АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЕКЦИОННО – СЕТОЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Эльнур Гасан оглы Халилов**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку – 2021

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Общая и прикладная математика» Азербайджанского Государственного Университета Нефти и Промышленности.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Билал Тельман оглы Билалов
доктор физико-математических наук, профессор
Ибрагим Маил оглы Набиев
доктор физико-математических наук, профессор
Алик Малик оглы Наджафов
доктор математических наук, доцент
Мубариз Гафаршах оглы Гаджибеков

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
Мисир Джумаил оглы Марданов

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

Абдуррагим Фарман оглы Гулиев

Председатель научного семинара:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
Билал Тельман оглы Билалов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Известно, что математическое описание рассеяния гармонически зависящих от времени волн приводит к краевым задачам для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, где $\Delta -$ оператор Лапласа, а $k -$ волновое число, причем $\operatorname{Im} k \geq 0$. Так как во многих случаях невозможно найти точное решение краевых задач для уравнения Гельмгольца, то возникает интерес к разработке приближенных методов решения краевых задач для уравнения Гельмгольца с теоретическим обоснованием. Одним из широко распространенных методов исследования приближенного решения внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца является их приведение к интегральному уравнению. Основное преимущество применения метода граничных интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Отметим, что непосредственное применение теории потенциала для вывода интегральных уравнений внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца приводит к уравнениям, которые не имеют единственного решения на собственных значениях внутренних краевых задач. Однако, разыскивая решения внешних краевых задач в виде комбинации акустических потенциалов простого и двойного слоя, а также пользуясь формулой Грина для вывода интегральных уравнений внешних краевых задач, были получены разрешимые единственным образом при любом значении волнового числа интегральные уравнения, зависящие от оператора

$$(T\rho)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)}\int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\rho(y)\,dS_y, \quad x \in S,$$

где S – замкнутая дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в R^3, $\vec{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$, а $\Phi_k(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x,y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \; x,y \in R^3, \; x \neq y .$$

Построенный Ляпуновым контрпример[1] показывает, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует, т.е. оператор T не определен в пространстве $C(S)$ всех непрерывных функций на S с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x \in S} |f(x)|$. Однако, в книге Д.Колтона и Р.Кресса[2] доказано, что оператор T ограниченно действует в пространствах Гельдера и дана формула вычисления производной акустического потенциала двойного слоя с помощью поверхностного градиента. Кроме того, в этой книге показано, что если $\operatorname{Im} k > 0$, то оператор $T : \mathrm{N}(S) \to C(S)$ обратим, причем обратный оператор T^{-1} дается соотношением

$$T^{-1} = -L\left(I - \widetilde{K}\right)^{-1}\left(I + \widetilde{K}\right)^{-1},$$

где

$$(L\rho)(x) = 2\int_S \Phi_k(x,y)\,\rho(y)dS_y, \quad x \in S,$$

$$\left(\widetilde{K}\rho\right)(x) = 2\int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(x)}\,\rho(y)dS_y, \quad x \in S,$$

I – единичный оператор на пространстве $C(S)$, а через $\mathrm{N}(S)$ обозначено пространство всех непрерывных функций φ, потен-

---

[1] Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – Москва: Гостехиздат, – 1953. – 415с.

[2] Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – Москва: Мир, – 1987. – 311с.

циал двойного слоя с плотностью φ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах поверхности S. Следует указать, что данная формула в книге Д.Колтона и Р.Кресса для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя не очень практична. Более того, следует отметить, что до сих пор не построена практичная кубатурная формула для вычисления нормальной производной акустического потенциала двойного слоя. Например, в работе А.Ю.Анфиногенова, И.К.Лифанова и П.И.Лифанова[3] построена кубатурная формула для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя на сфере. Однако, построенная кубатурная формула в этой работе не является практичной в том смысле, что коэффициенты этой кубатурной формулы являются сингулярными интегралами.

