}{\rho_i}} > L$, а суммарный выпуск достигает максимума в точке L тогда и только тогда, когда $F_j'(L) \ge B_i^{-\frac{1}{\rho_i}}$, $i \ne j$. Здесь $\bar{L}_j$ – единственная точка максимума функции W_j на положительной полуоси.

Теорема 3.4.3. Для любой производственной функции F в задаче (17) $\bar{\ell}_i < 1$.

В пятом параграфе третей Главы изучается вопрос о зависимости объема фондов от численности рабочей силы при постоянной норме накопления в рамках простейшей однопродуктовой модели.

Предположим, что в (1) реализуется равенство и задана неизменная норма накопления s, не зависящая от численности рабочей силы, т.е. $I_{t+1} = sF(K_t, L_t)$. Тогда

$$K_{t+1} = vK_t + sF(K_t, L_t). \tag{18}$$

Введем функцию

$$\bar{g}(K_t) = vK_t + sF(K_t, L_t).$$

Тогда

$$K_{t+1} = \bar{g}(K_t).$$

Рассмотрим вначале случай, когда $L_t = L$ для всех t. Пусть $\bar{g}(K) = vK + sF(K, L)$.

Откуда

$$K - \bar{g}(K) = K\left(1 - v - sF\left(1, \frac{L}{K}\right)\right), \quad K \neq 0\,. \tag{19}$$

В силу вогнутости $\bar{g}$ уравнение

$$K = \bar{g}(K) \tag{20}$$

имеет на $[0, +\infty)$ не больше двух корней, причем одним из них является точка $\bar{K}_0 = 0$. Предположим, что существует решение K уравнения (20), отличное от нуля. Тогда из (19) следует, что соотношения

$$K > \bar{K}(K < \bar{K}), \quad \bar{g}(K) < K(\bar{g}(K) > K) \tag{21}$$

эквивалентны.

Предложение 3.5.1. Пусть некоторая функция $\tilde{g}$ определена на $(0, +\infty)$, возрастает и уравнение $K = \tilde{g}(K)$ имеет единственное решение $\bar{K}$, причем соотношение (21) эквивалентны. Пусть, далее, для последовательности K_t выполняется равенства $K_{t+1} = \tilde{g}(K_t)(t = 0, 1, \dots)$ и $K_0 > 0$. Тогда $K_t \to \bar{K}$, причем если $K_0 < \bar{K}$, то K_t возрастает, если $K_0 > \bar{K}$, то K_t убывает.

Следует заметить, что в ходе доказательства было показано, что $K_t < K$, если $K_0 < \bar{K}$ и $K_t > \bar{K}$, если $K_0 > \bar{K}$ для любого t .

Теорема 3.5.1. Если $\bar{K}_0 = 0$ единственный корень уравнения $K = \tilde{g}(K)$ на $[0, +\infty)$ и для последовательности K_t выполняется равенства $K_{t+1} = \tilde{g}(K_t)$, то K_t убывает и $K_t \to 0$.

Замечание. В силу строгой вогнутости $\tilde{g}_{L_t}$ из существования $\overline{K}_{L_i}$ следует существование $\overline{K}_{L_j}$ для всех $j > i$, а также если уравнение $K = \tilde{g}_{L_i}(K)$ не имеет положительного решения, то и $K = \tilde{g}_{L_j}(K)$ не имеет положительного решения для всех $j < i$.

Теорема 3.5.2. Пусть последовательность K_t построена с помощью формулы (18) при некотором начальном объеме фондов K_0, при этом уравнение $K = \tilde{g}_{L_i}(K)$ имеет положительное решение начиная с $i = \tau$. Тогда $K_t \to \overline{K}_{L'}$, причем если $K_i > \overline{K}_{L_i}$ для всех $i \geq \tau$, то K_t убывает, если же существует $m \geq \tau$: $K_m < \overline{K}_{L_m}$, то последовательность K_t убывает до момента m, после которого возрастает

Следствие 3.5.1. Если уравнение $K = \tilde{g}_{L'}(K)$ не имеет положительного решения, то последовательность K_t, построенная с помощью (18), убывает и $K_t \to 0$.

Следствие 3.5.2. Пусть в теореме 3.5.2 $\tau = m = 0$. Тогда $K_t \to \overline{K}$, причем 1) если $K_t < \overline{K}_{L_0}$ (т.е. $m = 0$), то K_t возрастает; 2) если $K_0 > \overline{K}_{L_0}$ и *а*) $m \neq 0$, то K_t убывает до m, после которого возрастает; *б*) m не существует, то K_t убывает.

Теорема 3.5.3. Пусть при сделанном выше предположении последовательность K_t построена с помощью формулы (18) при некотором объеме фондов K_0, при этом уравнение $K = \bar{g}_{L_i}(K)$ имеет положительное решение для всех $i = 0, 1$.

Тогда $K_t \to \overline{K}_{L''}$, причем если $K_0 > \overline{K}_{L_0}$, то K_t убывает, если $K_0 < \overline{K}_{L_0}$ и *а*) $K_i < \overline{K}_{L_i}$ для любого i, то K_t возрастает; б) существует момент τ: $K_{L_\tau} > \overline{K}_{L_\tau}$, то K_t возрастает до τ, после чего убывает.

Обозначим через $\overline{K}^1$ корень уравнения $K^1 = vK^1 + F(K^1, L')$. Откуда при $K^1 = \overline{K}^1$ имеем

$$\frac{1-v}{s} = \frac{F_1(\overline{K}^1, L')}{\overline{K}^1} = F_1\left(1, \frac{L'}{\overline{K}^1}\right) = Q_1(\xi_1)\,,$$

где $\xi_1 = \frac{L'}{\overline{K}^1}$, и поэтому $Q_1^{-1}\left(\frac{1-v}{s}\right) = \xi_1$. Следовательно, $\overline{K}^1 = \tilde{\theta}_1 \cdot L'$, где

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{Q_1^{-1}\left(\frac{1-v}{s}\right)}.$$

Аналогично, $\overline{K}^2 = \tilde{\theta}_2(L - L')$, где $\overline{K}^2$ – корень уравнения

$$K^2 = vK^2 + sF_2(K^2, L - L'), \qquad \tilde{\theta}_2 = \frac{1}{Q_2^{-1}\left(\frac{1-v}{s}\right)},$$

$$Q_2(\xi_2) = F_2\left(1, \frac{L - L'}{\overline{K}^2}\right), \qquad \xi_2 = \frac{L - L'}{\overline{K}^2}.$$

Теорема 3.5.4. Пусть $\overline{K}^1$ и $\overline{K}^2$ положительные. Тогда в задаче максимум достигается на одном из концов.

1V Глава состоит из шести параграфов. Так как в дальнейшем в основном будут исследованы модели воспроизводства, в первом параграфе приводится описание модели воспроизводства с производственными функциями леонтьевского типа. Эти модели были введены А.М.Рубиновым[2].

Моделируемая экономика состоит из n отраслей, каждая из которых выпускает один продукт, причем разные отрасли выпускают разные продукты. Фазовое пространство модели – конус $(R_+^n)^n$. Вектор $X = (x^1, \dots, x^n) \in (R_+^n)^n$ называется состоянием модели, $x^k = (x^{k1}, \dots, x^{kn}) \in R_+^n$ – состоянием k -й отрасли. Производственная деятельность k -й отрасли в период $[t, t+1]$ описывается с помощью производственной функции $F_t^k : R_+^n \to R_+$ и диагональной матрицы сохранности B_t^k, на диагонали которой стоят числа $v_t^{ki} \in [0,1]$, $(i = \overline{1,n})$.

Предполагается, что

$$F_t^k(x) = \min_{i=\overline{1,n}} \frac{x^i}{c_t^{ik}} \left(x \geq 0,\ \ c_t^{ij} \geq 0,\ \ i,j = \overline{1,n},\ \ t = 0, 1, \dots\right).$$

Таким образом, если k -я отрасль в момент t обладает вектором ресурсов x, то в момент $t+1$ после производственного

---

[2] Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. Л., Наука, 1983, 185 с.

процесса она будет иметь вектор ресурсов $B_t^k \cdot x$ и вновь произведенный продукт в количестве $F_t^k(x)$.

Введем суперлинейный оператор $(B \cdot F)_t^k : R_+^n \to R_+^n$ и $(B \cdot F)_t : (R_+^n)^n \to R_+^n$, положив

$$(BF)_t^k(x) = B_t^k \cdot x + \left(0, \dots, 0, F_t^k(x), 0, \dots, 0\right)(x \in R_+^n), \qquad (22)$$

$$(BF)_t(X) = \sum_{k=1}^{n} (BF)_t^k(x^{k\cdot}) = \sum_{k=1}^{n} B_t^k \cdot x^{k\cdot} + \left(F_t^1(x^{1\cdot}), \dots, F_t^n(x^{n\cdot})\right)$$

$$(X = (x^{1\cdot}, \dots, x^{n\cdot}) \in (R_+^n)^n).$$

Модель с производственным отображением

$$a_t(X) = \left(0,\ (BF)_t(X)\right), \qquad (x \in (R_+^n)^n) \qquad (23)$$

обозначим через Z.

Отметим, что производственное отображение a_t^k отрасли k в момент t имеет вид

$$a_t^k(x) = \left(0,\ (BF)_t^k(X)\right)(x \in R_+^n).$$

Второй параграф 1V Главы посвящен равновесным механизмам построения траекторий моделей экономической динамики. Пусть в некоторый момент t заданы матрица сохранности B^k и $F^k(x) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \frac{x^i}{c^{ik}} (k = \overline{1,n})$. Через $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^n)$ обозначим вектор цен в момент t. Совокупное богатство отраслей при этих ценах и вектора ресурсов $x = (x^{1\cdot}, \dots, x^{n\cdot})$ в момент t обозначим

$$U^k(\ell, x) = \max\{[\ell, y] | y \in a^k(x)\} =$$

$$= [\ell, B^k x] + \ell^k F^k(x), \qquad (k = \overline{1,n}), \qquad (24)$$

Обычно $U^k(k = \overline{1,n})$ называют функцией полезности отраслей. Пусть $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, где λ^k – заданные бюджеты k –й отрасли, y – вектор распределяемых ресурсов. Рассмотрим модель равновесия

$$M = \{y, U(\ell), \Lambda\}$$

с фиксированными бюджетами.

Пусть в момент t известно состояние экономики $x_t = (x_t^{1\cdot}, \dots, x_t^{n\cdot})$. По этим данным в момент $t+1$ определяется вектор $y_{t+1} = (y_{t+1}^1, \dots, y_{t+1}^n)$, подлежащий распредельнию. Здесь

$$y_{t+1}^i = \sum v_t^{ki} x_t^{ki} + F_t^i(x_t^{i\cdot})(i = \overline{1,n}).$$

Отношение

$$\mu^k(\ell, x) = \frac{U^k(\ell, x)}{[P, x]} k = \overline{1,n}, \quad x \in R_+^n \qquad (25)$$

будем называть темпом роста совокупного богатства k –й отрасли в состоянии x.

В этом же параграфе приводится описание задачи потребителя. Пусть в момент t задано производственное отображение a:

$$a(x) = \left\{ \tilde{x} = (\tilde{x}^{1\cdot}, \dots, \tilde{x}^{n\cdot}) \in (R_+^n)^n \,\middle|\, 0 \le \sum_{i=1}^n \tilde{x}^{i\cdot} \le \sum_{i=1}^n B^k \tilde{x}^{k\cdot} + \right.$$

$$\left. +\left(F^1(x^{1\cdot}), \dots, F^n(x^{n\cdot})\right), \quad x^{k\cdot} = (x^{k1}, \dots, x^{kn}), \quad k = \overline{1,n} \right\}, \quad (26)$$

Пусть вектор $\bar{x}^{k\cdot}$ является решением задачи -го потребителя:

$$U^k(\ell, x) \to max, \quad x \in \tilde{V} = \{x \ge 0, \ [P, x] \le 1\}, \quad k \in I. \quad (27)$$

Тогда равновесный вектор $x^{k\cdot}$ имеет вид:

$$x^{k\cdot} = \lambda^k \cdot \bar{x}^{k\cdot} (k \in I).$$

Задача заключается в следующем: существует ли модель M с данными v^{ki}, c^{ik} и y, в которой набор $(P, x^{1\cdot}, \dots, x^{n\cdot}, y)$ является равновесием, то найти ее, то есть указать такие ℓ^i и $\lambda^i (i \in I)$, что этот набор является состоянием равновесия в модели $\{y, \ U(\ell), \ \Lambda\}$. Эта задача с $2n$ неизвестными – это ℓ^i и $\lambda^i (i \in I)$.

