AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ƏLAVƏ ARTAN POTENSİALA MALİK ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏRİ

İxtisas:	1211.01 – Diferensial tənliklər
Elm sahəsi:	Riyaziyyat

İddiaçı: **Davud Həmzağa oğlu Orucov**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Bakı Mühəndislik Universitetində "Riyaziyyat" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Aqil Xanməmməd oğlu Xanməmmədov

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
Araz Rafiq oğlu Əliyev

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
Azad Məmməd oğlu Bayramov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:

AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor
Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev

Dissertasiya şurasının elmi katibi:

f.-r.e.n., dosent
Zakir Fərman oğlu Xankişiyev

Elmi seminarın sədri:

f.-r.e.d., professor
Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Bütün oxda birölçülü Şredinger operatoru kimi tanınan $L(y) = -y'' + q(x)y$ Şturm-Liuvill operatorunun öyrənilməsinin əsası təxminən 250 il əvvəl D.Bernulli və L.Eylerin simin rəqs tənliyinə dair araşdırmalarında öz əksini tapmışdır. D.Bernullinin, L.Eylerin, J.Dalamberin təklif etdiyi ideyalardan istifadə edərək J.Furyenin elmi işlərində xətti diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi yaranmağa başladı. Şturm-Liuvill operatorlarının spektral nəzəriyyəsinin inkişafında çevirmə operatorları xüsusi rol oynamışdır. Bu operatorlar J.Delsart və B.M.Levitan tərəfindən əsası qoyulmuş ümumiləşmiş sürüşmə operatorları nəzəriyyəsinin ideyalarından yaranmışdır. İxtiyari Şturm-Liuvill tənlikləri üçün çevirmə operatorları A.Y.Povzner tərəfindən qurulmuşdur. V.A.Marçenko sinqulyar Şturm-Liuvill operatorunun spektral xassələrinin öyrənilməsində və spektral funksiyanın asimptotikasının tapılmasında çevirmə operatorlarından istifadə etmişdir. B.Y.Levin həllərin sonsuzluqdakı asimptotikasını saxlayan yeni növ çevirmə operatoru qurmuşdur. Bu çevirmə operatorunun özəlliyi onun varlığının ümumiləşmiş sürüşmə operatorları nəzəriyyəsinin ideyalarından alınmamasında idi.

Diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin inkişafındakı mühüm istiqamətlərdən biri fizika və mexanikada müxtəlif tətbiqləri olan tərs spektral məsələlərlə bağlıdır. Spektral analizin tərs məsələsi olaraq xətti operatorun və ya sərhəd məsələsinin müəyyən spektral xarakteristikalara görə bərpa olunması başa düşülür. Qeyd edək ki, spektral xarakteristikalar olaraq spektr, spektral funksiya, səpilmənin verilənləri və s. götürülə bilər. Spektral xarakteristikaların seçilməsindən asılı olaraq tərs məsələlər müxtəlif qoyuluşlarda ola bilər. Şturm-Liuvill operatoru üçün spektral analizin tərs məsələləri müxtəlif qoyuluşlarda bir çox müəlliflər tərəfindən tədqiq edilmişdir. G.Borg və N.Levinsonun işlərində isbat edilmişdir ki, bir spektr Şturm-Liuvill operatorunu bərpa etmək üçün kifayət deyil. V.A.Marçenko tərəfindən çevirmə operatorundan istifadə edərək Şturm-Liuvill operatoru üçün spektral funksiyaya görə tərs məsələnin həllinin yeganəliyi isbat edilmişdir. Qeyd olunan tərs məsələnin tam həlli İ.M.Qelfand və B.M.Levitanın işində verilmişdir. M.Q.Kreynin təklif etdiyi fərqli metodla Şturm-Liuvill operatorunun spektral funksiyaya və iki spektrə görə bərpa olunması alqoritmləri verilmişdir. Şturm-Liuvill operatoru üçün iki spektrə görə tərs məsələ M.G.Qasımov və B.M.Levitanın işində tam həll edilmişdir. Ümumi şəkildə sərhəd şərtləri ilə verilmiş Şturm-Liuvill operatorlar dəstəsi üçün tərs spektral məsələ H.M.Hüseynov və İ.M.Nəbiyevin işində öyrənilmişdir. Öz-özünə qoşma olmayan periodik əmsallı Şturm-Liuvill operatoru üçün tərs spektral məsələlər M.G.Qasımovun, L.A.Pastur və V.A.Tkaçenkonun, R.F.Əfəndiyevin və başqalarının işlərində öyrənilmişdir.

XX əsrin 50-ci illərinin sonundan başlayaraq səpilmə nəzəriyyəsində meydana çıxan tərs məsələlərin öyrənilməsinə olan maraq artmağa başlamışdır. Kvant mexanikasında potensiallı sahədə hissəciklərin səpələnməsi dalğa funksiyalarının sonsuzluqdakı asimptotikaları ilə tam təyin olunur. Səpilmə nəzəriyyəsinin tərs məsələsi dedikdə isə dalğa funksiyalarının sonsuzluqdakı asimptotikalarına əsasən sahənin potensialının tapılması başa düşülür. Riyazi terminlərlə səpilmənin tərs məsələsi dedikdə xətti operatorun normallaşmış məxsusi funksiyalarının (kəsilməz və diskret spektrə uyğun məxsusi funksiyalarının) sonsuzluqdakı asimptotikasına görə operatorun bərpa edilməsi başa düşülür. Normallaşmış məxsusi funksiyaların sonsuzluqdakı asimptotikalarını təyin edən kəmiyyətlər yığımına isə səpilmə verilənləri deyilir. Deməli, səpilmənin tərs məsələsi xətti operatorun səpilmə verilənlərinə görə bərpa olunmasından ibarətdir.