Кроме того, известно, что одним из методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца является регуляризация этих уравнений с помощью обратного оператора T^{-1}. Как видно, несмотря на обратимость операторов $I+\widetilde{K}$ и $I-\widetilde{K}$, явные виды обратных операторов $\left(I+\widetilde{K}\right)^{-1}$ и $\left(I-\widetilde{K}\right)^{-1}$ неизвестны, следовательно, неизвестен явный вид обратного оператора T^{-1}.

Из–за выше перечисленных причин до сих пор не исследовано приближенное решение некоторых классов интегральных уравнений краевых задач для уравнения Гельмгольца. Следовательно, разработка приближенных методов решения интегральных уравнений краевых задач для уравнения Гельмгольца при любом значении волнового числа и их теоретическое обоснование представляют собой актуальную задачу.

---

[3] Анфиногенов, А. Ю., Лифанов, И. К., Лифанов, П. И. О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях // – Москва: Математический сборник,– 2001. т.192, №8, – с. 3–46.

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей диссертационной работы является вывести практичную формулу для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя, построить кубатурную формулу для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя и исследовать приближенное решение некоторых классов интегральных уравнений краевых задач для уравнения Гельмгольца при любом значении волнового числа $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории потенциала, теории сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, теории операторов, функционального анализа и общая теория приближенных методов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Вывести практичную формулу для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя.

2. Исследовать некоторые свойства операторов, порожденных прямым значением производной акустического потенциала простого слоя и производной акустического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гельдера.

3. Построить кубатурные формулы для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя и для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя.

4. Исследовать проекционными методами приближенное решение одного класса слабо сингулярных поверхностных интегральных уравнений внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца.

5. Исследовать проекционными методами приближенное решение одного класса гиперсингулярных поверхностных интегральных уравнений первого и второго рода.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказана ограниченность оператора, порожденного прямым значением производной акустического потенциала простого слоя в обобщенных пространствах Гельдера.

2. Дана практичная формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя и доказана ограниченность оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гельдера.

3. Построена кубатурная формула для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегралов.

4. Дан метод построения кубатурной формулы для поверхностного сингулярного интеграла, и на основе этого метода построена кубатурная формула для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя и для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя.

5. Дано обоснование метода коллокации для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегральных уравнений внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца.

6. Дано обоснование метода коллокации для системы поверхностных интегральных уравнений краевой задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца.

7. Дан метод аппроксимации в опорных точках оператора, обратного к оператору, порожденному нормальной производной акустического потенциала двойного слоя. На основе этого метода исследовано приближенное решение одного класса гиперсингулярных поверхностных интегральных уравнений первого и второго рода.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Работа носят, в основном теоретический характер. Однако результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при численных решениях во многих практических задачах естествознания (например, в теории дифракции электромагнитных и акустических волн).

Апробация и применение. Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры «Прикладная математика» Азербайджанской Государственной Нефтяной Академии (рук. член–корр. НАНА, проф. К.Р.Айда–заде), на семинарах кафедры «Общая и прикладная математика» Азербайджанского Государственного Университета Нефти и Промышленности (рук. проф. А.Р. Алиев), на семинаре кафедры «Математический анализ» Бакинского Государственного Университета (рук. проф. С.С. Мирзоев), на семинаре кафедры «Уравнения математической физики» Бакинского Государственного Университета (рук. акад. Ю.А.Мамедов), на семинарах отдела «Математический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. член–корр. НАНА, проф. В.С. Гулиев), на семинаре отдела «Негармонический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. член–корр. НАНА, проф. Б.Т. Билалов), на семинаре отдела «Функциональный анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. проф. Г.И.Асланов), на семинаре отдела «Теория функций» ИММ НАН Азербайджана (рук. д.м.н. В.Е. Исмаилов), на общеинститутском семинаре ИММ НАН Азербайджана (рук. член–корр. НАНА, проф. М.Дж.Марданов), а также на конференции, посвященной 70–летию проф. Я. Дж. Мамедова (Баку, 2001), на Международной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященной 90–летию со дня рождения Г.А.Алиева (Баку, 2013), на Международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функции», посвященной 110–летию со дня рождения академика С.М.Никольского (Москва, 2015), на Международной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» (MADEA-7, Баку, 2015), на Международном научном семинаре «Негармонический анализ и дифференциальные операторы» (Баку, 2016), на конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100–летию со дня рождения проф. А.Ш. Габибзаде (Баку, 2016), на Международной конференции «Весовые оценки дифференциальных и интегральных операторов и их приложения», посвященной 70–летию проф. Р.Ойнарова (Астана, 2017), на