Пусть $x \in R_+^n$ и введем обозначения:

$$I_1(x) = \left\{ i \in I \middle| x^i = 0 \right\},$$

$$I_2(x) = \left\{ i \in I \middle| x^i > 0 \right\}, \qquad (28)$$

$$R^k(x) = \left\{ i \in I \,\middle|\, \frac{x^i}{c^{ik}} = \min_{j \in I} \frac{x^j}{c^{jk}} \right\}, \quad (k \in I),$$

$$Q^k(x) = I|R^k(x), \quad (k \in I).$$

Лемма 4.2.1. Пусть $\bar{x}$ – решение задачи k -го потребителя $(k \in I)$. Тогда, если $I_1(\bar{x}) \neq 0$, то $I_1(\bar{x}) \subset R^k(\bar{x})$.

Функция полезности k –ой отрасли в точке x имеет вид

$$U^k(\ell, x) = \sum_{j \in I} \ell^j \cdot v^{kj} \cdot x^j + \ell^k \min_{j \in I} \frac{x^j}{c^{jk}}, \quad (k \in I),$$

где $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^n)$ – заданный вектор цен. Введем вектор

$$\ell_v^k = (\ell^1 \cdot v^{k1}, \dots, \ell^n \cdot v^{kn}), \ \ k \in I.$$

В этом случае выражение $U^k(\ell, x)$ примет вид:

$$U^k(\bar{x}) = U^k(\ell, \bar{x}) = [\ell_v^k, \bar{x}] + \ell^k \min_{j \in I} \frac{\bar{x}^j}{c^{jk}}, \quad (k \in I).$$

Чтобы исследовать задачу k –го потребителя, применим необходимые и достаточные условия экстремума, согласно которым в точке $\bar{x}$ достигается максимум тогда и только тогда, когда

$$(U^k)'(\bar{x}, g) \leq 0, \qquad \forall\, g \in G_{\bar{x}}(V)(k \in I),$$

где конус $G_{\bar{x}}(V)$ определен формулой.

$$G_{\bar{x}}(V) \ = \left\{ g \in R^n \middle| [P, g] = 0, \ \ g^i \geq 0, \ \ \forall\, i \in I_1(\bar{x}) \right\}.$$

Хорошо известно, что

$$(U^k)'(\bar{x}, g) = q^k(g),$$

где

$$q^k(g) = [\ell_v^k, g] + \ell^k \cdot \min_{j \in R^k(\bar{x})} \frac{g^j}{c^{jk}}, \qquad g \in R^n.$$

Введем обозначения

$$\tilde{q}^k(g) = \ell^k \cdot \min_{j \in R^k(\bar{x})} \frac{g^j}{c^{jk}}, \qquad (k \in I).$$

Таким образом, если в точке $\bar{x}$ достигается максимум, то

$$q^k(g) \leq 0, \ \ \forall\, g \in G_{\bar{x}}(V) =$$
$$= \left\{ g \in R^n \middle| [P, g] = 0, \ \ g^i \geq 0, \ \ \forall\, i \in I_1(\bar{x}) \right\},$$

где множество $I_1(\bar{x})$ определено формулой (.28).

Лемма 4.2.2. Следующие условия равносильны:

1. $\qquad q^k(g) \leq 0, \ \forall\, g \in \Omega,$
2. $\qquad \exists\, \mu^k > 0, \ \mu^k \cdot P \in \partial q^k,$

где ∂q^k – супердифференциал функции q^k.

Лемма 4.2.3. Супердифференциал функции $q^k(g)$, $(g \in R^n)$, определенный выше, имеет вид

$$\partial q^k = \ell_v^k + \partial \bar{q}^k, \quad (k \in I),$$

где $\ell_v^k = (\ell^1 \cdot v^{k1}, \dots, \ell^n \cdot v^{kn})$,

$$\tilde{q}^k(g) = \ell^k \cdot \min_{j \in R^k(\bar{x})} \frac{g^i}{c^{ik}},$$

причем

$$\partial \tilde{q}^k = \left\{ f = \ell^k \cdot (f^1, \dots, f^n) \;\middle|\; \exists\, \alpha^i \geq 0, \sum_{j \in R^k(\bar{x})} \alpha^i = 1, \right.$$

$$\left. f^i = \frac{\alpha^i}{c^{ik}}, \;\; i \in R^k(\bar{x}), \;\; f^i = 0, \;\; i \in Q^k(\bar{x}) \right\}, \quad (k \in I).$$

Лемма 4.2.4. Число $\mu^k (k \in I)$, определенная в лемме 4.2.2, равно:

$$\mu^k = \frac{\ell^k + \sum_{i \in R^k(\bar{x})} \ell^i \cdot v^{ki} \cdot c^{ik}}{\sum_{i \in R^k(\bar{x})} P^i \cdot c^{ik}} (k \in I).$$

Теорема 4.2.1. Пусть дан строго положительный вектор $P = (P^1, \dots, P^n)$, индекс $k \in I$ и число μ^k определено в Лемме 4.2.4. Вектор $\bar{x}$ есть решение задачи k –го потребителя , удовлетворяющей соотношению $I_1(\bar{x}) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$1. \quad \begin{cases} \ell^i \cdot v^{ki} = \mu^k \cdot P^i, \;\; \forall\, i \in Q(\bar{x}), \\ \ell^j \cdot v^{kj} \leq \mu^k \cdot P^j, \;\; \forall\, j \in R^k(\bar{x}), \end{cases}$$

$$2. \quad P \in \frac{1}{\mu^k} \cdot (\ell_v^k + \partial \tilde{q}^k),$$

где ℓ_v^k, $\partial \tilde{q}^k$ определены в лемме 4.2.3.

Замечание. Если $R^k(\bar{x}) = I = \{1, 2, \dots, n\}$, то число μ^k, определенное выше, является максимальным темпом роста совокупного богатства k -й отрасли.

Предложение 4.2.1. При любом $m \in I$ условия

1. $q^k(g) \leq 0$ для всех $g \in G_{\bar{x}}(V)$;
2. $q_m^k(\tilde{g}) \leq 0$ для всех $\tilde{g} \in T_m$

эквивалентны.

Теорема 4.2.2. Пусть дан строго положительный вектор $P = (P^1, \dots, P^n)$.

1. Если вектор $\bar{x}$, для которого

$$I_1(\bar{x}) \neq \emptyset$$

является точкой максимума в задаче k – го потребителя, то при $m \in Q^k(\bar{x})$ выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\ell^i}{P^i} v^{ki} \leq \dfrac{\ell^m}{P^m} v^{km}, & \forall\, i \in R^k(\bar{x}), \\ \dfrac{\ell^j}{P^j} v^{ki} = \dfrac{\ell^m}{P^m} v^{km}, & \forall\, j \in Q^k(\bar{x}) \end{cases} \qquad (*)$$

при $m \in R^k(\bar{x})$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\ell^i}{P^i} v^{ki} \leq \dfrac{\ell^j}{P^j} v^{kj}, & \forall\, i \in R^k(\bar{x}),\ \ j \in Q^k(\bar{x}) \\ \dfrac{\ell^j}{P^j} v^{ki} = \dfrac{\ell^m}{P^m} v^{km}, & \forall\, i \in R^k(\bar{x}). \end{cases} \qquad (**)$$

2. Пусть $I_1(\bar{x}) \neq \emptyset$ и при некоторых m выполняются (*) (если $m \in Q^k(\bar{x})$) или (**) (если $m \in R^k(\bar{x})$), тогда вектор $\bar{x}$ является решением задачи k -го потребителя .

В третьем параграфе 1V Главы исследуются задачи равновесия без потерь в моделях экономической динамики с фиксированным бюджетом.

Пусть $I = \{1, 2, \dots, n\}$ и $\bar{x}^k$ – точка максимума в задаче потребителя.

Определение. Равновесие $\{P, \bar{x}^{1\cdot}, \dots, \bar{x}^{n\cdot}, \Lambda, y\}$ назовем равновесием без потерь, если для всех $k \in I$

$$R^k(\bar{x}^{k\cdot}) = I.$$

Определение. Цены $P = (p^1, \dots, p^n)$, определенные в равновесии без потерь, назовем равновесными ценами без потерь.

Рассмотрим задачу k – го потребителя без потерь. Чтобы исследовать задачу, применим необходимые и достаточные условия экстремума, согласно которому в точке $\bar{x}$ достигается максимум тогда и только тогда, когда

$$(U^k)'(\bar{x}, g) \leq 0 \quad \text{при всех } g \in G_{\bar{x}}(V),$$

где $G_{\bar{x}}(V) = \{g \in R^n | [P, g] = 0,\ g^i \geq 0,\ \forall\, i \in I_1(\bar{x})\}$.

Как известно, $(U^k)'(\bar{x}, g) = q^k(g)$, где

$$q^k(g) = [\ell_v^k, g] + \ell^k \cdot \min_{j \in R^k(\bar{x})} \frac{g^i}{c^{ik}} (k \in I).$$

Тогда в нашем случае (без потерь) получим, что необходимые и достаточные условия оптимальности $\bar{x}$ в отрасли k примут вид:

$$q^k(g) = [\ell_v^k, g] + \ell^k \cdot \min_{j \in I} \frac{g^i}{c^{ik}} \leq 0, \quad \forall\, g \in \Omega =$$
$$= \{g \in R^n | [P, g] = 0\}.$$

Лемма 4.3.1. Число $\mu^k (k \in I)$, определенное в лемме 4.2.4 в случае без потерь $(R^k(\bar{x}) = I)$ совпадает с максимальным темпом роста совокупного богатства k –й отрасли и равен

$$\mu^k = \frac{\ell^k + [\ell_v^k, c^{\cdot k}]}{[P, c^{\cdot k}]}, \qquad (k \in I),$$

где $\ell_v^k = (\ell^1 \cdot v^{k1}, \dots, \ell^n \cdot v^{kn})$.

Теорема 4.3.1. Пусть дан строго положительный вектор $P = (p^1, \dots, p^n)$, индекс $k \in I$ и число μ^k определено формулой (25). Вектор $\bar{x}$ есть решение задачи

$$U^k(\ell, x) \to max,\ \ x \in V = \{x \geq 0\ |[P, x] = 1\}. \qquad (29)$$

удовлетворяющей соотношению

$$R^k(\bar{x}) = I$$

тогда и только тогда, когда

1. $\ell^j \cdot v^{kj} \leq \mu^k \cdot p^j, \quad \forall\, j \in I,$
2. $p \in \frac{1}{\mu^k}(\ell_v^k + \partial \tilde{q}^k),$

Замечание. При данных $\mu^k (k \in I)$, равенство из леммы 4.3.1 можно рассматривать как систему n линейных уравнений относительно переменных – координат равновесного вектора цен p без потерь:

$$[P, c^{\cdot k}] = \frac{1}{\mu^k} \cdot (\ell^k + [\ell_v^k, c^{\cdot k}])(k \in I),$$

где $c^{\cdot k} = (c^{1k}, \dots, c^{nk})$, $\ell_v^k = (\ell^1 \cdot v^{k1}, \dots, \ell^n \cdot v^{kn})$ и наоборот, при данных ценах p из равенства в лемме 4.3.1 однозначно определяется максимальные темпы роста μ^k совокупного богатства k –й отрасли $(k \in I)$.

Лемма 4.3.2. Пусть даны числа $\ell^i > 0$, $\mu^k > 0$, $v^{ji} > 0$, $c^{ij} > 0 (i, j, k \in I)$ и $(P, x^{1\cdot}, \dots, x^{n\cdot})$ – равновесие без потерь в модели с функциями полезности U^j, бюджетами $\lambda^j = [p, x^j]$ и распределяемым вектором $y = \sum_{i=1}^{n} x^{i\cdot}$ $(i \in I)$.

Соотношение 2) в Теореме 4.3.1 выполняется для $\forall\, k \in I$ тогда и только тогда, когда при любых $v^{ji} \geq 0$ и $u^j (i, j \in I)$, удовлетворяющих равенствам:

$$\sum_{j \in I} \mu^j \left(v^{ji} + u^j c^{ij}\right) = 0, \quad \forall\, i \in I,$$

выполняется неравенство

$$\sum_{j \in I} \left(\sum_{i \in I} v^{ji} \cdot \ell^i \cdot v^{ji} + u^j \left(\ell^j + \sum_{i \in I} \ell^i \cdot v^{ji} \cdot c^{ij} \right) \right) \leq 0.$$

Лемма 4.3.3. Пусть даны числа $v^{ji} \geq 0$, $c^{ji} \geq 0$, $(i, j \in I)$ и определитель матрицы $|c| \neq 0$. Следующие условия равносильны:

1. числа $v^{ji} \geq 0$, $u^j (i, j \in I)$ таковы, что для $\forall\, i, j \in I$ выполняются условия леммы 4.3.2;

2. числа ℓ^i, $\mu^j (i, j \in I)$ такие, что для $\forall\, i, j \in I$ выполняется

$$\ell^i \cdot v^{ji} + \frac{1}{|c|} \sum_{k \in I} (-1)^{i+k+1} \frac{\mu^j}{\mu^k} \left(\ell^k + \sum_{m \in I} \ell^m \cdot v^{km} \cdot c^{mk} \right) \left| c_i^k \right| \leq 0,$$

где c_i^k – матрица порядка $(n-1) \times (n-1)$, полученная из матрицы c путем удаления k –го столбца и i –й строки.