V.Barqman ilk dəfə göstərmişdir ki, yarım oxda verilmiş $-y''+q(x)y=\lambda y$ birölçülü Şredinger tənliyinin $q(x)$ potensialı səpilmə funksiyasına və məxsusi ədədlərə görə birqiymətli təyin olunmur. N.Levinson isbat etmişdir ki, məxsusi ədədlər olmadıqda potensial birqiymətli təyin olunur. Sonralar V.A.Marçenko göstərmişdir ki, səpilmə funksiyası, məxsusi ədədlər və onlara uyğun normallaşdırıcı ədədlər potensialı birqiymətli təyin edir.

Qeyd edək ki, səpilmənin tərs məsələsi əsasən çevirmə operatorları metodu(Qelfand-Levitan-Marçenko formalizmi) və ya Riman-Hilbert məsələsi metodu ilə öyrənilir. Məhz birinci metodun köməyilə L.D.Faddeyevin işlərində birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin bütün oxda tərs məsələsi öyrənilmişdir. Bu istiqamətdə alınan nəticələr sonralar V.A.Marçenkonun, B.M.Levitanın, H.M.Hüseynovun və başqalarının işlərində daha da dəqiqləşdirilmişdir. Birölçülü Şredinger tənlikləri üçün səpilmənin tərs məsələlərinə dair yuxarıda qeyd olunan işlərdə potensial adətən sürətlə azalan və sonlu momentləri olan funksiyalar sinfinə daxil olur. Digər tərəfdən isə potensialın qeyri-məhdud funksiya olduğu halda səpilmə məsələsinin öyrənilməsi həm riyazi, həm də fiziki baxımdan əhəmiyyətlidir. Bu istiqamətdə ilk nəticələr P.P.Kulişin işində alınmışdır. Qeyri-məhdud potensiallı tənliklər arasında cx^{α} şəklində əlavə artan potensialı olan birölçülü Şredinger tənlikləri xüsusi maraq doğurur. Bu cür tənliklər xarici bircins elektrik sahəsində yerləşmiş kristallarda elektronun enerjisinin kvant-mexaniki operatorları kimi meydana çıxır. Belə modellərə misal olaraq həyəcanlanmış ossilyatoru və birölçülü Ştark operatorunu qeyd etmək olar.

Əlavə artan potensialı olan Şredinger tənliyi üçün tərs spektral məsələnin öyrənilməsinə dair ilk işlərdən M.G.Qasımov və B.A.Mustafayevin işlərini qeyd etmək olar. Bu işlərdə çevirmə operatoru metodu ilə

$$-y'' - x^2 y + p(x)y = \lambda y, 0 < x < +\infty \, , \qquad (*)$$

$$y(0) = 0$$

məsələsi üçün səpilmənin tərs məsələsi öyrənilmişdir. Qeyd olunan işlərdə Riman funksiyası metodu ilə sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatoru qurulmuşdur. F.Calogero və A.Degasperisin işində

$$-y'' + xy + q(x)y = \lambda y, -\infty < x < +\infty \qquad (**)$$

tənliyi üçün tərs spektral məsələnin formal həlli verilmişdir. Sonralar L.Yishenin, A.P.Kaçalovun və Ya.V.Kurilevin işlərində bu məsələ daha dəqiq öyrənilmişdir. H.P.McKean və E.Trubovitsin, D.Chelkak, P.Kargaev, E.Korotyaevin işlərində

$$-y'' + x^2 y + q(x)y = \lambda y, -\infty < x < +\infty \qquad (***)$$

həyəcanlanmış ossilyatoru üçün spektral inikaslar metodu ilə tərs spektral məsələ öyrənilmişdir. Bu məsələ ilə bağlı bir sıra maraqlı nəticələr B.M.Levitan tərəfindən də alınmışdır. Qeyd edək ki, sonuncu tənlik üçün başqa qoyuluşda tərs spektral məsələ çevirmə operatoru metodu ilə A.X.Xanməmmədov və S.M.Bağırovanın, A.X.Xanməmmədov və N.F.Qafarovanın, A.X.Xanməmmədov və M.F.Muradovun işlərində araşdırılmışdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda qeyd olunan işlərdə (*) və (***) tənlikləri üçün çevirmə operatorları qurularkən bu operatorların nüvələri üçün alınan inteqral tənliklərin həllərinin nüvələr üçün olan hiperbolik tənlikləri ödəməsi məsələsi, yəni çevirmə operatorları vasitəsilə göstərilişlərin (*) və (***) tənliklərini ödəməsi məsələsi açıq qalmışdır. (**) tənliyi üçün çevirmə operatorları qurulmasının isbatında isə ciddi qüsurlar mövcuddur.