Международной конференции «Операторы, функции и системы в математической физике», посвященной 70–летию проф. Г.А. Исаханлы (Баку, 2018).

Личный вклад автора заключается в формулировке цели и выборе направления исследования. Кроме того, все выводы и полученные результаты, а также методы исследования принадлежат лично автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Призидента Азербайджанской Республики – 23, материалы конференций – 1, тезисы докладов – 7.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена на кафедре «Общая и прикладная математика» Азербайджанского Государственного Университета Нефти и Промышленности.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы – 409482 знаков (титульная страница – 326 знаков, оглавление – 3656 знаков, введение – 69200 знаков, первая глава – 137400 знаков, вторая глава – 45300 знаков, третья глава – 102400 знаков, четвертая глава – 51200 знаков). Список используемой литературы состоит из 155 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, четырех глав и список используемой литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и показана степень ее разработанности, сформулирована цель и задачи исследования, приведена научная новизна, отмечена теоретическая и практическая ценность исследования, а также представлена информация об апробации работы.

В первой главе разработана более практичная формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя и при более ослабленных условиях доказаны ограниченность операторов, порожденных прямым значением производной акустического потенциала простого слоя и производной акустического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гельдера. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [5, 6, 7, 9, 11, 16, 24].

Рассмотрим прямое значение

$$V(x) = \int_S grad_x \Phi_k(x,y)\,\rho(y) dS_y, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in S, \qquad (1)$$

производной акустического потенциала простого слоя, где $S \subset R^3 -$ поверхность Ляпунова, а $\rho(y) -$ непрерывная функция на S.

Для непрерывной на поверхности S функции $\varphi(x)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\delta) = \delta \sup_{\tau \ge \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi,\tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где $\overline{\omega}(\varphi,\tau) = \max\limits_{\substack{|x-y| \le \tau \\ x,\, y \in S}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$.

Теорема 1. *Пусть* $S -$ *поверхность Ляпунова и*

$$\int_0^{diam\, S} \frac{\omega(\rho,t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда интеграл (1) существует в смысле главного значения Коши, причем

$$\sup_{x \in S} |V(x)| \le M\left(\|\rho\|_\infty + \int_0^{diam\, S} \frac{\omega(\rho,t)}{t} dt \right).$$

Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Теорема 2. *Пусть* $S -$ *поверхность Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$ *и*

$$\int_0^{diam\, S} \frac{\omega(\rho,t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\omega(V,h)\le M_\rho\left(h^\alpha+\omega(\rho,h)+\int_0^h\frac{\omega(\rho,t)}{t}dt+h\int_h^{diamS}\frac{\omega(\rho,t)}{t^2}dt\right)$$

при $0<\alpha<1$,

$$\omega(V,h)\le M_\rho\left(h\left|\ln h\right|+\omega(\rho,h)+\int_0^h\frac{\omega(\rho,t)}{t}dt+h\int_h^{diamS}\frac{\omega(\rho,t)}{t^2}dt\right)$$

при $\alpha=1$,

где M_ρ *- положительная постоянная, зависящая лишь от* S, k *и* ρ.