Теорема 4.3.4. Пусть числа $v^{ji} \geq 0$ и $c^{ij} > 0$ $(i, j \in I)$ таковы, что $\max_{j \in I} v^{ji} > 0$ и $|c| \neq 0$. Равновесные цены без потерь при данных v^{ji}, c^{ij} и некоторых $\ell^i > 0$ $(i \in I)$ и $\mu^j > 0$ $(j \in I)$

существуют тогда и только тогда, когда выполнено неравенство во втором пункте Леммы 4.3.3; при этом коэффициенты $\mu^k (k \in I)$ и равновесные цены P связаны формулой

$$\mu^k[P, c^{\cdot k}] = \ell^k + [\ell_v^k, c^{\cdot k}](k \in I),$$

где $c^{\cdot k} = (c^{1k}, \dots, c^{nk})$, $\ell_v^k = (\ell^1 \cdot v^{k1}, \dots, \ell^n \cdot v^{kn})$

Введем числа

$$d_i^{kj} = \begin{cases} \ell^i v^{ji} + (-1)^{i+j+1} \dfrac{|c_i^j|}{|c|} \left(\ell^j + \sum\limits_{m \in I} \ell^m \cdot v^{jm} \cdot c^{mj} \right), \\ \text{если } \ k = j \ \ (i, j, k \in I), \\ (-1)^{i+k+1} \dfrac{|c_i^k|}{|c|} \left(\ell^k + \sum\limits_{m \in I} \ell^m \cdot v^{km} \cdot c^{mk} \right), \\ \text{если } \ k \neq j, \end{cases}$$

и вектор $\tilde{d}^{kj}$

$$\tilde{d}^{kj} = \begin{pmatrix} -d_1^{kj} \\ \vdots \\ \vdots \\ -d_n^{kj} \end{pmatrix} (k, j \in I).$$

Предложение 4.3.1. Число $\mu^j (j \in I)$, существует тогда и только тогда, когда существует индекс $k_0 \in I$ и такие β^k, что

$$\beta^{k_0} > 0, \quad \sum_{k=1}^{n^2} \beta^k \tilde{d}^{kj} \geq 0 \quad (j \in I),$$

где $\tilde{d}^{kj}$ определены выше.

В четвертом параграфе 1V Главы с помощью равновесного механизма без потерь строится траектории в модели Z, которая задается отображением

$$a(x) = \left\{ \tilde{x} = (\tilde{x}^{1\cdot}, \dots, \tilde{x}^{n\cdot}) \in (R_+^n)^n \,\middle|\, \sum_{k \in I}^{n} \tilde{x}^{ki} \leq \sum_{k \in I}^{n} v^{ki} x^{ki} + \right.$$

$$+ \min_{j \in I} \frac{x^{ij}}{c^{ji}}, \quad x^k = (x^{k1}, \dots, x^{kn}), \quad k \in I, \ \ v^{ki} \in [0, 1],$$

$$\left. c^{ij} > 0, \ \ (i, j \in I) \right\}.$$

Напомним, что равновесием является набор $(P, x^{1\cdot}, \dots, x^{n\cdot}, y)$, причем, если равновесие существует, то вектор $x^{k\cdot}$ обязательно пропорционален вектору $c^{\cdot k}(k \in I)$.

Если же $y \notin cone\{c^{\cdot i} | i \in I\}$, то равновесие заведомо не существует.

Поэтому целесообразно привести необходимое и достаточное условие существования равновесных цен без потерь. По теореме Фан Цзы[3] необходимые условия не существования равновесных цен без потерь можно сформулировать в виде

$$\sum_{j \in I} v^{ji} = -\sum_{j \in I} u^j c^{ij}, \qquad \forall\, i \in I, \tag{а}$$

для которых выполняется неравенство

$$\sum_{j \in I}\left(\sum_{i \in I} v^{ji}\ell^i v^{ji} + u^j\left(\ell^j + \sum_{i \in I}\ell^i v^{ji} c^{ij}\right)\right) > 0. \tag{в}$$

Введем множества индексов

$$J_1(i) = \left\{j \in I \,\middle|\, v^{ji} = \max_{k \in I} v^{ki}\right\}, \quad \forall\, i \in I,$$

$$J_2(i) = \left\{j \in I \,\middle|\, \ell^j + v^{ji}c^{ij} = \min_{k \in I}\left(\ell^k + v^{ki}c^{ik}\right)\right\}, \quad \forall\, i \in I.$$

Пусть векторы $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^n)$ нормированы соотношением:

$$\sum \ell^i = 1, \quad \ell^i > 0, \quad (i \in I).$$

Имеет место

Лемма 4.4.1. Пусть выполняются условия

$$\sum \ell^i = 1, \quad \ell^i > 0, \quad (i \in I),$$

и неравенство

$$\frac{\max\limits_{i \in I} v^{ji}}{|J_1(i)|} \cdot \sum_{j \in J_1(i)} c^{ij} > \min_{j \in I}\left(\ell^j + v^{ji}c^{ij}\right), \quad i \in I,$$

---

[3] Фан Цзи. О системах линейных неравенств // В кн: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., ИЛ, 1953, с. 214.

где $|J_1(i)|$ – это число элементов во множестве индексов $J_1(i)$. В этом случае существуют числа $v^{ij} \geq 0$ и $u^j(i,j \in I)$, удовлетворяющие условию (а) , для которых выполняется (в).

Теорема 4.4.1. Пусть числа $v^{ji} \geq 0$, $\ell^i > 0(i,j \in I)$ таковы, что $\max v^{ji} > 0$, $\sum_{i \in I} \ell^i = 1$ и $\mu^j = 1(j \in I)$. Если равновесные цены без потерь при данных v^{ji}, ℓ^i и некоторых $c^{ij} > 0(i,j \in I)$ существует, то выполняется неравенство вида:

$$\min_{j \in I}\left(\frac{\max\limits_{j \in I} v^{ji}}{|J_1(i)|}\sum_{j \in J_1(i)} c^{ij} - \min_{j \in I}\left(\ell^i + v^{ji}c^{ij}\right)\right) \leq 0.$$

Рассмотрим модель Неймана-Гейла и определим неймановское состояние равновесие в данной модели Z. Напомним, что невырожденный случай заключается в том, что

$$\alpha \sum_{k \in I} \bar{x}^{ki} = \sum_{k \in I} v^{ki}\bar{x}^{ki} + \min_{j \in I}\frac{\bar{x}^{ij}}{c^{ji}}, \quad \forall\, i \in I. \tag{30}$$

Теорема 4.4.2. Неймановское состояние равновесия, удовлетворяющее равенству (30), может быть построено с помощью модели равновесия без потерь при $\ell = \frac{1}{\alpha}P$, $\mu^k = 1$, $(k \in I)$.

В пятом параграфе 1V Главы исследуются эффективные траектории модели Z.

Пусть $x_t = (x_t^{1\cdot}, \dots, x_t^{n\cdot})$ – эффективная траектория этой модели. Эта траектория допускает характеристику $L_t = (\ell_t^1, \dots, \ell_t^n)$. Здесь $\ell_t^{i\cdot} \in R_+^n$. Можно считать, что $L_t = (\ell_t, \dots, \ell_t)$, где $\ell_t = (\ell_t^1, \dots, \ell_t^n) \in R_+^n$.

Считается, что $\ell_t^i > 0$ при всех i, t, где ℓ_t^i – цена i -го продукта в момент времени t. Определим функции $U_t^k(\ell_{t+1}, x)$:

$$U_t^k(\ell_{t+1}, x) = [\ell_{t+1}, B_t^k \cdot x] + \ell_{t+1}^k \cdot F_t^k(x). \tag{31}$$

Напомним, что число

$$\mu_t^k(x) = \frac{U_t^k(\ell_{t+1}, x)}{[\ell_t, x]}, \quad k \in I \tag{32}$$

является темпом роста совокупного богатства k -й отрасли в состоянии x по ценам ℓ_{t+1}и ℓ_t.

Пусть имеет место равенство

$$R\left(\bar{x}_t^{k\cdot}\right) = I \quad \text{для всех} \quad k \text{ и } t.$$

Равновесный механизм в случае $R\left(\bar{x}_t^{k\cdot}\right) = I$, $(k \in I)$, $t = 1,2,\ldots$ будем называть равновесным механизмом без потерь.

Будем говорить, что в модели Z можно построить траекторию $(x_t)_{t=1}^{\infty}$ с помощью равновесного механизма без потерь, если в любой момент времениt вектора $\bar{x}_t^{k\cdot}$, составляющие состояниеx_t данной траектории, попадают в коническую оболочку, натянутую на вектора вида $c^{\cdot k}(k \in I)$.

Пусть $\bar{x}$ – неймановский равновесный вектор.

Лемма 4.5.1. Пусть дана траектория $(x_t)_{t=1}^{\infty}$ модели Z, обладающая при всех t следующими свойствами: вектор x_t строится как часть равновесия в модели $M = (\{y\}, U_t(\ell_{t+1}), \Lambda_t, V)$, где $V = (R_+^n, \ldots, R_+^n)$, $y = (BF)_{t-1}(x_{t-1})$, а вектор бюджетов $\Lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^n)$ выбран так, что темпы роста $\mu_t^k = 1$, при этом равновесные цены совпадают с $\ell_t = (\ell_t^1, \ldots, \ell_t^n)$, а бюджеты λ_t^k связаны с ℓ_t равенствами $\lambda_t^k = [\ell_t, x_t^{k\cdot}]$. Тогда $L_t = (\ell_t, \ldots, \ell_t)$– характеристика траектории (x_t).

Замечание 1. Характеристика (L_t) (здесь $L = (\ell_t, \ldots, \ell_t)$) траектории (x_t) строится индуктивно с помощью формулы

$$\beta_{t+1} = c_{t+1}^{-1}(E + c_t^v)\beta_t, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

причем $\ell_{t+1} \gg 0$, а вектора $x_t^{k\cdot}$, составляющие состояние x_t данной траектории, определяется по формуле

$$x_t^{k\cdot} = \frac{\lambda_t^i}{[\ell_t, c_t^{\cdot k}]} \cdot c_t^{\cdot k}, \quad k \in I.$$

Замечание 2. Если последовательность (ℓ_t), которая индуктивно строится при начальном векторе ℓ, не является характеристикой траектории (x_t), то при некотором t не выполняется равенство:

$$(BF)_t(x_t) = \sum_{k=1}^{n} x_{t+1}^{i\cdot} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^i \bar{x}_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

либо нарушается условие $(BF)_t$

$$\ell_{t+1} \gg 0, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 4.5.1. Пусть в модели Z имеется лишь одна фондообразующая отрасль и числа $v^i (i \in I)$ такие, что

$$v^i < \frac{c^{1i}}{\sum_{k=2}^{n} c^{1k} \cdot c^{ki}}$$

Тогда ни из какого начального состояния $x_1 \neq \lambda\, \bar{x}\ (\lambda \geq 0)$ нельзя построить эффективную траекторию $(x_t)_{t=1}^{\infty}$ с помощью равновесного механизма без потерь.

Шестой параграф этой главы посвящен асимптотическому поведению траекторий моделей воспроизводства.

При исследовании сформулированной модели воспроизводства используется модель $\mathfrak{M}$ с фиксированными бюджетами, имеющая вид

$$\mathfrak{M} = (\{y\}, U, \Lambda),$$

здесь $y \gg 0$ -некоторый элемент конуса $\mathrm{R}_+{}^n, U = U^i, \ldots, U^n)$, где U^i - функции полезности, определенные равенствами

$$U^i(\bar{f}, x^i) = [\bar{f}, B^i x^i\,] + \bar{f}^i F^i(x^i) \qquad (i = \overline{1,n}\,).$$

Содержательно функции $U^i (i = \overline{1,n}\,)$ представляют собой стоимость всех средств, которыми обладает соответствующая отрасль, по ценам $\bar{f} = (\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^n)$.

Совокупность векторов $(\rho, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ образует состояние равновесия в модели $\mathfrak{M}$, если векторы $\bar{x}^i$ являются решениями задач

$$U^i(\bar{f}, x^i) \to \max \quad (i = \overline{1,n})$$

при условиях $[\rho, x^i] = \lambda_i\,, x^i \geq 0$, и кроме того, выполняются соотношения

$$\sum_{i}^{n} \bar{x}^i = y, \rho \geq 0.$$

Введем в рассмотрение функцию $\tau_i(f, x^i) = \beta_i \nabla_x U^i(f, x^i)$. Как известно, равновесный вектор $\tilde{X} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ является решением уравнения $\Psi(f, X) = 0$, где $\Psi = (\psi_1, \ldots., \psi_n)$ отображение $(R_+{}^n)^n$ в себя, имеющее координатные функции

$$\psi_i(X) = \tau_i\left(f, x^i\right) - \tau_{i+1}\left(f, x^{i+1}\right)$$

при

$$1 \le i \le n-1, \qquad \psi_n(X) = \sum_1^n x^i - y.$$

Исследуем систему $\Psi(f, X) = 0$ с тем, чтобы выяснить, как меняется скорость роста траектории, построенной с помощью модели

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.6. I. Функция $\Psi(f, x)$ дифференцируема по X. При этом $\frac{\partial \Psi}{\partial X}$ совпадает со следующей блочной матрицей

$$\begin{pmatrix} \beta_1(\bar{f}^1 + \Delta f^1)A_1 - \beta_2(\bar{f}^2 + \Delta f^2)A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2\left(\bar{f}^2 + \Delta f^2\right)A_2 - \beta_3(\bar{f}^3 + \Delta f^3)A_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \quad 0 & \beta_{n-1}(\bar{f}^{n-1} + \Delta f^{n-1}) - \beta_n(\bar{f}^n + \Delta f^n)A_n & & \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} \quad \mathrm{I} & & \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

где $A_i = \nabla_x{}^2 \varphi_i\left(\tilde{x}^i\right)$ матрица вторых частных производных функции φ_i, вычисленных в точке $\tilde{x}^i$.