Fiziki baxımdan potensialın sağ və sol tərəflərdə özünü müxtəlif cür aparması, yəni pilləvari tipə malik olması xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Pilləvari tip potensiallara malik birölçülü Şredinger tənlikləri üçün səpilmənin tərs məsələləri V.S.Buslayev və V.Fominin, İ.A.Anders və V.P.Kotlyarovun və başqalarının işlərində öyrənilmişdir. Bu tənliklərin diskret analoqları üçün səpilmənin tərs məsələlərinə H.Ş.Hüseynovun, H.M.Hüseynovun və A.X.Xanməmmədovun və digərlərinin işləri həsr olunmuşdur. Sonsuz artan potensiallar üçün bu cür məsələ H.M.Hüseynovun və A.X.Xanməmmədovun işində potensial sol tərəfdə sonsuz kiçik olduqda, sağ tərəfdə isə x kimi artdıqda səpilmənin tərs məsələsi öyrənilmişdir. Bu işdə tərs məsələnin həlli birinci növ Eyri funksiyaları üzrə ayrılış düsturuna əsaslanır.

Potensialın sol tərəfdə sonsuz kiçik olduğu, sağ tərəfdə isə x^2 kimi artdığı hal, başqa sözlə $\theta(x)x^2$ şəklində əlavə potensialı olduğu hal da xüsusi maraq doğurur, burada $\theta(x)$ Hevisayd funksiyasıdır. Bu halda birinci növ Eyri funksiyasının analoqu parabolik silindr funksiyası (Veber funksiyası) olur. Lakin parabolik silindr funksiyaları üçün uyğun ayrılış düsturu mövcud deyil. Bu isə səpilmə məsələsinin araşdırılımasında müəyyən çətinliklər yaradır və başqa cür yanaşma tələb edir. Qeyd etmək lazımdır ki, $q(x)=0$ olduqda (***) tənliyi hissəciyin parabolik potensial çuxurdakı hərəkətini, yəni kvant harmonik ossilyatoru təsvir edir. Hissəciyin yarımaçıq parabolik potensial çuxurdakı, yəni $\theta(x)x^2$ şəklində əyrinin hüdudlandırdığı oblastda hərəkəti də fiziki baxımdan ciddi maraq doğurur.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Əlavə artan potensialı olan birölçülü Şredinger tənlikləri üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorlarının qurulması və onların spektral analizinin düz və tərs məsələlərinə tətbiqi aktualdır. Birölçülü Şredinger tənliyinin potensialı bir tərəfdə sonsuz kiçik, digər tərəfdə isə sonsuz artan olduqda kəsilməz spektrə uyğun məxsusi funksiyalar yalnız bir münasibətlə əlaqələnir. Bundan başqa əksolunma əmsalının modulu yarımoxdakı səpilmə məsələsində olduğu kimi vahidə bərabər olur. Bu səbəblərdən bütün oxda səpilmə məsələsinə xas olan bir çox klassik mühakimələrin ciddi dəyişdirilməsi zərurəti yaranır. Buna görə də birölçülü Şredinger tənliyinin potensialı sol tərəfdə sonsuz kiçik olduğu, sağ tərəfdə isə x^2 kimi artdığı halda səpilmənin düz və tərs məsələlərinin öyrənilməsi xüsusi maraq doğurur.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri. Əlavə kvadratik və ya xətti potensialı olan birölçülü Şredinger tənlikləri üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorlarının qurulmasının isbatında mövcud olan qüsurları aradan qaldırmaq və həyəcanlanma potensialının daha geniş siniflərində çevirmə operatorlarının qurulması. Potensial sol tərəfdə sonsuz azalan funksiya, sağ tərəfdə isə kvadratik funksiya kimi artdıqda birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin düz və tərs məsələlərinin tədqiqi.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin, funksional analizin və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Müdafiəyə aşağıdakı əsas müddəalar çıxarılır: potensial sol tərəfdə sonsuz azalan funksiya, sağ tərəfdə isə kvadratik funksiya kimi artdıqda birölçülü Şredinger tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorlarının qurulması; əlavə xətti potensialı olan birölçülü Şredinger tənlikləri üçün həyəcanlanma potensialının daha geniş siniflərində çevirmə operatorlarının qurulması; kompleks qiymətli əlavə periodik potensialı olan birölçülü Şredinger tənlikləri üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorlarının qurulması; potensial sol tərəfdə sonsuz azalan funksiya, sağ tərəfdə isə kvadratik funksiya kimi artdıqda birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmə məsələsinin öyrənilməsi.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- əlavə xətti potensialı birinci momenti sonlu həyəcanlanma potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatoru qurulmuşdur. Çevirmə operatorlarının nüvələrinin xassələri öyrənilmişdir;
- kompleks qiymətli əlavə periodik potensialı və birinci momenti sonlu həyəcanlanma potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorları qurulmuşdur. Çevirmə operatorlarının nüvələrinin xassələri öyrənilmişdir;
- $\theta(x)x^2$ şəklində əlavə potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin bütün oxda düz məsələsi öyrənilmiş, məxsusi funksiyalar üzrə ayrılış düsturları və Marçenko tipli əsas inteqral tənliklər çıxarılmışdır;
- $\theta(x)x^2$ şəklində əlavə potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin bütün oxda tərs məsələsi öyrənilmiş, tərs məsələnin həlli alqoritmi verilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyada alınan nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Alınan nəticələr diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, qeyri-xətti tənliklərin inteqrallanmasında istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas nəticələri Bakı Mühəndislik Universitetinin "Riyaziyyat" (rəhbər r.e.d. R.F.Əfəndiyev), Bakı Dövlət Universitetinin "Tətbiqi riyaziyyat" (rəhbər prof. E.H.Eyvazov), Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin "Ümumi və tətbiqi riyaziyyat" (rəhbər prof. A.R.Əliyev), Cənubi Koreyanın INHA Universitetinin "Riyaziyyat" kafedralarının elmi seminarlarında (rəhbər prof. Hyundai Lee), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" (rəhbər prof. H.İ.Aslanov) şöbəsinin seminarında, Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş "Gənc Tədqiqatçıların VII Beynəlxalq Elmi Konfransı" Respublika elmi konfransında (Bakı, 2023), "6th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications" Beynəlxalq Elmi Konfransında (İstanbul, 2023), "NASCO XXV" Respublika elmi konfransında, "Tətbiqi riyaziyyatın, informatikanın, mexanikanın müasir problemləri" Beynəlxalq Elmi Konfransında (Rusiya, Nalçik, 2023) məruzə edilmişdir.