Введем следующие классы функций, определенные на $(0,diamS]$:

$$\chi=\left\{\varphi:\ \varphi\uparrow,\lim_{\delta\to0}\varphi(\delta)=0,\varphi(\delta)/\delta\downarrow\right\},$$

$$J_0(S)=\left\{\varphi\in\chi:\ \int_0^{diamS}\frac{\varphi(t)}{t}dt<+\infty\right\}$$

и рассмотрим функцию

$$Z(\varphi)=\begin{cases}h^\alpha+\varphi(h)+\int_0^h\frac{\varphi(t)}{t}dt+h\int_h^{diamS}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt, & \text{если } 0<\alpha<1,\\ h\left|\ln h\right|+\varphi(h)+\int_0^h\frac{\varphi(t)}{t}dt+h\int_h^{diamS}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt, & \text{если } \alpha=1.\end{cases}$$

Пусть $\varphi\in\chi$ и через $H(\varphi)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на S функций ρ, удовлетворяющих условию

$$\left|\rho(x)-\rho(y)\right|\le C_\rho\varphi(\left|x-y\right|),\ \ x,y\in S,$$

где $C_\rho-$ положительная постоянная, зависящая от S и ρ, а не от x и y. Известно, что пространство $H(\varphi)$ является банаховым пространством с нормой

$$\left\|\rho\right\|_{H(\varphi)}=\sup_{x\in S}\left|\rho(x)\right|+\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\ne y}}\frac{\left|\rho(x)-\rho(y)\right|}{\varphi(\left|x-y\right|)}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in J_0(S)$, *тогда оператор* $(A\rho)(x) = V(x)$, $x \in S$, *ограниченно действует из* $H(\varphi)$ *в* $H(Z(\varphi))$, *причем*

$$\|V\|_{H(Z(\varphi))} \le M\,\|\rho\|_{H(\varphi)}.$$

Теперь рассмотрим акустический потенциал двойного слоя

$$W_{k,\rho}(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} \rho(y) dS_y, \quad x \in S,$$

где $S \subset R^3$ – поверхность Ляпунова, а $\rho(y)$ – непрерывная функция на S.

Теорема 4. *Пусть* S – *поверхность Ляпунова,* $\rho(x)$ – *непрерывно дифференцируемая функция на* S *и*

$$\int_0^{diam\,S} \frac{\omega(grad\rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда акустический потенциал двойного слоя $W_{k,\rho}(x)$ *имеет на* S *производную, причем*

$$grad\,W_{k,\rho}(x) = \int_S grad_x\left(\frac{\partial(\Phi_k(x,y) - \Phi_0(x,y))}{\partial \vec{n}(y)}\right)\rho(y) dS_y -$$

$$-\frac{3}{4\pi}\int_S \frac{(y-x, \vec{n}(y))(y-x)}{|x-y|^5}(\rho(y) - \rho(x)) dS_y +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^3}\vec{n}(y) dS_y, \quad x \in S, \tag{2}$$

и

$$\left|grad W_{k,\rho}(x)\right| \le M\left(\int_0^d \frac{\omega(grad\rho, t)}{t} dt + \|\rho\|_\infty + \|grad\rho\|_\infty\right), \quad \forall x \in S,$$

где $\Phi_0(x,y) = \Phi_k(x,y)|_{k=0}$ *и последний интеграл в равенстве (2) существует в смысле главного значения Коши.*

Теорема 5. *Пусть* S – *поверхность Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$, $\rho(x)$ – *непрерывно дифференцируемая функция на* S *и*

$$\int_0^{diam\,S} \frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt < +\infty .$$

Тогда при $0<\alpha<1$

$$\omega(gradW_{k,\rho},h) \le$$

$$\le M_\rho\left(h^\alpha + \omega(grad\rho,h) + \int_0^h \frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt + h\int_h^{diamS}\frac{\omega(grad\rho,t)}{t^2}dt\right),$$

а при $\alpha=1$

$$\omega(gradW_{k,\rho},h) \le$$

$$\le M_\rho\left(h|\ln h| + \omega(grad\,\rho,h) + \int_0^h \frac{\omega(grad\,\rho,t)}{t}dt + h\int_h^{diamS}\frac{\omega(grad\,\rho,t)}{t^2}dt\right),$$

где M_ρ *- положительная постоянная, зависящая лишь от* S, k *и* ρ.