Теорема 4.6.1. Скорости y^i изменения состояний i -ой отрасли $(i = 1, n-1)$ выражаются линейно через координаты вектора y^n.

Теорема 4.6.2. Пусть $M^i = max\left\{\frac{x_1^i}{x_1^n}, \dots, \frac{x_n^i}{x_n^n}\right\}$. Если найдутся достаточно малые $\Delta_i > 0$ такие, что для всех $j = \overline{1, n}$ справедливо $\left|\frac{x_j^i}{x_j^n} - M^i\right| < \Delta_i$, то для любых достаточно малых $\delta_i > 0$ справедливо равенство

$$\left|y_k^i - \frac{a_{12}^n q_n}{a_{12}^i q_i} y_k^n\right| < \varepsilon_i, \quad (i = \overline{2, n-1}, k = \overline{1, n})$$

Следствие. В условиях теоремы знаки координат векторов y^i при $a \le i \le n-1$ совпадают со знаками координат вектора y^n. Координаты же вектора y^1 имеют знаки, противоположные знакам соответствующих координат других векторов.

Лемма 4.6.7. Дана матрица $C = \left(C_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ такая, что

$$C_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(3-n)x_i^2}{x_1x_2}, & i = j \\ \dfrac{x_ix_j}{x_1x_2}, & i \neq j, \end{cases}$$

где x_i вектор с положительными координатами. Тогда для неотрицательной матрицы $\mathcal{A} = C + \mu \mathrm{I}$ где $\mu = (n-3)\max\limits_{k=\overline{1,n}} \frac{x_k^2}{x_1x_2}$ и вектора $x_0 = (x_1x_2, \dots, x_1x_2)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{A}x_0 \leq \xi x_0$$

Лемма 4.6.8. При $n > 3$ для $1 \leq i \leq n$ справедлива оценка

$$\left\|C_i^{-1}\right\| \leq \frac{\xi_i + \mu_i}{2(n-2)\left|q_i a_{12}^i\right|},$$

где

$$\mu_i = (n-3)\max_{k=\overline{1,n}} \frac{\left(x_k^i\right)^2}{x_1^i x_2^i}, \xi_i = \max_{k=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}^i,$$

здесь $\bar{a}_{kj}^i -$ элементы матриц $\mathcal{A}^i$, построенных аналогично матрице $\mathcal{A}$ из леммы 4.6.7.

Теорема 4.6.4. Для $y^k \quad (k = \overline{1,n})$ имеет место оценка

$$\|y^k\| \leq \frac{\bar{L}^2}{\left(q_p a_{12}^p\right)^2} \|K^{-1}\| \{\beta_1 \left\|\frac{\partial F^1}{\partial x^1}\right\| +$$

$$+ \frac{\delta}{2}[k(k-1) + (n-k)(1+n-k)]$$

В V Главе изучается модель Z^2, представляющая собой частный случай модели Z, исследованный в предыдущих главах. Рассматривается двухсекторная модель экономики, первый сектор которой выпускает средства производства, второй – предметы потребления. Изучается равновесный механизм построения траекторий применительно к модели Z^2. Выясняется, при каких условиях равновесные механизмы, определяемыми леонтьевскими производственными функциями, порождают эффективные траектории

В первом параграфе V Главы приводится описание модели Z^2. Вектор $X_t = (X_t^1, X_t^2) \in (R_+^2)^2$ является состоянием модели; здесь $X_t^i = \left(K_t^i, L_t^i\right) \in R_+^2$, K_t^i – основные фонды, L_t^i – рабочая сила в i –м секторе $(i = 1, 2)$. Производственная деятельность i –го сектора в момент t описывается с помощью производственной функции $F_t^i : R_+^2 \to R_+$ и коэффициентов сохранности $0 \le v_t^i \le 1 (i = 1, 2)$. Считается известной ставка заработной платы (удельное потребление) $\omega_t > 0$, совпадающая в первом и во втором секторах.

Переход из состояния $X_t = (K_t^1, L_t^1, K_t^2, L_t^2)$ в состояние $X_{t+1} = (K_{t+1}^1, L_{t+1}^1, K_{t+1}^2, L_{t+1}^2)$ осуществляется с помощью системы неравенств

$$\begin{cases} K_{t+1}^1 + K_{t+1}^2 \le v_t^1 \cdot K_t^1 + v_t^2 \cdot K_t^2 + F_t^1(K_t^1, L_t^1), \\ \omega_{t+1}(L_{t+1}^1 + L_{t+1}^2) \le F_t^2(K_t^2, L_t^2), \\ K_t^i \ge 0, \quad L_t^i \ge 0, \quad (i = 1, 2), \end{cases}$$

где

$$F_t^i\left(K_t^i, L_t^i\right) = \min\left(\frac{K_t^{i,j}}{C_t^{i,j}}, \ \frac{L_t^{i,j}}{C_t^{j,i}}\right), \quad (i, j = 1, 2),$$

$$C_t^{ji} > 0, \ (i, j = 1, 2).$$

Понятно, что модель Z^2 совпадает с моделью Z при $n = 2$ и матрицах B_t^i, имеющих вид

$$B_t^i = \begin{pmatrix} v_t^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (i = 1, 2) .$$

При исследовании модели Z^2 используется простейшее суперлинейное отображение a вида

$$a(K, L) =$$

$$= \left\{(K', L') \middle| K' \ge 0, L' \ge 0, K' + \omega L' \le vK + \min\left(\frac{K}{c^1}, \frac{L}{c^2}\right), (K, L \ge 0)\right\},$$

где $c^1 > 0$, $c^2 > 0$.

Модель Неймана-Гейла $\tilde{Z}$, определенную отображением a, будем записывать в виде $\tilde{Z} = (v, \omega, c^1, c^2)$.

Рассмотрим функцию

$$f(\eta) = \min\left(\frac{\eta}{c^1}, \frac{1}{c^2}\right), \quad (\eta > 0)$$

и введем число

$$\beta = \frac{c^1}{c^2}.$$

Имеет место

Лемма 5.1.1. Пусть

$$g(\eta) = \frac{v\eta + f(\eta)}{\eta + \omega}, \quad (\eta > 0),$$

где v, ω – некоторые константы. Тогда, если $\omega \cdot v < \frac{1}{c^2}$, то функция g достигает максимума на интервале $(0, +\infty)$, причем в единственной точке $\bar{\eta} = \beta$. Если же $\omega \cdot v > \frac{1}{c^2}$, то функция g строго возрастает на этом интервале. В случае $\omega \cdot v = \frac{1}{c^2}$, функция g достигает максимума на интервале $(0, +\infty)$, во всех точках $\bar{\eta} \geq \beta$, причем $\max\limits_{\eta > 0} g(\eta) = v$.

Предложение 5.1.1. Рассмотрим модель $\tilde{Z} = (\omega, c^1, c^2, v)$. Пусть точка $\bar{X} = (\bar{K}, \bar{L})$ таково, что

$$\max_{\substack{K \geq 0,\ L \geq 0 \\ K + \omega \cdot L \neq 0}} \frac{v \cdot K + \min\left(\frac{K}{c^1}, \frac{L}{c^2}\right)}{K + \omega \cdot L} = \frac{v \cdot \bar{K} + \min\left(\frac{\bar{K}}{c^1}, \frac{\bar{L}}{c^2}\right)}{\bar{K} + \omega \cdot \bar{L}}$$

и $\bar{K} + \omega \cdot \bar{L} = 1$. Положим $\bar{p} = (1, \omega)$. Тогда тройка $\left(\alpha(\tilde{Z}), \bar{x}, \bar{p}\right)$ образует состояние равновесия модели (ω, v, c^1, c^2), причем

1. если $\omega v < \frac{1}{c^2}$, то $\bar{K} = \frac{c^1}{c^1 + \omega \cdot c^2}$, $\bar{L} = \frac{c^2}{c^1 + \omega \cdot c^2}$,
2. если $\omega v = \frac{1}{c^2}$, то $\frac{\bar{K}}{\bar{L}} > \frac{c^1}{c^2}$,
3. если же $\omega v > \frac{1}{c^2}$, то $\bar{K} = 1$, $\bar{L} = 0$.

Второй параграф пятой Главы посвящен исследованию стационарного случая модели Z^2, описанный в §5.1 $v_t^i = v^i$, $\omega_t = \omega$, $c_t^{ij} = c^{ij}$ при всех $t = 0, 1, \ldots, (i, j = 1, 2)$. В этом случае модель Z^2 обращается в модель Неймана-Гейла, которую мы обозначим $\bar{Z}^2$. Она определяется отображением

$$a(K_1, L_1, K_2, L_2) = \{(K_1^1, L_1^1, K_2^1, L_2^1) |\ 0 \leq K_1^1 + K_2^1 \leq$$

$$\leq v^1K_1 + v^2K_2 + \min\left(\frac{K_1}{c^{11}}, \frac{L_1}{c^{21}}\right), \qquad (33)$$

$$0 \leq \omega(L_1^1 + L_2^1) \leq \min\left(\frac{K_2}{c^{12}}, \frac{L_2}{c^{22}}\right), \;\; K_i \geq 0, \;\; L_i \geq 0, \;\; (i \neq 1,2)\Big\}.$$

Введем модели $Z_1(b)$ и $Z_2(b)$ при некотором $b > 0$, определяемых соответственно наборами

$$(v^1, b\omega, c^{11}, c^{21}), \quad \left(v^2, b\omega, \tfrac{1}{b}c^{12}, \tfrac{1}{b}c^{22}\right) \qquad (34)$$

и числа

$$\beta^1 = \frac{c^{11}}{c^{21}}, \qquad \beta^2 = \frac{c^{12}}{c^{22}}. \qquad (35)$$

Каждому из наборов (34) сопоставим числа $\alpha_i(b)$ и $\bar{\eta}^i$ по лемме 5.1.1

$$\bar{\eta}^1 = \beta^1, \quad \alpha_1(b) = \frac{1 + v^1c^{11}}{c^{11} + b\omega c^{21}}$$

и

$$\bar{\eta}^2 = \beta^2, \quad \alpha_2(b) = \frac{b + v^2c^{12}}{c^{12} + b\omega c^{22}}.$$

Лемма 5.2.1. Пусть

$$v^2 - v^1 < \frac{1}{c^{11}}, \qquad \beta^1 \neq \beta^2. \qquad (36)$$

Тогда уравнение $b = V(b)$, где

$$V(b) = (1 + v^1c^{11})\frac{c^{12} + b\omega c^{22}}{c^{11} + b\omega c^{21}} - v^2c^{12},$$

имеет единственное положительное решение $\bar{b}$. При этом соотношение $b < V(b)$ эквивалентно неравенству $0 < b < \bar{b}$.

Предложение 5.2.1. Пусть выполнены условия леммы 5.2.1 причем $\beta^1 > \beta^2$ для последовательности b_t выполняется равенства $b_{t+1} = V(b_t)(t = 0, 1, 2, \dots)$ и $b_0 > 0$. Тогда $b_t \to \bar{b}$, причем, если $b_0 < \bar{b}$, то b_t возрастает, если $b_0 > \bar{b}$, то b_t – убывает

Теорема 5.2.1. Пусть $\omega v^2 < \frac{1}{c^{22}}$, выполнены условия (36) и число $\bar{b}$ определено так, как в лемме 5.2.1. Тогда число $\alpha = \alpha_1(\bar{b}) = \alpha_2(\bar{b})$ являются неймановским темпом роста модели

$\bar{Z}_2$; функционал $\bar{p} = \left(1, \bar{b} \cdot \omega, 1, \bar{b} \cdot \omega\right)$ является неймановским равновесными ценами; неймановский равновесный вектор $\bar{x} = (\bar{K}^1, \bar{L}^1, \bar{K}^2, \bar{L}^2)$ определяется соотношениями:

$$\frac{\bar{K}^1}{\bar{L}^1} = \beta^1, \quad \frac{\bar{K}^2}{\bar{L}^2} = \beta^2, \quad \frac{\bar{L}^1}{\bar{L}^2} = \frac{\left(\frac{1}{c^{22}} - \omega v^2\right) \cdot c^{12}}{\left(\bar{b} + v^2 c^{12}\right) \omega},$$

где β^1, β^2 определены формулой (35).