İddiaçının şəxsi töhfəsi. Dissertasiyada alınan bütün nəticələr iddiaçıya məxsusdur.

İddiaçının nəşrləri. Müəllifin 7 elmi məqaləsi Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK tərəfindən tövsiyə edilən elmi nəşrlərdə çapdan çıxmış (bunların 2-si Web of Science və SCOPUS tərəfindən indekslənən jurnallarda, onlardan 1-i Impakt factor 0.719), 3 işi isə müxtəlif konfrans materiallarında (bunların 2-si beynəlxalq konfrans olmuşdur, hər ikisi xaricdə olmaqla) işıq üzü görmüşdür.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Mühəndislik Universitetinin "Riyaziyyat" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrı-ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işinin ümumi həcmi ~ 271549 işarə (titul – 387 işarə, mündəricat ~2044 işarə, giriş ~ 42128 işarə, I fəsil ~ 138119 işarə, II fəsil $\sim$ 72000 işarə, nəticələr – 1463 işarə). Ədəbiyyat siyahısı 103 addan ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Dissertasiya Girişdən, iki fəsildən və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə dissertasiya işinin aktuallığı əsaslandırılmış, işin məzmunu ilə bağlı nəticələrin qısa xülasəsi verilmiş və əsas nəticələr şərh olunmuşdur.

I fəsildə əlavə potensialları olan birölçülü Şredinger tənlikləri üçün həllərin sonsuzluqda asimptotikasını saxlayan çevirmə operatorları üçün üçbucaq göstərilişlər tapılmışdır.

Paraqraf 1.1-də

$$-y'' + \theta(x)x^2 y = \lambda y, \ -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C, \qquad (1)$$

tənliyinə baxılır, burada $\theta(x)$ Hevisayd funksiyasıdır, yəni

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

G ilə müsbət yarımoxu kəsik olan kompleks λ-müstəvini işarə edək. ∂G ilə G müstəvisinin sərhəddini, yəni $(0,+\infty)$ yarımoxu üzrə kəsiyin aşağı və yuxarı "sahillərini" işarə edək. G müstəvisində $\sqrt{\lambda}$ funksiyasına baxaq, belə ki, radikalın elə analitik budağı seçilir ki, $\lambda > 0$ olduqda $\sqrt{\lambda + i0} > 0$ olsun. Aydındır ki, bu zaman $\lambda > 0$ olduqda $\sqrt{\lambda - i0} = -\sqrt{|\lambda|} < 0$ olur.

Teorem 1. *λ parametrinin hər bir kompleks qiymətində (1) tənliyinin aşağıdakı şəkildə göstərilə bilən $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ həlləri var:*

$$
\psi_{+}(x,\lambda)=\begin{cases} D_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\sqrt{2}x\right), x\geq 0, \\ \frac{1}{2}\left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)-i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)\right]e^{i\sqrt{\lambda}x}+ \\ +\frac{1}{2}\left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)+i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)\right]e^{-i\sqrt{\lambda}x}, x<0, \end{cases} \tag{2}
$$

$$
\psi_{-}(x,\lambda)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[D^{-1}_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)-i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)\right)^{-1}\right]D_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\sqrt{2}x\right)+ \\ +\frac{1}{2}\left[D^{-1}_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)+i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)\right)^{-1}\right]D_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(-\sqrt{2}x\right), x\geq 0, \\ e^{-i\sqrt{\lambda}x}, x<0. \end{cases} \tag{3}
$$

burada $D_{\nu}(x)$ parabolik silindr funksiyasıdır. Bu paraqrafda $\psi_{+}(x,\lambda)$ və $\psi_{-}(x,\lambda)$ həllərinin xassələri öyrənilir.

Birinci fəslin ikinci paraqrafında (1) diferensial tənliyinin sol tərəfinin iki dəfə kəsilməz diferensiallanan finit funksiyalar üzərində təyin etdiyi simmetrik operatorun L_0 qapanmasına baxılır. L_0 operatoru $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında təsir edən öz-özünə qoşma operator olur. Bu paraqrafda L_0 operatorunun təyin oblastının təsviri verilir, onun rezolventası və spektri öyrənilir.