Пусть $\varphi\in\chi$. Через $H_1(\varphi)$ обозначим линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на поверхности S функций ρ, удовлетворяющих условию

$$|\,grad\rho(x) - grad\rho(y)\,| \le C_\rho\varphi(|x-y|),\quad x,y\in S,$$

где $C_\rho -$ положительная постоянная, зависящая от S и ρ, а не от x и y. Известно, что пространство $H_1(\varphi)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\rho\|_{H_1(\varphi)} = \sup_{x\in S}|\rho(x)| + \sup_{x\in S}|grad\rho(x)| + \sup_{\substack{x,y\in S\\ x\ne y}}\frac{|grad\rho(x)-grad\rho(y)|}{\varphi(|x-y|)}.$$

Теорема 6. *Пусть* $S-$ *поверхность Ляпунова и* $\varphi\in J_0(S)$. *Тогда оператор* $A\rho = gradW_{k,\rho}(x)$, $x\in S$, *ограниченно действует из* $H_1(\varphi)$ *в* $H(Z(\varphi))$, *причем*

$$\|gradW_{k,\rho}\|_{H(Z(\varphi))} \le M\,\|\rho\|_{H_1(\varphi)}.$$

Следствие 1. *Пусть* $S-$ *поверхность Ляпунова и* $\varphi\in J_0(S)$. *Тогда оператор* T *ограниченно действует из* $H_1(\varphi)$ *в* $H(Z(\varphi))$, *причем*

$$\left\|(T\rho)(x)\right\|_{H(Z(\varphi))} \le M \left\|\rho\right\|_{H_1(\varphi)}.$$

Во второй главе дан метод построения кубатурной формулы для поверхностного сингулярного интеграла и на основе этого метода построены кубатурные формулы для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя и для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя. Кроме того, в этой главе построена кубатурная формула для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегралов. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [3, 4, 8, 12, 13, 18].

Пусть S – поверхность Ляпунова. Разобьем S на «регулярные» элементарные части $S = \bigcup_{l=1}^{N} S_l$. Под «регулярной» элементарной частью условимся понимать множество точек, подчиненных следующим требованиям:

(1) для любого $l \in \{1, 2, ..., N\}$ элементарная часть S_l замкнута и его множество внутренних относительно S точек $\overset{0}{S}_l$ не пусто, причем $mes\,\overset{0}{S}_l = mes S_l$ и при $j \in \{1, 2, ...N\}$, $j \ne l$, $\overset{0}{S}_l \cap \overset{0}{S}_j = \emptyset$;

(2) для любого $l \in \{1, 2, ..., N\}$ элементарная часть S_l представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

(3) для любого $l \in \{1, 2, ..., N\}$ существует так называемая опорная точка $x(l) = (x_1(l), x_2(l), x_3(l)) \in S_l$ такая, что:

(3.1) $r_l(N) \sim R_l(N)$ $\left(r_l(N) \sim R_l(N) \Leftrightarrow C_1 \le \dfrac{r_l(N)}{R_l(N)} \le C_2\right.$, где C_1 и C_2 положительные постоянные, не зависящие от N), где $r_l(N) = \min\limits_{x \in \partial S_l} |x - x(l)|$ и $R_l(N) = \max\limits_{x \in \partial S_l} |x - x(l)|$;

(3.2) $R_l(N) \le d/2$, где d – радиус стандартной сферы;

(3.3) для любого $j \in \{1,2,...,N\}$ $\quad r_j(N) \sim r_l(N)$.

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$ и $\lim\limits_{N\to\infty} r(N) = \lim\limits_{N\to\infty} R(N) = 0$, где $R(N) = \max\limits_{l=\overline{1,N}} R_l(N)$, $r(N) = \min\limits_{l=\overline{1,N}} r_l(N)$.