Опишем применительно к модели $\tilde{Z}_2$ равновесный механизм построения траекторий модели Z, рассмотренный в §3.1. Пусть задан вектор цен $\ell = (\ell^1, \ell^2)$, где $\ell^1 > 0$, $\ell^2 > 0$. Не умаляя общности, считаем, что цена фондов $\ell^1 = 1$, нам удобно будет записывать ℓ^2 в виде $\ell^2 = b\omega$, тем самым вектор цен ℓ имеет вид $\ell = (1, b\omega)$, где $\ell > 0$ и b – цена единицы потребления. Рассмотрим ожидаемое совокупное богатство подразделений при этих ценах и векторе ресурсов $x = (K, L)$:

$$U^1(\ell, x) = v^1 K + \min\left(\frac{K}{c^{11}}, \frac{L}{c^{21}}\right),$$

$$U^2(\ell, x) = v^2 K + \min\left(\frac{K}{c^{12}}, \frac{L}{c^{22}}\right).$$

Далее U^1 и U^2 выступают как функции полезности подразделений. Пусть $y = (K, L)$ – вектор распределяемых ресурсов; λ^1, λ^2 – заданные бюджеты подразделений. Рассмотрим модель M равновесия с фиксированными бюджетами, определяемую величинами U^1, U^2, λ^1, λ^2, (K, L).

Положим

$$p = (p^1, p^2), \ \ \beta = \frac{K}{L}, \quad \beta^1 = \frac{c^{11}}{c^{21}},$$

$$\beta^2 = \frac{c^{11}}{c^{22}}, \quad u^1 = \frac{1}{v^1 c^{21}}, \quad u^2 = \frac{b}{v^2 c^{22}}.$$

Напомним, что набор (p, x^1, x^2) является состоянием равновесия (см. §1.5) в модели M, если

$$x^1 + x^2 = y$$

и вектор x^i есть решение задачи

$U^i(\ell, x) \to max$ при условии $x \geq 0$, $\left[p, x^i\right] \leq \lambda^i (i = 1,2)$.

Предложение 5.2.3. Пусть $p = (p^1, p^2)$ – некоторые цены. Тогда

1) если $p^1 = 0$, $p^2 > 0$, то состояние равновесия (p, x^1, x^2) не существует;

2) если $p^2 = 0$, $p^1 > 0$, то набор (p, x^1, x^2), где

$$p^1 = \frac{1}{\beta\mathcal{L}}(\lambda^1 + \lambda^2), \quad p^2 = 0, \quad x^1 = \frac{\lambda^1}{p^1}\left(1, \frac{1}{\beta^1}\right),$$

$$x^2 = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(1, \frac{1}{\beta^2}\right),$$

(здесь β, β^1, β^2 определены выше), является состоянием равновесия тогда и только тогда, когда

$$\mu > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \beta^1 = \beta^2.$$

Предложение 5.2.4. Пусть $u^2 \le \frac{p^2}{p^1} \le u^1 (p^1 > 0,\ p^2 > 0)$, где числа u^1, u^2,β, β^1, β^2 определены выше. Тогда набор (p, x^1, x^2) является состоянием равновесия в модели M тогда и только тогда, когда

$$1) \qquad x^1 = \frac{\lambda^1}{p^1\beta^1 + p^2}(\beta^1, 1), \quad x^2 = \frac{\lambda^2}{p^1}(1, 0),$$

$$p^1 = \frac{\lambda^2}{(\beta - \beta^1)\mathcal{L}}, \quad p^2 = \frac{1}{\mathcal{L}}\left(\lambda^1 - \frac{\lambda^2 \cdot \beta^1}{\beta - \beta^1}\right),$$

$$2) \qquad \beta > \beta^1, \quad \vartheta_1(\beta) < \mu < \vartheta_2(\beta).$$

Здесь

$$\vartheta_1(\beta) = \frac{\beta^1 + u^2}{\beta - \beta^1}, \quad \vartheta_2(\beta) = \frac{\beta^1 + u^1}{\beta - \beta^1}.$$

Предложение 5.2.5. Пусть выполнена $u^1 \le \frac{p^2}{p^1} \le u^2 (p^1 > 0, p^2 > 0)$, где числа u^1, u^2, β^1, β^2

$$p = (p^1, p^2), \ \beta = \frac{K}{L}, \quad \beta^1 = \frac{c^{11}}{c^{21}},$$

$$\beta^2 = \frac{c^{11}}{c^{22}}, \quad u^1 = \frac{1}{v^1 c^{21}}, \quad u^2 = \frac{b}{v^2 c^{22}}.$$

Тогда набор (p, x^1, x^2) является состоянием равновесия в модели M тогда и только тогда, когда

$$1)\quad x^1 = \frac{\lambda^1}{p^2}(1,0), \quad x^2 = \frac{\lambda^2}{p^1\beta^2 + p^2}(\beta^2, 1),$$

$$p^1 = \frac{\lambda^1}{(\beta - \beta^2)\mathcal{L}}, \quad p^2 = \frac{1}{\mathcal{L}}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^1 \cdot \beta^2}{\beta - \beta^2}\right),$$

$$2)\qquad \beta > \beta^2, \quad \vartheta_3(\beta) < \mu < \vartheta_4(\beta).$$

Здесь

$$\vartheta_3(\beta) = \frac{\beta - \beta^2}{\beta^2 + u^2}, \quad \vartheta_4(\beta) = \frac{\beta - \beta^2}{\beta^2 + u^1}.$$

Предложение 5.2.6. Пусть выполнено $\left(p^1 > 0 \frac{p^2}{p^1} < \min(u^1, u^2), p^2 > 0\right)$, где параметры $u^1, u^2, \beta, \beta^1, \beta^2$ определены выше. Тогда набор (p, x^1, x^2) является состоянием равновесия в модели M тогда и только тогда, когда

$$x^1 = \frac{\lambda^1}{p^1\beta^1 + p^2}(\beta^1, 1), \quad x^2 = \frac{\lambda^2}{p^1\beta^2 + p^2}(\beta^2, 1),$$

$$p^1 = \frac{1}{\mathcal{L}}\left(\frac{\lambda^1}{\beta - \beta^2} - \frac{\lambda^2}{\beta^1 - \beta}\right), \quad p^2 = \frac{1}{\mathcal{L}}\left(\frac{\lambda^2\beta^1}{\beta^1 - \beta} - \frac{\lambda^1 \cdot \beta^2}{\beta - \beta^2}\right),$$

и выполнено одно из двух условий:

$$\vartheta_5(\beta) < \mu < \vartheta_6(\beta) \text{ при } \quad \beta^2 < \beta < \beta^1,$$

или

$$\vartheta_6(\beta) < \mu < \vartheta_5(\beta) \text{ при } \quad \beta^1 < \beta < \beta^2,$$

где

$$\vartheta_5(\beta) = \frac{\beta - \beta^2}{\beta^1 - \beta} \cdot \frac{\beta^1 + \min(u^1, u^2)}{\beta^2 + \min(u^1, u^2)},$$

$$\vartheta_6(\beta) = \frac{\beta - \beta^2}{\beta^1 - \beta} \cdot \frac{\beta^1}{\beta^2}.$$

Предложение 5.2.7. Пусть $p^2 = 0$ и параметры β, β^1, β^2, u^1, u^2 имеют вид,как выше. Тогда набор (p, x^1, x^2) является состоянием полуравновесия) тогда и только тогда, когда

$$p^1 = \frac{1}{\beta\mathcal{L}} \cdot (\lambda^1 + \lambda^2), \quad p^2 = 0,$$

$$x^1 = (K^1, L^1): \quad K^1 = \frac{\lambda^1}{p^1}, \quad L^1 \geq \frac{\lambda^1}{p^1 \cdot \beta^1},$$
$$x^2 = (K^2, L^2): \quad K^2 = \frac{\lambda^2}{p^1}, \quad L^2 \geq \frac{\lambda^2}{p^1 \cdot \beta^2},$$
и выполняется одно из следующих условий:
$$\mu > 0 \quad \text{при} \quad \beta < \min(\beta^1, \beta^2);$$
$$\mu \geq \vartheta_6(\beta) \quad \text{при} \quad \beta^2 < \beta < \beta^1;$$
$$\mu \leq \vartheta_6(\beta) \quad \text{при} \quad \beta^1 < \beta < \beta^2;$$
где
$$\mu = \frac{\lambda^1}{\lambda^2}, \quad \vartheta_6(\beta) = \frac{\beta - \beta^2}{\beta^1 - \beta} \cdot \frac{\beta^1}{\beta^2}.$$

Теорема 5.2.3. Модель M может иметь полуравновесия лишь типа $\tilde{E}^1$, $\tilde{E}^2$, $\tilde{E}^3$, $\tilde{E}^4$ и $\tilde{E}^5$, при этом полуравновесие $\tilde{E}^1$ реализуется тогда и только тогда, когда
$$\beta < \min(u^1, u^2), \quad \mu > 0,$$
или
$$\beta^2 < \beta < \beta^1, \quad \mu \geq \frac{\beta - \beta^2}{\beta^1 - \beta} \cdot \frac{\beta^1}{\beta^2},$$
или
$$\beta^1 < \beta < \beta^2, \quad \mu \leq \frac{\beta^2 - \beta}{\beta - \beta^1} \cdot \frac{\beta^1}{\beta^2},$$
где $\beta = \frac{\mathcal{K}}{\tilde{\mathcal{L}}}$;

полуравновесие $\tilde{E}^2$ реализуется тогда и только тогда, когда
$$\tilde{\beta} > \beta^1, \qquad \frac{\beta^1 + u^2}{\tilde{\beta} - \beta^1} < \mu < \frac{\beta^1 + u^1}{\tilde{\beta} - \beta^1},$$
где $\tilde{\beta} = \frac{\mathcal{K}}{\tilde{\mathcal{L}}}$, $\tilde{\mathcal{L}} \leq \mathcal{L}$;

полуравновесие $\tilde{E}^3$ реализуется тогда и только тогда, когда
$$\tilde{\beta} > \beta^2, \qquad \frac{\tilde{\beta} - \beta^2}{\beta^2 + u^2} < \mu < \frac{\tilde{\beta} - \beta^2}{\beta^2 + u^1},$$
где $\tilde{\beta} = \frac{\mathcal{K}}{\tilde{\mathcal{L}}}$, $\tilde{\mathcal{L}} \leq \mathcal{L}$;

полуравновесие $\tilde{E}^4$ реализуется тогда и только тогда, когда
$$\beta^2 < \tilde{\beta} < \beta^1,$$

$$\frac{\tilde{\beta}-\beta^2}{\beta^1-\tilde{\beta}}\cdot\frac{\beta^1+\min(u^1,u^2)}{\beta^2+\min(u^1,u^2)}<\mu<\frac{\tilde{\beta}-\beta^2}{\beta^1-\tilde{\beta}}\cdot\frac{\beta^1}{\beta^2}$$

или

$$\beta^1<\tilde{\beta}<\beta^2,$$

$$\frac{\beta^2-\tilde{\beta}}{\tilde{\beta}-\beta^1}\cdot\frac{\beta^1}{\beta^2}<\mu<\frac{\beta^2-\tilde{\beta}}{\tilde{\beta}-\beta^1}\cdot\frac{\beta^1+\min(u^1,u^2)}{\beta^2+\min(u^1,u^2)},$$

где $\tilde{\beta}=\frac{\mathcal{K}}{\tilde{\mathcal{L}}}$, $\tilde{\mathcal{L}}\le\mathcal{L}$;

полуравновесие $\tilde{E}^5$ реализуется тогда и только тогда, когда $\beta>0$, $\mu>0$, где

$$\beta=\frac{\mathcal{K}}{\tilde{\mathcal{L}}}.$$

Справедлива

Теорема 5.2.4. Модель M может иметь полуравновесия лишь типа $\tilde{\tilde{E}}^1$, $\tilde{\tilde{E}}^2$, $\tilde{\tilde{E}}^3$ и $\tilde{\tilde{E}}^4$. При этом полуравновесие $\tilde{\tilde{E}}^1=(p,x^1,x^2)$, где

$$x^1=\frac{\lambda^1}{p^1}\left(1,\frac{1}{\beta^1}\right),\qquad x^2=\frac{\lambda^2}{p^1}\left(1,\frac{1}{\beta^2}\right),$$

$$p^1=\frac{1}{\beta\mathcal{L}}\cdot(\lambda^1+\lambda^2),\qquad p^2=0$$

реализуется тогда и только тогда, когда

$$\beta=\beta^1=\beta^2,\qquad \mu>0,$$

где $\beta=\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{L}}$;