Teorem 2. *L_0 operatorunun spektri kəsilməzdir və $[0,+\infty)$ yarım oxunu doldurur.*

Paraqraf 1.3-də

$$a_0(\lambda)=\frac{1}{2}D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)-i\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)\ ,\ r_0(\lambda)=\frac{\overline{a_0(\lambda)}}{a_0(\lambda)} \qquad (4)$$

funksiyaları daxil edilir, L_0 operatoru üçün səpilmə məsələsi öyrənilir və bu operatorun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılış düsturları çıxarılır.

Bu fəslin dördüncü paraqrafında

$$-y''+\theta(x)x^2y+q(x)y=\lambda y, \qquad -\infty<x<+\infty\ , \qquad (5)$$

tənliyində $q(x)$ potensialı $\int_{-\infty}^{+\infty}|q(x)|dx<\infty$ şərtini ödədikdə Yost tipli həllərin varlığı isbat olunur.

Paraqraf 1.5-də (5) tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorları qurulur. Daha dəqiq desək, isbat olunur ki, $q(x)$ potensialı həqiqi qiymətli funksiya olub

$$\int_{-\infty}^{0}(1+|x|)|q(x)|dx+\int_{0}^{+\infty}(1+x^2)|q(x)|dx<\infty \qquad (6)$$

şərtini ödədikdə (5) tənliyinin

$$f_\pm(x,\lambda)=\psi_\pm(x,\lambda)[1+o(1)],\ x\to\pm\infty$$

şərtlərini ödəyən həlləri var. Tutaq ki,

$$\sigma_+(x)=\int_x^\infty\left|\theta(t)t^2-t^2+q(t)\right|dt\ ,\sigma_-(x)=\int_{-\infty}^{x}\left|\theta(t)t^2+q(t)\right|dt\ .$$

Teorem 3. *Tutaq ki, $q(x)$ potensialı (6) şərtini ödəyir. Onda $\lambda\in G$ parametrinin bütün qiymətləri üçün (5) tənliyinin aşağıdakı şəkildə göstərilə bilən həlləri var:*

$$f_{\pm}(x,\lambda)=\psi_{\pm}(x,\lambda)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)\,\psi_{\pm}(t,\lambda)dt\,, \qquad (7)$$

burada $K^{\pm}(x,t)$ *nüvələri kəsilməz funksiyalardır və aşağıdakı münasibətləri ödəyir:*

$$K^{\pm}(x,t)=O\left(\sigma_{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), x+t\to\pm\infty\,, \qquad (8)$$

$$K^{\pm}(x,x)=\pm\frac{1}{2}\int_{x}^{\pm\infty}\left[\theta(t)t^{2}-\frac{1\pm1}{2}t^{2}+q(t)\right]dt\,. \qquad (9)$$

Bu paraqrafda həmçinin $K^{\pm}(x,t)$ nüvələrinin hər iki dəyişənə nəzərən mütləq kəsilməz olması isbat olunur və birinci tərtib xüsusi törəmələr üçün qiymətləndirmələr alınır.

Birinci fəslin 6-cı paraqrafında

$$-y''+xy+q(x)y=\lambda y, \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (10)$$

həyəcanlanmış Eyri tənliyinə baxılır, burada $q(x)$ potensialı həqiqi qiymətlər alır və

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|q(x)|dx<\infty \qquad (11)$$

şərtini ödəyir. Qeyd edək ki, L.Yishenin, A.P.Kaçalovun və Ya.V.Kurilevin işlərində $q(x)$ potensialı

$$q(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|q(x)|dx<\infty$$

şərtlərini ödədikdə (10) tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatoru qurulmuşdur. Bu paraqrafda göstərilmişdir ki, həmin işlərdə isbatlarda qüsurlar var. Həmin qüsurlar aradan qaldırılmış və $q(x)$ potensialı yalnız (11) şərtini ödədikdə çevirmə operatoru qurulmuşdur.

Bu fəslin son, yəni 7-ci paraqrafında kompleks qiymətli əlavə periodik əmsala malik

$$-y''+e^{ix}y+p(x)y=\lambda^{2}y,-\infty<x<+\infty\,, \qquad (12)$$

tənliyinə baxılır, burada $p(x)$ funksiyası

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|p(x)|dx<\infty \tag{13}$$
şərtini ödəyir. M.G.Qasımovun, L.A.Pastur və V.A.Tkaçenkonun işlərindən məlumdur ki, $p(x)=0$ olduqda (12) tənliyinin

$g_0(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right)$ şəklində göstərilən həlləri

var. Tutaq ki, $\sigma_0^{\pm}(x)=\pm\int_x^{\pm\infty}|q(t)|dt, \sigma_1^{\pm}(x)=\pm\int_x^{\pm\infty}\sigma^{\pm}(t)dt$.