Рассмотрим поверхностный интеграл в виде

$$B(x) = \int_S \frac{K(x,y)}{|x-y|^n} \rho(y) dS_y, \ x \in S, \tag{3}$$

где $S \subset R^3$ – поверхность Ляпунова с показателем $\alpha \in (0,1]$, n – натуральное число, $K(x,y)$ – непрерывная функция на $S \times S$ и существует число $\lambda \in (0,2)$ такое, что для любого $x, y \in S$

$$|K(x,y)| \le M |x-y|^{n-\lambda}, \tag{4}$$

а $\rho(x)$ – непрерывная функция на S. Пусть

$$b_{lj} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad l = j, \\ \dfrac{K(x(l), x(j))}{|x(l) - x(j)|^n} mesS_j & \text{при} \quad l \ne j. \end{cases}$$

Теорема 7. *Пусть непрерывная на* $S \times S$ *функция* $K(x,y)$ *удовлетворяет условию (4) и существует натуральное число* m *такое, что* $\forall x, y', y'' \in S$

$$|K(x,y') - K(x,y'')| \le M \sum_{j=1}^{m} |y' - y''|^{\alpha_j} |x - y'|^{\beta_j} |x - y''|^{\gamma_j}, \tag{5}$$

где $0 < \alpha_j \le 1$, $\beta_j \ge 0$, $\gamma_j \ge 0$ *и* $\alpha_j + \beta_j + \gamma_j > n - 2$, $j = \overline{1,m}$. *Тогда выражение*

$$B^N(x(l)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne l}}^{N} b_{lj} \, \rho(x(j)) \tag{6}$$

в точках $x(l)$, $l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для интеграла (3) с непрерывной на* S *плотностью* ρ, *причем справедлива следующая оценка:*

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|B(x(l))-B^N(x(l))\right|\le M\left[\|\rho\|_\infty (R(N))^\gamma\left|\ln R(N)\right|+\omega(\rho,R(N))\right],$$

где $\gamma=\min\{\eta\ ,\ 2-\lambda\ ,\ \eta+\beta+2-n\}$, $\beta=\min_{j=\overline{1,m}}\{\alpha_j+\beta_j+\gamma_j\}-\eta$, $\eta=\min_{j=\overline{1,m}}\alpha_j$.

Теперь построим кубатурную формулу для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя и для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя. Пусть

$$P_l=\left\{j\,|\,1\le j\le N\ ,\left|x(l)-x(j)\right|\le (R(N))^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\},$$

$$Q_l=\left\{j\,|\,1\le j\le N\ ,\left|x(l)-x(j)\right|>(R(N))^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\}$$

и $V(x)=(V_1(x),V_2(x),V_3(x))$, где

$$V_m(x)=\int_S\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x^{(m)}}\rho(y)\,dS_y,\quad x\in S\quad (m=1,2,3).$$

Теорема 8. *Пусть* $S-$ *поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha\le 1$ *и* $\rho\in H_\beta$, $0<\beta\le 1$. *Тогда выражение*

$$V_m^N(x(l))=$$

$$=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{N}\frac{\left(ik\left|x(l)-x(j)\right|\exp(ik\left|x(l)-x(j)\right|)+\left(1-\exp(ik\left|x(l)-x(j)\right|)\right)\right)(x_m(l)-x_m(j))}{4\pi\left|x(l)-x(j)\right|^3}\times$$

$$\times\rho(x(j))mesS_j+\sum_{j\in Q_l}\frac{x_m(j)-x_m(l)}{4\pi\left|x(l)-x(j)\right|^3}\rho(x_j)\,mesS_j$$

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $V_m(x(l))$, *причем*

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|V_m(x(l))-V_m^N(x(l))\right|\le M_\rho\left[(R(N))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+(R(N))^{\frac{\beta}{1+\alpha}}\right],\quad m=\overline{1,3},$$

где M_ρ *- положительная постоянная, зависящая лишь от* S, k *и* ρ.