полуравновесие $\tilde{\tilde{E}}^2=(p,x^1,x^2)$, где

$$x^1=\frac{\lambda^1}{p^1\beta^1+p^2}(\beta^1,1),\qquad x^2=\frac{\lambda^2}{p^1}(1,0),$$

$$p^1=\frac{\lambda^2\tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\mathcal{K}}\left(\tilde{\tilde{\beta}}-\beta^1\right)},\qquad p^2=\frac{\tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\mathcal{K}}}\left(\lambda^1-\frac{\lambda^2\beta^1}{\tilde{\tilde{\beta}}-\beta^1}\right)$$

реализуется тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\tilde{\beta}}>\beta^1,\qquad \frac{\beta^1+u^2}{\tilde{\tilde{\beta}}-\beta^1}\le\mu\le\frac{\beta^1+u^1}{\tilde{\tilde{\beta}}-\beta^1},$$

где $\tilde{\tilde{\beta}} = \frac{\tilde{\mathcal{K}}}{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{K}} \leq \mathcal{K}$;

полуравновесие $\tilde{\tilde{E}}^3 = (p, x^1, x^2)$, где

$$x^1 = \frac{\lambda^1}{p^1}(1,0), \qquad x^2 = \frac{\lambda^2}{p^1\beta^2 + p^2}(\beta^2, 1),$$

$$p^1 = \frac{\lambda^1\tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\mathcal{K}}\left(\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2\right)}, \qquad p^2 = \frac{\tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\mathcal{K}}}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^1\beta^2}{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}\right)$$

реализуется тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\tilde{\beta}} > \beta^2, \qquad \frac{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}{\beta^2 + u^2} \leq \mu \leq \frac{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}{\beta^2 + u^1},$$

где $\tilde{\tilde{\beta}} = \frac{\tilde{\mathcal{K}}}{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{K}} \leq \mathcal{K}$;

полуравновесие $\tilde{\tilde{E}}^4 = (p, x^1, x^2)$, где

$$x^1 = \frac{\lambda^1}{p^1\beta^1 + p^2}(\beta^1, 1), \qquad x^2 = \frac{\lambda^2}{p^1\beta^2 + p^2}(\beta^2, 1),$$

$$p^1 = \frac{\tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\mathcal{K}}}\left(\frac{\lambda^1}{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2} - \frac{\lambda^2}{\beta^1 - \tilde{\tilde{\beta}}}\right), \qquad p^2 = \frac{\tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\mathcal{K}}}\left(\frac{\lambda^2\beta^1}{\beta^1 - \tilde{\tilde{\beta}}} - \frac{\lambda^1\beta^2}{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}\right)$$

реализуется тогда и только тогда, когда

$$\beta^2 < \tilde{\tilde{\beta}} < \beta^1,$$

$$\frac{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}{\beta^1 - \tilde{\tilde{\beta}}} \cdot \frac{\beta^1 + \min(u^1, u^2)}{\beta^2 + \min(u^1, u^2)} \leq \mu \leq \frac{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}{\beta^1 - \tilde{\tilde{\beta}}} \cdot \frac{\beta^1}{\beta^2},$$

если

$$\beta^1 < \tilde{\tilde{\beta}} < \beta^2,$$

$$\frac{\beta^2 - \tilde{\tilde{\beta}}}{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^1} \cdot \frac{\beta^1}{\beta^2} \leq \mu \leq \frac{\tilde{\tilde{\beta}} - \beta^2}{\beta^1 - \tilde{\tilde{\beta}}} \cdot \frac{\beta^1 + \min(u^1, u^2)}{\beta^2 + \min(u^1, u^2)},$$

где $\tilde{\tilde{\beta}} = \frac{\tilde{\mathcal{K}}}{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{K}} \leq \mathcal{K}$.

Эффективные траектории модели Z^2 рассматриваются в третьем параграфе V Главы.

Рассмотрим траекторию $(x_t)_{t=0}^{\infty}$, у которой векторы $x_t = (K_t^1, L_t^1, K_t^2, L_t^2)$ строго положительны $\left(K_t^i > 0,\ L_t^i > 0,\ i = 1,2\right)$.

Напомним, что траектория $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ является оптимальной (эффективной), если она допускает характеристику $(\tilde{\ell}_t)$.

Пусть траектория $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ допускает характеристику $(\tilde{\ell}_t)$. Тогда найдутся такие числа $b_t^1 \geq 0,\ b_t^2 \geq 0,$ что

$$\tilde{\ell}_t = (b_t^1,\ b_t^2,\ b_t^1,\ b_t^2),$$

Пусть $\ell_t^{\Delta} = (b_t^1, b_t^2),\ \tilde{\ell}_t = (\ell_t^{\Delta}, \ell_t^{\Delta}),$ т.е. цены продуктов не зависят от подразделения, где они рассматриваются. Предположим, что $b_t^1 > 0$ для всех t и запишем вектор ℓ_t^{Δ} в виде

$$\ell_t^{\Delta} = b_t^1 \ell_t,$$
$$\ell_t = (1,\ b_t \omega_t). \tag{37}$$

Положим

$$U_t^1(\ell_{t+1},\ x) = v_t^1 K + \min\left(\frac{K}{c_t^{11}}, \frac{L}{c_t^{21}}\right),$$

$$U_t^2(\ell_{t+1},\ x) = v_t^2 K + b_{t+1} \min\left(\frac{K}{c_t^{12}}, \frac{L}{c_t^{22}}\right),$$

где $c_t^{ij} > 0\ (i, j = 1, 2;\quad t = 0, 1, 2, \dots)$ – заданные числа.

Теорема 5.3.1. Пусть$(x_t)_{t=0}^{\infty}$ – траектория модели Z^2, допускающая характеристику $(\tilde{\ell}_t)$. Предположим, что $K_t^i > 0$, $L_t^i > 0 (i = 1, 2)$ и числа b_t определены равенством (34). Тогда

$$b_{t+1} = V_t(b_t).$$

Лемма 5.3.2. Если для всех $t = 0, 1, 2, \dots$

$$v_t^2 - v_t^1 < \frac{1}{c_t^{11}},$$

$$\beta_t^1 > \beta_t^2,$$

$$d_t^2 \leq c_2 = const,$$

Теорема 5.3.2. Пусть выполнены предположения (37) и условия леммы 5.3.2. Тогда последовательность $\{b_t\}$ сходится к $\bar{b}$, где $\bar{b}$ определена в лемме 5.2.1.

В следующих параграфах рассматривается такого же типа модели воспроизводства, как в предыдущих главах, но с произвольными производственными функциями. Показывается, что в двухсекторной модели существует такие цены, отличное от

неймановских, при которых возможен сбалансированный рост подразделений. А также дается описание неймановской грани в случае невырожденности.

В четвертом параграфе V Главы дается описание двухсекторной модели экономической динамики. Первый сектор производит средства производства, второй сектор – предметы потребления.

Двухсекторная модель Z задается с помощью производственного отображения $a(x)$:

$$a(K_1, L_1, K_2, L_2) = \{(K_1', L_1', K_2', L_2') | K_1' \le v_1 K_1 + F_1(K_1, L_1) u_1,$$
$$K_2' \le v_2 K_2 + F_1(K_1, L_1) u_2, \;\; u_1 + u_2 \le 1, \;\; L_1' \le F_2(K_2, L_2) v_1,$$
$$L_2' \le F_2(K_2, L_2) v_2, \quad \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 \le 1\}.$$

Предполагается, что производственная функция задана на конусе R_+^2 и там неотрицательна, суперлинейна. Кроме того, $F_i(K, 0) = F_i(0, L) = 0$. При этих предположениях отображение $a(x)$ суперлинейно и, следовательно, Z – модель Неймана-Гейла.

Введем обозначения

$$f_i(\eta) = F_i(\eta, 1), \quad (i = 1, 2), \quad \eta = \frac{K}{L},$$
$$p = (p^{11}, \;\; p^{12}\omega_1, \;\; p^{21}, \;\; p^{22}\omega_2),$$

где p^{1i} – цена единицы фондов в первом и втором секторе $(i = 1, 2)$.Такой же смысль имеет и p^{i2}, $(i = 1, 2)$.

При исследовании двухсекторной модели Z нам понадобятся однопродуктовые модели Z_1 и Z_2, которые задаются производственными отображениями $a_1(x)$ и $a_2(x)$ соответственно, определенными на конусе R_+^2 с помощью формул:

$$a_1(K_1, L_1) = \{(K_1', L_1') | 0 \le K_1' \le v_1 K_1' + u_1, \;\; u_1 \ge 0,$$
$$u_1 + \widetilde{\omega}_1 L_1' \le \widetilde{F}_1(K_1, L_1),$$
$$\widetilde{\omega}_1 = \frac{p^{12}}{p^{11}} \omega_1, \;\; \widetilde{F}_1(K_1, L_1) = \max\left(1, \frac{p^{21}}{p^{11}}\right) F_1(K_1, L_1)\Bigg\};$$
$$a_2(K_2, L_2) = \{(K_2', L_2') | 0 \le K_2' \le v_2 K_2 + u_2, \;\; u_2 \ge 0,$$
$$u_2 + \widetilde{\omega}_2 L_2' \le \widetilde{F}_2(K_2, L_2),$$

$$\widetilde{\omega}_2 = \frac{p^{22}}{p^{21}}\omega_2, \;\; \tilde{F}_2(K_2, L_2) = \max\left(\frac{p^{12}}{p^{21}}, \frac{p^{22}}{p^{21}}\right) F_2(K_2, L_2)\Bigg\}.$$

Рассмотрим модели Z_i, $(i = 1, 2)$ при $\widetilde{\omega}_i v_i \le \tilde{s}_i$, где $\tilde{s}_i = \lim\limits_{\eta \to +\infty} \tilde{f}_i(\eta)$, $\tilde{f}_i(\eta) = \tilde{F}_i(\eta, 1)$. Легко убедится, что неймановские темпы роста α_i этих моделей вычисляются по формуле

$$\alpha_i = \max_{K,L>0} \frac{v_i K + \tilde{F}_i(K, L)}{K + \widetilde{\omega}_i L} = \max_{\eta>0} \frac{v_i \eta + \tilde{f}_i(\eta)}{\eta + \widetilde{\omega}_i} \, (i = 1, 2), \quad (38)$$

Лемма 5.4.1. Пусть $p = (p^{11},\ p^{12}\omega_1,\ p^{21},\ p^{22}\omega_2)$ вектор цен, $a(x)$ - производственное отображение модели Z. Тогда для вектора $x = (K_1, L_1, K_2, L_2)$ верно соотношение

$$\max[p, y] = p^{11} v_1 K_1 + p^{21} v_2 K_2 + \max(p^{11}, p^{21})\, F_1(K_1, L_1) + \max(p^{12}, p^{22})\, F_2(K_2, L_2)$$

Предложение 5.4.1. Справедливо равенство

$$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2),$$

где α, α_1, α_2 – неймановские темпы роста моделей Z, Z_1, Z_2 соответственно.

Теорема 5.4.1. Пусть $\bar{x} = (\bar{K}_1, \bar{L}_1, \bar{K}_2, \bar{L}_2)$ – равновесный вектор, $p = (p^{11},\ p^{12}\omega_1,\ p^{21},\ p^{22}\omega_2)$ – равновесные цены $(p^{11} > 0,\ p^{21} > 0)$, число $\alpha > 0$ – неймановский темп роста, $\bar{K}_i + \omega_i \bar{L}_i = 1$, $(i = 1, 2)$, $\omega_i v_i \le s_i$, $s_i = \lim\limits_{\eta \to +\infty} f_i(\eta_i)$.

Тогда

1) если $\alpha_1 > \alpha_2$, $p^{22} > 0$, то равновесный вектор модели Z имеет вид $\bar{x} = (1, 0, 0, 0)$, причем вектор $\bar{x}_1 = (1, 0)$ является равновесным вектором в однопродуктовой модели Z_1;

2) если $\alpha_2 > \alpha_1$, $p^{12} > 0$, то $\bar{x} = (0, 0, 1, 0)$, причем $\bar{x}_2 = (1, 0)$ является равновесным вектором в модели Z_2;

3) если $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, то неймановский равновесный вектор $\bar{x} = (\bar{K}_1, \bar{L}_1, \bar{K}_2, \bar{L}_2)$ определяется соотношениями

$$\frac{\bar{K}_i}{\bar{L}_i} = \bar{\eta}_i, \quad \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_2} = \frac{(\alpha - v_2)\bar{\eta}_2}{\alpha \omega_1},$$

где $\bar{\eta}_i$ – точка, в которой достигается максимум в (35).

При этом существует неймановские цены вида $p = (1, b\omega_1, 1, b\omega_2)$, где b – есть решение уровнения $\alpha_1(b) = \alpha_2(b)$.

В пятом параграфе V Главы исследуется невырожденное неймановское равновесие. Неймановское равновесие характеризуется тем, что $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$, где

$$\alpha_1(p) = g(b_1, c)\,,$$
$$\alpha_2(p) = h(b_2, d),$$

где b_1, b_2, c и d определены в первом параграфе V Главы.