Teorem 4. *Əgər $q(x)$ potensialı (13) şərtini odəyərsə, onda (12) tənliyinin aşağıdakı şəkildə göstərilə bilən $g_{\pm}(x,\lambda)$ həlləri var:*

$$g_{\pm}(x,\lambda)=g_0(x,\pm\lambda)\pm\int_x^{\pm\infty}A^{\pm}(x,t)\,g_0(t,\pm\lambda)dt,$$

burada $A^{\pm}(x,t)$ nüvələri kəsilməz funksiyalardır və aşağıdakı münasibətləri ödəyir:

$$\left|A^{\pm}(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\sigma_0^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1^{\pm}(x)},\quad A^{\pm}(x,x)=\pm\frac{1}{2}\int_x^{\pm\infty}p(t)dt.$$

II fəsil (5) tənliyində $q(x)$ potensialı

$$\int_{-\infty}^{0}(1+|x|)|q(x)|dx+\int_{0}^{+\infty}(1+x^5)|q(x)|dx<\infty \tag{14}$$

şərtini ödədikdə səpilmənin düz və tərs məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunub. 2.1 paraqrafında səpilmənin düz məsələsi öyrənilir. İsbat olunur ki, (7) düsturları ilə təyin olunan $f_+(x,\lambda)$ və $f_-(x,\lambda)$ həlləri arasında

$$f_+(x,\lambda)=a(\lambda)\overline{f_-(x,\lambda)}+\overline{a(\lambda)}f_-(x,\lambda),\lambda\in\partial G,\lambda\ne 0 \tag{15}$$
əlaqə düsturu mövcuddur.

$t(\lambda)=a^{-1}(\lambda)$ və $r(\lambda)=\dfrac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}$ funksiyalarına uyğun olaraq səpilmə məsələsinin udulma əmsalı və əksolunma əmsalı deyilir. Bu paraqrafda $a(\lambda)$ funksiyasının (7) həlləri vasitəsilə ifadəsi tapılır, isbat olunur ki, $a(\lambda)$ funksiyası G müstəvisində analitikdir və bu müstəvinin ∂G sərhəddinə qədər $\lambda = 0$ nöqtəsi istisna edilə bilməklə kəsilməzdir. $\lambda = 0$ nöqtəsi ətrafında funksiyanın özünü nə cür aparması öyrənilir. Aşağıdakı teoremlər isbat olunur.

Teorem 5. $a(\lambda)$ *funksiyasının yalnız sonlu sayda sıfırları ola bilər.*

Teorem 6. $a(\lambda)$ *funksiyasının sıfırları sadədir.*

Bundan başqa göstərilir ki, $a(\lambda)$ funksiyasının sıfırları yalnız mənfi yarım oxda yerləşə bilər. Tutaq ki, $\lambda_j, \lambda_j < 0, j = 1.2,..,N$ ədədləri $a(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarıdır. Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$\left(m_j^{\pm}\right)^2 \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\pm}^2\left(x, \lambda_j\right) dx,\ j = 1,\ldots,N. \qquad (16)$$

Onda aşağıdakı bərabərliklər ödənilir:

$$m_j^{+} m_j^{-} = 2i\sqrt{\lambda_j}\,\dot{a}\left(\lambda_j\right),\ j = 1,2,\ldots,N\,, \qquad (17)$$

burada funksiyanın üstündə nöqtə ilə λ-ya nəzərən törəmə işarə olunur.

Paraqraf 2.1-də həmçinin $a(\lambda)$ funksiyasının sonsuzluqdakı asimptotikası müəyyən olunur:

$$a(\lambda) = a_0(\lambda)\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right], \lambda \to \infty\,, \qquad (18)$$

burada $a_0(\lambda)$ funksiyası (4) düsturu ilə təyin olunur.

İkinci fəslin ikinci paraqrafında $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında təsir edən, təyin oblastı

$$D_L = \left\{ y \in L_2(-\infty,+\infty) : y \in W_{2,loc}^2, \ell(y) \in L_2(-\infty,+\infty) \right\}$$

çoxluğu olan və

$$\ell(y) = -y'' + \theta(x)x^2 y + q(x)y$$

diferensial ifadəsinin doğurduğu L operatorunun spektri tədqiq olunur.

Teorem 7. $\lambda \notin [0,+\infty), \lambda \neq \lambda_j, j = 1,\ldots,N$ *üçün* $L_2(-\infty,+\infty)$ *fəzasında* $(R_\lambda f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x,t,\lambda) f(t)dt$ *və*

$$R(x,t,\lambda) = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} \begin{cases} f_+(x,\lambda) f_-(t,\lambda), t \le x, \\ f_-(x,\lambda) f_+(t,\lambda), t > x. \end{cases}$$ *düsturları ilə*

təyin olunan R_λ *inteqral operatoru* L *operatorunun rezolventasıdır.*

Teorem 8. L *operatorunun kəsilməz spektri* $[0,+\infty)$ *yarım oxunu doldurur. Bundan başqa* L *operatorunun sonlu sayda* $\lambda_j, \lambda_j < 0, j = 1,\ldots,N$ *sadə məxsusi ədədləri də ola bilər.*

Eyni zamanda isbat olunur ki, L operatorunun məxsusi ədədləri $a(\lambda)$ funksiyasının sıfırları ilə üst-üstə düşür.