Отметим, что методом построения кубатурной формулы для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя можно также построить кубатурную формулу и для других сингулярных интегралов по поверхности Ляпунова.

Теорема 9. *Пусть* $S-$ *поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha\le 1$, $\rho(x)-$ *непрерывно дифференцируемая функция на* S *и*

$$\int_0^{diam\,S}\frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt<+\infty .$$

Тогда выражение

$$(T\rho)^N(x(l))=2\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{N}\frac{\partial}{\partial\vec n(x(l))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x(l),x(j))-\Phi_0(x(l),x(j))\right)}{\partial\vec n(x(j))}\right)\rho(x(j))mesS_j-$$

$$-\frac{3}{2\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{N}\frac{(x(j)-x(l),\vec n(x(j)))(x(j)-x(l),\vec n(x(l)))}{|x(l)-x(j)|^5}(\rho(x(j))-\rho(x(l)))mesS_j+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\vec n(x(l)),\vec n(x(j)))}{|x(l)-x(j)|^3}(\rho(x(j))-\rho(x(l)))mesS_j$$

в точках $x(l)$, $l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $(T\rho)(x)$, *причем справедливы следующие оценки:*

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(T\rho)(x(l))-(T\rho)^N(x(l))\right|\le$$

$$\le M\left[\|\rho\|_\infty(R(N))^\alpha+\|grad\,\rho\|_\infty(R(N))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+\int_0^{(R(N))^{\frac{1}{1+\alpha}}}\frac{\omega(grad\,\rho,t)}{t}dt\right]$$

при $0<\alpha<1$,

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(T\rho)(x(l))-(T\rho)^N(x(l))\right|\le$$

$$\le M\left[\|\rho\|_\infty R(N)\left|\ln(R(N))\right|+\|grad\,\rho\|_\infty\sqrt{R(N)}+\int\limits_0^{\sqrt{R(N)}}\frac{\omega(grad\,\rho,t)}{t}dt\right]$$

$$при\ \alpha=1.$$

В третьей главе дано обоснование метода коллокации для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегральных уравнений внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца. Кроме того, построена последовательность, сходящая к точному решению исходных краевых задач, и дана оценка погрешности. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [1, 2, 3, 10, 14, 17, 19, 20, 22, 25, 26, 29].

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\rho+B\rho=f, \tag{7}$$

где

$$(B\rho)(x)=\int\limits_S\frac{K(x,y)}{|x-y|^n}\rho(y)dS_y,\ \ x\in S,$$

$S\subset R^3$ – поверхность Ляпунова, n – натуральное число, $K(x,y)$ –непрерывная функция на $S\times S$ и удовлетворяет условию (4), f – заданная непрерывная функция на поверхности S, а $\rho(x)$ – искомая непрерывная функция на S.

Как и ранее, разобьем S на «регулярные» элементарные части $S=\bigcup\limits_{l=1}^{N}S_l$ и рассмотрим матрицу $B^N=\left(b_{lj}\right)_{l,j=1}^N$ с элементами

$$b_{lj}=0\ \text{ при } l=j;$$

$$b_{lj}=\frac{K(x(l),x(j))}{|x(l)-x(j)|^n}mesS_j\ \text{ при } l\ne j.$$

Пусть C^N – пространство N –мерных векторов $z^N=\left(z_1^N,z_2^N,\dots,z_N^N\right)^{\mathrm{T}}$, $z_l^N\in C,\ l=\overline{1,N}$, с нормой $\left\|z^N\right\|=\max\limits_{l=\overline{1,N}}\left|z_l^N\right|$, где запись “$a^{\mathrm{T}}$” означает транспонировку вектора a. Используя кубатурную формулу (6), интегральное уравнение (7) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N – приближенных значений $\rho(x(l))$, $l=\overline{1,N}$, которую запишем в виде

$$\left(I^N + B^N\right) z^N = f^N, \tag{8}$$

где I^N – единичный оператор на пространстве C^N, $f^N = p^N f$, а $p^N : C(S) \to C^N$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой $p^N f = \left(f(x(1)), f(x(2)), ..., f(x(N))\right)^{\mathrm{T}}$ и называемый оператором простого сноса.