Представляет интерес рассмотреть такие цены

$$p = (p^{11},\ p^{12}\omega_1,\ p^{21},\ p^{22}\omega_2)(p^{11} > 0,\ p^{21} > 0)$$

необязательно неймановские, что $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$. Выясним, при каких ценах p справедливо равенство $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$. Введем новые переменные

$$q_1 = \frac{p^{12}}{p^{11}}\,, \quad q_2 = \frac{p^{22}}{p^{21}}\,, \quad q_3 = \frac{p^{12}}{p^{21}}.$$

Рассмотрим функции

$$\beta_1(q) = g(b_1, c), \quad \text{где} \quad b_1 = q_1, \quad c = \max\left(1, \frac{q_1}{q_3}\right);$$

$$\beta_2(q) = h(b_2, d), \quad \text{где} \quad b_2 = q_2, \quad d = \max(q_3, q_2).$$

Положим:

$$c = h(q_3),$$

где $h(q_3) = h(q_2, q_3)$.

Теорема 5.5.1. Пусть $\omega_i v_i < s_i (i = 1, 2)$.

1) Множество точек (q_1, q_3) представляет собой множество решений неравенства

$$\beta_1(q_1, q_3) \geq c.$$

2) Если (q_1, q_3) удовлетворяет строгому неравенству

$$\beta_1(q_1, q_3) > c,$$

то существует два значения q_2, при которых выполняются условия

$$\beta_1(q_1, q_3) = \beta_2(q_2, q_3)$$

3) Если (q_1, q_3) удовлетворяют равенству

$$\beta_1(q_1, q_3) = c,$$

то существует единственное решение $q_1 = q_3$ – неймановские цены.

Замечание. При каждом q_3 уравнение

$$\beta_2(q_2, q_3) = \beta_1(q_1, q_3)$$

имеет смысл рассматривать при q_1 таких, что $\beta_1(q_1, q_3) = a \geq d(q_3)$. Так как $\inf d(q_3) = v_1 < c$, то существует такие q_1, q_3, что $\beta_1(q_1, q_3) < c$. Для этих (q_1, q_3) не существует такого q_2, при котором уравнение имеет решение.

Если $\beta_1(q_1, q_3) = a = c$, то существует единственное решение q_2 уравнения. При этом $p = (p^{11}, p^{12}\omega_1, p^{21}, p^{22}\omega_2)$– неймановские цены, где $q_1 = \frac{p^{12}}{p^{11}}$, $q_2 = \frac{p^{22}}{p^{21}}$, $q_3 = \frac{p^{12}}{p^{21}}$, а при $\beta_1(q_1, q_3) = a > c$, то существует два решения q_2 уравнения. Исходя из выше изложенного, получаем что не существует такой функции, которая выражала бы одну из координат вектора $q = (q_1, q_2, q_3)$ через две другие, так как имеет два значения.

Шестой параграф пятой Главы посвящен неймановским граням, т.е. нас будет интересовать только невырожденный случай, а именно $\alpha_1 = \alpha_2$.

Как известно, множество

$$N_\alpha = K \bigcap H_p,$$

где $H_p = \{(x, y) | [p, y] = \alpha[p, x]\}$, p – неймановские цены, называется неймановской гранью данного состояния равновесия, где K – конус модели Z. Построим неймановскую грань N_α для модели Z. Пусть $x = (K_1, L_1, K_2, L_2)$, $p = (p^{11},\ p^{12}\omega_1,\ p^{21},\ p^{22}\omega_2) = (1,\ b\omega_1,\ 1,\ b\omega_2)$ – неймановские цены.

По определению

$$N_\alpha = \{(x, y) \in Z \,|\, [p, y] = \alpha[p, x]\}.$$

Теорема 5.6.1. Пусть $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, $p = (1,\ b\omega_1,\ 1,\ b\omega_2)$ – неймановские цены. Тогда неймановская грань имеет следующий вид:

$$N_\alpha = \{(x, y) \big| x = \big(\lambda(\bar{K}_1, \bar{L}_1),\ \mu(\bar{K}_2, \bar{L}_2)\big),$$
$$\forall\ y \in \tilde{a}(x), \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0\}.$$

В шестой Главе рассматривается модели экономической динамики производства и обмена неймановского типа, определенные на графе. Модель определяется орграфом, каждая вершина которого связана с некоторым суперлинейным

многозначным отображением, описывающим технологические возможности некоторой экономической единицы Существование дуги из вершины в вершину означает возможность транспортировки продуктов из одной вершины в другую. Вычислена двойственная модель и с ее помощью найдены характеристики оптимальных траекторий.

В первом параграфе исследуется модель экономической динамики, описывающую поведение во времени экономической системы S, состоящей из конечного числа производственных единиц $s_i, i = \overline{1,m}$. Рассматривается случай, когда транспортные расходы не учитывается. Каждая производственная единица задается моделью Неймана-Гейла, определяемой суперлинейным многозначным отображением $a_i: R_+^n \to \pi(R_+^n)$. Поэтому предполагается, что фазовое пространство одинаково для всех моделей. Между некоторыми из этих производственных единиц допускается обмен продукцией. Для формального описания модели введем граф $P(J,Q)$, где $P(J,Q)$ - граф, не имеющий петель, J - набор вершин и Q - многозначное отображение J в J. Точнее, $Q(j)$ это набор вершин $k \in J$ такой, что существует дуга из вершины j в вершину k, а $Q^{-1}(j)$ множество $k \in J$ таких, что существует дуга из вершины j в вершину k. Под дугой из вершины j в вершину k будем понимать упорядоченную пару (j,k). Наличие дуги (j,k) означает возможность транспортировки из j в k. Модель S имеет дело с теми же продуктами, что и модели s_i, однако удобнее различать продукты, соответствующие различным вершинам графа.

В связи с этим будем считать, что фазовое пространство модели совпадает с конусом $(R_+^n)^m$. Если $X = (x_1, \dots, x_m) \in (R_+^n)^m$, то элемент $x_i \in R_+^n$ интерпретируется как набор продукции, имеющейся на i-ом производстве. Отображения A и B и описывающие производство и обмен соответственно, определяются следующим образом:

$$A(X) = \{Y | Y = (y_1, \dots, y_m), y_i \in a_i(x_i), i = \overline{1,m}\},$$

$$B(Y)=\left\{Z|Z=(z_1,\dots,z_m), z_i=y_i+\sum_{j\in Q(i)}u_{ji}-\sum_{k\in Q^{-1}(i)}u_{ik},\right.$$

$$\left. u_{ij}\geq 0, \sum_{k\in Q^{-1}(i)}u_{ik}\leq y_i\right\}.$$

Вектор u_{ji} описывает продукты, транспортируемые по дуге (j,i). Нетрудно проверить, что отображения A и B суперлинейны.

Если $M\in R_+^n\times R_+^n$ модель Неймана-Гейла, то двойственная модель M' определяется следующим образом:

$$M'=\{(f,g)\in(R_+^n)^*\times(R_+^n)^*|[f,x]\geq[g,y]$$
$$\text{для всех } (x,y)\in M\}.$$

Дадим описание модели, двойственной к S. С этой целью опишем отображения A' и B', двойственные к A и B соответственно. В дальнейшем мы будем обозначать конус $(R_+^n)^m$ через K. Тогда $K^*=((R_+^n)^m)^*$. Элементы конусов K и K^* обозначим прописными буквами, а проекции этих элементов на -й сомножитель соответствующими строчными буквами с индексом i. Таким образом, если $X\in K$, то $X=(x_1,\dots,x_m)$. Значение функционала $F\in K^*$на элементе $X\in K$ будем обозначать$[F,X]$. Другими словами,

$$[F,X]=\sum_i[f_i,x_i].$$

Предложение 6.1.1. Справедливо равенство

$$A'(F)=\{G\in K^*|g_i\in a_i'(f_i), i=\overline{1,m}\}, F\in K^*$$

Лемма 6.1.1 Если, $H\in K^*, Z\in B(Y)$, где

$$z_i=y_i+\sum_{j\in Q(i)}u_{ji}-\sum_{k\in Q^{-1}(i)}u_{ik},$$

$$[H,Z]=\sum_i[h_i,y_i]+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in Q^{-1}(i)}[h_k-h_i,u_{ik}].$$

Предложение 6.1.3 Пусть $H\in B'(G), \bar{Z}\in B(\bar{Y})$,причем

$$\bar{z}_i = \bar{y}_i + \sum_{j \in Q(i)} \bar{u}_{ji} - \sum_{k \in Q^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}, i = \overline{1,m}.$$

Равенство $[H, \bar{Z}] = [G, \bar{Y}\ ]$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left[g_i - h_i, \bar{y}_i - \sum_{k \in Q^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}\right] = 0, [g_i - h_k, \bar{u}_{ik}] = 0, (i,k) \in\ Q.$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 6.1.1. Для того чтобы траектория цен была характеристикой траектории необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$g_i(t) \in a_i'\big(f_i(t-1)\big),$$
$$[f_i(t-1), x_i(t-1)] = [g_i(t), y_i(t)], i = \overline{1,m},$$
$$g_l(t) f_j(t), j \in Q^{-1}(l) \cup \{l\},$$
$$\left[f_i(t) - g_i(t), \bar{y}_i(t) - \sum_{k \in Q(i)} \bar{u}_{ik}(t)\right] = 0, i = \overline{1,m},$$
$$[f_i(t) - g_k(t), \bar{u}_{ik}(t)] = 0, \qquad (i,k) \in Q, t = \overline{1,T}.$$

Теорема 6.1.2. Пусть тройка $(\alpha, \bar{X}, F)$ является состоянием равновесия модели S, а элементы $\bar{u}_{ji}$ и g_l и функционалы g_l определяются соотношениями

$$\bar{y}_i(x) \in a_i(\bar{x}_i), \sum_{k \in Q^{-1}(i)} u_{ik} \le \bar{y}_i, i = \overline{1,m}$$

и

$$g_l(t) \in a_l'(f_l),\ \ l = \overline{1,m},\ \ \frac{1}{\alpha} f_j \le g_l,\ \ j \in Q^{-1}(l) \cup \{l\}$$

соответственно.

Тогда

$$\left[g_i - \frac{1}{\alpha} f_i, \bar{x}_i\right] = 0, i = \overline{1,m},$$
$$\left[g_i - \frac{1}{\alpha} f_i, \bar{u}_{ji}\right] = 0, j \in Q(i), i = \overline{1,m},$$
$$\left[f_i, \bar{u}_{ji}\right] = \left[f_j, \bar{u}_{ji}\right], j \in Q(i), i = \overline{1,m}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 6.1.4. Пусть $Q = (g^1, g^2, \dots, g^m) \in (R_+^n)^m$. Тогда $A^*(Q) = \{F = (f^1, \dots, f^m) \in (R_+^n)^m | f_i \in (a^i)^*(g^i)\}$

Введем следующие обозначения.

Пусть $H = (h^1, \dots, h^m) \in (R_+^n)^m$.

Положим

$$q^i(H) = Sup_{i \in G(j)}\left((c^{ji})T^* h^i\right).$$

Здесь супремум векторов $(c^{ji})^* h$ вычисляется покоординатно (*-знак транспонирования матрицы). Пусть далее

$$K(H) = (q^1(H), \dots \dots q^m(H)).$$

Во втором параграфе шестой Главы рассматривается модели воспроизводства и обмена на графе, учитывающие транспортные расходы. Исследуется эффективные траектории таких моделей. При этом используется простейшие механизмы равновесного типа.