Bu paraqrafda həm də L operatorunun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılış düsturları çıxarılır.

$$\{t(\lambda) = a^{-1}(\lambda), \lambda \in \partial G; \lambda_j, \lambda_j < 0; m_j^+ > 0, j = 1,\ldots,N\}$$

kəmiyyətlər yığımına (8) tənliyi üçün səpilmə verilənləri deyilir. (5) tənliyi və ya L operatoru üçün səpilmənin tərs məsələsi dedikdə səpilmə verilənləri məlum olduqda (14) sinfindən olan $q(x)$ potensialının bərpa edilməsi məsələsi başa düşülür. Tərs məsələnin həllində Marçenko tipli əsas inteqral tənliklər mühüm rol oynayır. Paraqraf 2.3 əsas tənliklərin çıxarılışına həsr olunur. Səpilmə verilənləri məlum olduqda aşağıdakı funksiyaları daxil edək:

$$\xi(\lambda)=\begin{cases}\pi\sum\limits_{\lambda_j<\lambda}\left(m_j^+\right)^{-2},\lambda\le 0,\\ \pi\sum\limits_{j=1}^{N}\left(m_j^+\right)^{-2}+\int\limits_0^{\lambda}\frac{|a(u)|^{-2}-|a_0(u)|^{-2}}{4\sqrt{u}}d\lambda,\lambda>0.\end{cases}\tag{19}$$

$$F^+(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_+(x,\lambda)\psi_+(y,\lambda)d\xi(\lambda),\tag{20}$$

$$\begin{aligned}F^-(x,y)&=\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^-\right)^{-2}\psi_-(x,\lambda_j)\psi_-(y,\lambda_j)+\\&+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{r(\lambda)-r_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\psi_-(x,\lambda)\psi_-(y,\lambda)d\lambda\end{aligned}\tag{21}$$

burada $r(\lambda)=\dfrac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}$ və $m_j^-,\ j=1,2,\ldots,N$ kəmiyyətləri (16) düsturu ilə təyin olunur.

Teorem 9. *Hər bir qeyd olunmuş x üçün (7) göstərilişlərinə daxil olan $K^{\pm}(x,y)$ funksiyaları aşağıdakı inteqral tənlikləri ödəyir:*

$$F^{\pm}(x,y)+K^{\pm}(x,y)\pm\int\limits_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(t,y)dt=0,\pm y>\pm x\tag{22}$$

(22) tənliklərinə əsas inteqral tənliklər deyilir.

Paraqraf 2.4-də $F^+(x,y)$ və $F^-(x,y)$ səpilmə funksiyalarının xassələri öyrənilir. Bu fəslin 1-ci və 4-cü paraqraflarının nəticələrindən alınır ki, səpilmə verilənlərinin aşağıdakı xassələri doğrudur:

I. $t(\lambda)=a^{-1}(\lambda)$ *udulma əmsalı* $\lambda\in\partial G$ *kəsiyi üzərində kəsilməz funksiyadır, belə ki,* $t(\lambda-i0)=\overline{t(\lambda+i0)},\ \lambda>0$. $t(\lambda)$ *funksiyası* G *müstəvisinə* $\lambda_j<0,\ j=1,2,\ldots,N$ *sadə polyusları istisna olmaqla analitik davam olunur və aşağıdakı münasibətləri ödəyir:*

$$t^{-1}(\lambda)=\frac{C}{2i\sqrt{\lambda}}+O(1), \lambda\to 0,$$

$$t^{-1}(\lambda)=\left[\frac{1}{2}D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)-i\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)\right]\cdot\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right], \lambda\to\infty.$$

$\mathrm{II}_{\pm}$. $F^{\pm}(x,y)$ *funksiyası bütün müstəvidə kəsilməz funksiyadır, hər iki dəyişənə nəzərən mütləq kəsilməzdir.* $F^{\pm}(x,x)$ *funksiyası mütləq kəsilməzdir. Hər bir* a *sonlu ədədi üçün*

$$\left|F^{\pm}(x,y)\right|\le C, \pm x>\pm a, \pm y>\pm a, \quad \int_a^{\pm\infty}\left(1+y^{2\pm 2}\right)\sup_{\pm x\ge\pm a}\left|F^{\pm}(x,y)\right|dy<\infty,$$

$$\sup_{\pm x\ge\pm a}\int_a^{\infty}\left(1+y^{1\pm 1}\right)\left[\left|\frac{\partial F^{\pm}(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial F^{\pm}(x,y)}{\partial y}\right|\right]dy<\infty,$$

$$\int_a^{\pm\infty}\left(1+|x|^{3\pm 2}\right)\left|\frac{d}{dx}F^{\pm}(x,x)\right|dx<\infty$$

münasibətləri ödənilir.

İkinci fəslin sonuncu paraqrafı səpilmənin tərs məsələsinin həllinə həsr olunur. Bu paraqrafda əsas inteqral tənliklərin birqiymətli həll olunması isbat olunur.

Teorem 10. *Əgər I və* $II_{\pm}$ *şərtləri ödənilərsə, onda hər bir qeyd olunmuş* x *üçün (22) əsas inteqral tənliyinin yeganə* $K^{\pm}(x.\cdot)\in L_1(x,\pm\infty)$ *həlli var.*

Əsas inteqral tənliklərin birqiymətli həll olunması səpilmənin tərs məsələsinin həllini tapmaq üçün aşağıdakı alqoritmi verir.