Вводится в рассмотрение отображение B, описываюшее в молелируемой системе отношение обмена:

$$\mathrm{B}(Y) = \left\{ Z = (Z^1, \dots, Z^m) | Z^k = \sum_{j \in \Gamma^{-1}(k)} C^{jk} u^{jk}, \right.$$

$$k = 1,2, \dots, m; \;\; u^{ij} \geq 0 \;\; \text{при всех} \;\; (i,j) \in \Gamma,$$

$$\left. \sum_{j \in \Gamma(i)} u^{ij} = y^i, \qquad i = 1,2, \dots, m \right\}.$$

Производственные возможности всей системы задаются отображением A, определенным на конусе $(R_+^n)^m$. Если $x = (x^1, \dots, x^m) \in (R_+^n)^m$, то

$$A(x) = a^1(x^1) \times a^2(x^2) \times \dots \times a^m(x^m),$$

другими словами

$$A(x) = \{y = (y^1, \dots, y^1) | y^i \in a^i(x^i), i = \overline{1,m}\}$$

Функционирование всей системы сводится к производству и обмену. Если вначале рассматривается производственная деятельность, а затем обмен, то функционирование системы описываются композицией $a = B \circ A$

$$a(x) = \bigcup_{y \in A(x)} B(y), \quad x \in (R_+^n)^m.$$

Если же вначале происходит обмен, а затем производство, то рассматривается композиция $b = A \circ B$

$$b(y) = \bigcup_{z \in B(y)} A(z), \quad y \in (R_+^n)^m$$

При естественных предположениях оптимальная в смысле F траектория допускает характеристику, то существует такая последовательность

$$F_0, F_1, \dots, F_T, \text{ что } F_T = F,$$

$$[F, X_0] = \dots = [F_T, X_T], [F, \tilde{X}_0] \geq \dots \geq [F_T, \tilde{X}_T]$$

для любой $T-$ шаговой траектории $\left(\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_T\right)$, где F удовлетворяст условито

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 6.2.2. Пусть $H = (h^1, \dots, h^m) \in (R_+^n)^m$, тогда $B^*(H) = K(H) + (R_+^n)^m$, иными словами,

$$B^*(H) = \{Q = (g^1, \dots, g^m) | g^k \geq q^k(H), k = \overline{1, m}\},$$

$$[F, X_T] = \max[F, \tilde{X}_T]$$

Предложение 6.2.3. Пусть $\bar{Z} \in B(\bar{Y})$, где $\bar{Z} = (\bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots, \bar{z}^m)$, $\bar{Y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^m)$ и элементы $\bar{u}^{ji} (i, j \in G)$ таковы, что

$$\bar{y}^j = \sum_{i \in G(j)} \bar{u}^{ji}, \bar{z}^i = \sum_{j \in G^{-1}(k)} C^{ji} \bar{u}^{ji}.$$

Пусть далее, $Q \in B^*(H)$, где $Q = (g^1, g^2, \dots, g^m)$, $H = (h^1, h^2, \dots, h^m)$. Тогда равенство $[\bar{H}, \bar{Z}] = [Q, \bar{Y}]$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$[q^i - (C^{ji})^* h^i, \bar{u}^{ji}] = 0 \text{ для всех} (j, i) \in G.$$

Теорема 6.2.1. Последовательность $F_0, F_1, \dots, F_T$, где $F_t = (f_t^1, \dots, f_t^m)$ является характеристикой траектории $X_0, X_1, \dots, X_T$ в том и только в том случае, когда

1. $f_{t-1}^1 \in \left(a_t^i\right)^* \left(q(F_t)\right), \ t = 1,2, \dots, T; \quad i = \overline{1, m};$
2. $\left[q^i(F_t) - \left(c^{ij}\right)^* f_i^j, u_t^{ji}\right] = 0, \ (\forall (j, i) \in \Gamma).$

Определение. Состоянием равновесия модели (U, X) назовем набор (Z, H), где $Z = (z^1, z^2, \dots, z^m)$, $H = (h^1, h^2, \dots h^m)$, здесь z^i вектор ресурсов, h^i- вектор цен, причем z^i является решением задачи $\frac{u^i(Z)}{[h^i, Z]} \to max$при условии Z≥0 и существуют векторы $u^{ji}(j, i \in$ G),обладающие тем свойством, что

$$\sum_{j \in G(i)} u^{ji} = x^j, \quad \sum_{j \in G^{-1}(i)}^{m} C^{ji} u^{ji} = z^i$$

При этом, вектор $H = (h^1, h^2, \dots h^m)$ связан с векторами u^{ji} соотношениями типа $\left[q^j(H) - \left(C^{ji}\right)^* h, u^{ji}\right] = 0$, где $q^j(H)$ - вектор, определенный формулой (4).

Пусть имеется граф (J, G), оснащённый системой матрицы $C^{ji}(j, i \in$ G), причем каждому i сопоставляется вектор ресурсов x^i и функция полезности U^i. Используя теорему о характеристике, можно при некоторых предположениях доказать существование в модели (U, X) равновесия (Z, H), обладающего тем дополнительным свойством, что значение задачи $max \frac{U^i(Z)}{[h^i, Z]}$ совпадает при всех i либо с нулем, либо с единицей.

Предположим, что векторы x^i строго положительные и рассмотрим одношаговую траекторию модели Z_b, исходящую из точки X и максимизирующую на множестве $Z_b(X)$ вектор цен Q; здесь, как и выше, b=A∘B, отображение B определено с помощью графа (J, G) и матриц C^{ji} по формуле (1), а отображение A с помощью отображения a^i по формуле (2). Пусть указанная траектория имеет вид (X,Y). Тогда найдется вектор Z, обладающей тем свойством, что $Z \in B(X), Y \in A(Z)$.

По известным теоремам найдется такой вектор цен F, что пара (F, Q) является характеристикой траектории (X,Y). Существует такой вектор H, что

$F \in B^*(H), H \in A^*(Q)$ и $[F, X] = [H, Z] = [Q, У]$.

Понятно, что пара $[Z, H]$ является равновесием.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Найдены характеристические цены для некоторых моделей неймановского типа.
- Для некоторых траекторий, обладающих определенными свойствами доказана теорема о темпе роста и приведено описание эффективных траекторий.
- Предложен принцип оптимальности для максимизации потребления и предложены два способа распределения рабочей силы.
- Для траекторий со строгими равновесиями доказана теорема об асимптотике.
- Определено условие ввода новых технологий.
-Для производственных функций Кобба-Дугласа и CES определены зависимость функции потребления от вида производственных функций.
- Определена зависимость функции потребления от средства производства.
-Найдены условии максимизации некоторых макропоказателей.
- Исследованы траектории при неизменной норме накопления.
- Доказано необходимое и достаточное условие максимума для функции полезности и найдены супердифференциалы.
- Доказано необходимое и достаточное условие существования решения задачи потребителя.
- Доказано необходимое и достаточное условие существования решения задачи потребителя при равновесии без потерь.
- Доказано необходимое и достаточное условие существования равновесных цен без потерь.
- Определена связь между неймановским условием равновесия и равновесием без потерь.
- Определены условия, при которых построение эффективной траектории из начальной точки невозможно.

- Для двухсекторной модели с помощью равновесного механизма найдены неймановские темп роста, равновесные цены и равновесные векторы.

- Доказаны необходимое и достаточное условия равновесия в двухсекторной модели.

- Определены типы равновесия и полуравновесия для двухсекторной модели.

- Для невырожденного случая найдены неймановские грани.

- Построены эффективные траектории моделей экономической динамики производства и обмена на графах с учетом и без учета транспортных расходов

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ

1. Гамидов, С.И. Об устойчивости рвановесного возрастного распределения в одном частном случае // Proceedings of the 1-st International Conference on Control and Optimization with Industrial Application COIA-2005,-Baku: -2005, -p.96.
2. Гамидов, С.И. О моделях экономической динамики совместного функционирования нескольких технологий //-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер. Физ-мат. наук,-2006, №4, -с. 36-41.
3. Гамидов, С.И. О локально-оптимальных траекториях в однопродуктовых моделях // Akademik M.L. Rəsulovun 90 illiyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, -Bakı:- 2006, -s.69-71.
4. Гамидов, С.И. О проблеме равновесия с заданным непрерывным ценообразованием // Akademik Ə. Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları,- Bakı: -2007, -s. 55.
5. Гамидов, С.И. О поведении оптимальных траекторий // Respublika Elmi Konfransının materialları, -Sumqayıt:- 2007, -с.118-119.

6. Həmidov, S.İ. Bəzi iqtisadi dinamika modelləində trayektoriyalar haqqında // Q.T. Əhmədovun anadan olmasının 90 illiyinə həsr olunmuş elmi konfransın tezisləri, -Bakı:- 2007, -s. 66-67.

7. Hamidov, S.I. About eguilibrium construction mechanisms of trayectories in models of Economic Dinamyc // Proceedings the 2nd International Conference of Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2008, -Baku:- 2008, p.73.

8. Гамидов, С.И. О существовании общего равновесия в дискретных динамических моделях I // -Bakı:Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fiz.-riy. elm. Ser., -2011, 3, -s. 37-46.

9. Гамидов, С.И. О существовании общего равновесия в дискретных динамических моделях II // -Bakı: Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fiz.-riy. elm. ser., -2012, 4, -s. 45-52.

10. Hamidov, S.I. Investigation of an Economic Model of Dynamics // Proceedings of the 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications IECMSA-2014, -Vienna: Austria, -2014.

11. Hamidov, S.I. On the study of the Matrix in a Model of Economic Dynamics // Proceedings of the 4ht International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications IECMSA-2015, -Athens: Greece, -2015.

12. Hamidov, S.I. On the dependence in the two-product model of economic dynamics // Proceedings of the 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial applications. COIA-2015, -Baku:- 2015, -pp.259-262.

13. Hamidov, S.I. Dependence of Consumption Volume on the Labor-Force in One-productive Models of Economic Dynamics // Journal of Mathematics and System Science, -2015, 5 (3), -p.113-117.

14. Hamidov, S.I. Equilibrium Mechanisms in Models of Reproduction with a Fixed Budget // American Journal of Applied Mathematics, -2015, 3 (3), -pp.146-150.

15. Hamidov, S.I. On an investigation of the matrix of the second partial derivative in one economic dynamics model // European Journal of Mathematics and Computer Science. -2016, 3 (1), -pp. 59-65.

16. Hamidov, S.I. On a Consumer Problem // Pure and Applied Mathematics Journal, -2016, 5 (6), -pp. 205-210.

17. Hamidov, S.I. On an Equilibrium State in Two-sector Models of Economic Dynamics // Proceedings of 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications IECMSA-2016, -Belgrad: Serbia, -2016.

18. Hamidov, S.I. On the Equilibrium Without Loss in the Discrete Time Models of Economic Dynamics // International Journal of Theoretical and Applied Mathematics, -2017, 3 (6), -pp. 203-209.

19. Hamidov, S.I. On a Problem of Maximization of Some Indicators in the Discrete Time Models of Economic Dynamics // International Journal of Mathematics and its Applications, -2017, 5 (3-B), -pp.199-202.

20. Гамидов, С.И. О сбалансированном росте в одной модели экономической динамики //-Bakı: Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fiz.-riy. Elm. ser. -2017, 2, -s. 97-104.

21. Hamidov, S.I. On a Construction of The Optimal Trajectories by Applying the Equilibrium Mechanisms in the Discrete Dynamical Models // American Journal of Mathematical and Computer Modelling, -2017, 2 (4), -pp. 99-102.

22. Hamidov, S.I. On a Neumann Equilibrium States in One Model of Economic Dynamics // Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications, -2017, 18 (2), -p. 87-95.

23. Hamidov, S.I. On a Equilibrium State in Two-Sector Model of Economic Dynamics // -Bakı: Procedings of IAM, -2018, 7 (1), -pp. 106-115.

24. Гамидов, С.И. О неймановском равновесии и неймановской грани // -Bakı: AMEA Xəbərləri, -2017, v. XXXVII, № 6, -s. 85-91.

25. Hamidov, S.I. On the Effective Trajectories of the discrete time Reproduction Models of Economic Dynamics // Proceedings of the 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2018, -Baku: -2018, -pp. 141-143. **WoS**

26. Hamidov, S.I. On a problem of Maximization in the Discrete Time Models of Economic Dynamics // Applied Mathematics, -2018, 8 (1), _pp.1-4.

27. Гамидов, С.И. Об одном принципе оптимальности траекторий в моделях экономической динамика // -Перм: Вестник Пермского Университета, серия Математика ,-2019, 1 (44), _с. 5-10. **РИНЦ**

28. Hamidov, S.I. Applying Graph Theory to Some Problems of Economic Dynamics // Discrete Dynamics in Nature and Society, _-2019, doi /10.1155/2019/7974381.pp.1-6 **WoS**

29. Hamidov S. I. On a dependence in two sector models of economics dynamics // -Bakı:Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, fizika-riaziyyat elmləri ser. -2019, 1, -s. 56-59.

30. Hamidov, S.I., Efendiyeva H.I. The Function of Consumption and Its Dependence on the Form of the Production Function // Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications. COIA-2020; -Baku:, -2020, -pp. 200-203. **WoS**

31. Hamidov, S.I. On spektral properties of multivalued mappings in economic dynamics models // Transaction of ANAS, ser. Phyz-Tech. Math. Sci., Mathematics,-Bakı: -2021,41(4), -pp. 69-77**.** **SCOPUS**

32. Hamidov.S.I. Characteristic Prices and Growth Rites in Neumann Type Models of Economic Dynamics // Proceedings of 8–th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications COIA-2022, -Baku: Azerbaijan, -2022,-pp. 213-216.

33. Hamidov, S.I. Optimally trajectory in Neuman type discrete models of economic dynamics // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, -Bakı: -2022, 13(1), -pp. 16-24. **WoS**

34. Hamidov, S.I. Effective Trajectories of economic dynamics on graphs // Applied and Computational Mathematics, -2023, 22(2), -pp. 215-224**. WoS**

Защита диссертации состоится 19 апрельа 2024г. в 14 ^{00} часов на заседании Диссертационного совета ED 1.19, действующего на базе Института Систем Управления Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: Az 1141г. Баку, ул. Б.Вагабзаде 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Систем Управления.

Электронная версия автореферата размещена на официальном сайте https://isi.az/

Автореферат разослан 12 марта 2024 г

Подписано в печать : 07.03.2024
Формат бумаги: А5
Объем: 62322
Тираж: 70 экз.