Alqoritm 1. *Tutaq ki,*

$$\left\{t(\lambda)=a^{-1}(\lambda), \lambda\in\partial G; \lambda_j, \lambda_j<0; m_j^{+}>0, j=1,\ldots,N\right\}$$

kəmiyyətlər yığımı verilmişdir. Onda:

1) *(19)-(21) düsturları ilə* $F^{+}(x,y)$ *və* $F^{-}(x,y)$ *funksiyalarını qururuq;*

2) *(22) əsas inteqral tənliklərini həll edib* $K^{+}(x,y)$ *və* $K^{-}(x,y)$ *funksiyalarını tapırıq;*

3) *(9) düsturlarından istifadə edərək* $q(x)$ *potensialını təyin edirik.*

Bu paraqrafda həm də tərs məsələnin həlli üçün zəruri və kafi şərtlər tapılır.

Teorem 11. $\{t(\lambda)=a^{-1}(\lambda), \lambda\in\partial G; \lambda_j, \lambda_j<0; m_j^{+}>0, j=1,\ldots,N\}$ *kəmiyyətlər yığımının* $q(x)$ *həqiqi qiymətli potensialı*

$$\int_{-\infty}^{0}(1+|x|)|q(x)|dx+\int_{0}^{+\infty}(1+x^{5})|q(x)|dx<\infty$$

sinfindən olan $-y''+\theta(x)x^{2}y+q(x)y=\lambda y, -\infty<x<+\infty$ *şəklində tənlik üçün səpilmə verilənləri olması üçün zəruri və kafi şərt I,* $II_{\pm}$ *xassələrinin ödənilməsidir.*

Son olaraq, müəllif elmi rəhbəri, professor A.X.Xanməmmədova məsələnin qoyuluşu və işin yerinə yetirilməsini daim diqqət altında saxladığı üçün dərin minnətdarlığını bildirir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi əlavə potensialları olan birölçülü Şredinger tənlikləri üçün çevirmə operatorlarının qurulmasına və çevirmə operatorları metodu ilə əlavə artan potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin düz və tərs məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- əlavə xətti potensialı birinci momenti sonlu həyəcanlanma potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatoru qurulmuşdur. Çevirmə operatorlarının nüvələrinin xassələri öyrənilmişdir;

- kompleks qiymətli əlavə periodik potensialı və birinci momenti sonlu həyəcanlanma potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorları qurulmuşdur. Çevirmə operatorlarının nüvələrinin xassələri öyrənilmişdir;

- $\theta(x)x^2$ şəklində əlavə potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin bütün oxda düz məsələsi öyrənilmiş, məxsusi funksiyalar üzrə ayrılış düsturları və Marçenko tipli əsas inteqral tənliklər çıxarılmışdır;

- $\theta(x)x^2$ şəklində əlavə potensialı olan birölçülü Şredinger tənliyi üçün səpilmənin bütün oxda tərs məsələsi öyrənilmiş, tərs məsələnin həlli alqoritmi verilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Оруджев, Д.Г. Спектральный анализ одномерного оператора Шредингера с растущим потенциалом // – Баку: Вестник Бакинского Университета: серия физика-математических наук, – 2021. №4, – с. 39-46.
2. Оруджев, Д.Г. Разложения по собственным функциям одномерного оператора Шредингера с дополнительным растущим потенциалом // – Баку: Журнал Бакинского Инженерного Университета, – 2022. – т.6, №1, – с. 19-24.
3. Khanmamedov, A.Kh., Orujov, D.H. Eigenfunction expansions for the Schrodinger operator with a square potential // – Baku: The Reports of National Academy of Sciences of Azerbaijan. – 2022. v.78, №1-2, – p. 14-16.
4. Orujov, D.H. On the transformation operator for the Schrodinger equation with an additional increasing potential // – Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS, – 2022. v.48, №2, – p. 311-322.
5. Ханмамедов, А.Х., Оруджев, Д.Г., Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера с дополнительным растущим потенциалом на всей оси // Теоретическая и математическая физика. -Москва: -2023. т. 216, №1, -с.117-132.
6. Ханмамедов, А.Х., Оруджев, Д.Г. О решении характеристической задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка // Сборник трудов международной научной конференции “Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики”, - Нальчик : 22.06.2023-26.06.2023, Изд.-во Кабардино-Балкарского гос. унив. им.Х.М. Бербекова, -с.

181-182.
7. Khanmamedov, A.Kh., Orujov, D.H. On transformation operators for the Schrodinger equation with an additional periodic complex potential // – Mexico: Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, – 2023. v.29, №2, №36, -p.1-11.
8. Khanmamedov, A.Kh., Orujov, D.H. Triangular Representation of the Solution to the Schrodinger Equation with an Additional Linear Potential // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2023. v.13, №2, –p.100-109.
9. Orujov, D.H., Khanmamedov, A.Kh. Inverse scattering problem for the Schrodinger equation with an additional growing potential on the entire axis // 6-th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, – Istanbul: – 10-13 May, – 2023, – p. 37.
10. Orujov, D.H. Triangular representations of solutions of the Schrodinger equation with an additional quadratic potential // Doktorant və gənc tədqiqatçıların XXV respublika emi konfransı (NASCO XXV), Bakı Ali Neft Məktəbi, –Baku: – 23-24 November, – 2023, v.3, – p.181-183.

Dissertasiyanın müdafiəsi 19.03.2024-cü il tarixində saat 14:00 Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan:

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 15.02.2024 il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 09.02.2024

Kağızın formatı: A5

Həcm: 38859

Tiraj: 60