Теорема 10. *Пусть* $Ker(I+B)=\{0\}$, *функция* $K(x,y)$ *удовлетворяет условиям (4) и (5) и существует натуральное число* ℓ *такое, что*

$$\left|K(x',y) - K(x'',y)\right| \le M \sum_{j=1}^{\ell} \left|x'-x''\right|^{a_j} \left|x'-y\right|^{b_j} \left|x''-y\right|^{c_j}, \forall x', x'', y \in S,$$

где $0 < a_j \le 1$, $b_j \ge 0$, $c_j \ge 0$ *и* $a_j + b_j + c_j > n-2$, $j=\overline{1,\ell}$. *Тогда уравнения (7) и (8) имеют единственные решения* $\rho_* \in C(S)$ *и* $z_*^N \in C^N$, *соответственно, причем* $\left\| z_*^N - p^N \rho_* \right\| \to 0$ *при* $N \to \infty$ *с оценкой*

$$\left\| z_*^N - p^N \rho_* \right\| \le M \left[\|f\|_\infty \left(R(N)\right)^\eta \left|\ln R(N)\right| + \omega\left(f, R(N)\right)\right],$$

где $\eta = \min\{\gamma, c\}$, $c = \min\{a, 2-\lambda, a+b+2-n\}$, $b = \min\limits_{j=\overline{1,\ell}} \{a_j + b_j + c_j\} - a$, $a = \min\limits_{j=\overline{1,\ell}} a_j$,

Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S. В ранее упомянутой монографии Д.Колтона и Р.Кресса доказано, что если функция $u(x)$ имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, т.е. предел

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}(x)} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(\vec{n}(x), grad\, u(x + h\vec{n}(x))\right), \quad x \in S,$$

существует равномерно на S, то решение уравнения Гельмгольца u, удовлетворяющее условиям излучения, можно представить в виде

$$u(x)=\int_S\left\{u(y)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}(y)}\Phi_k(x,y)\right\}dS_y,\ x\in R^3\setminus\overline{D}. \qquad (9)$$

Используя это представление, в работе Бертона и Миллера[4] внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Гельмгольца приведена к однозначно разрешимому в пространстве $C(S)$ при любом значении волнового числа $\operatorname{Im}k\ge 0$ интегральному уравнению второго рода

$$\rho+\widetilde{K}\rho-i\eta L\rho=Tf-i\eta(Kf-f), \qquad (10)$$

где

$$(Kf)(x)=2\int_S\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}f(y)dS_y,\quad x\in S,$$

$f\in N(S)-$заданная функция, а $\eta\ne 0-$произвольное действительное число, причем $\eta\operatorname{Re}k\ge 0$. Отметим, что решение уравнения (10) является нормальной производной в смысле равномерной сходимости решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на поверхности S. При этом функция

$$u(x)=\int_S\left\{f(y)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}-\rho(y)\Phi_k(x,y)\right\}dS_y,\ x\in R^3\setminus\overline{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. Кроме того, уравнение (10) имеет то преимущество, что его решение является решением уравнения мо-

---

[4] Burton, A.J., Miller, G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary–value problems // Proceedings of the Royal Society London, – 1971. v. A323, – p. 201–220.

ментов, полученным впервые Уотерменом[5] для рассеяния электромагнитных волн. Запишем уравнение (10) в виде

$$\rho(x)+(A\rho)(x)=(Bf)(x), \tag{11}$$

где

$$(A\rho)(x)=(\widetilde{K}\rho)(x)-i\eta\,(L\rho)(x),\quad x\in S,$$
$$(Bf)(x)=(Tf)(x)-i\eta\,((Kf)(x)-f(x)),\ x\in S.$$

Опять–таки разобьем S на «регулярные» элементарные части $S=\bigcup_{l=1}^{N}S_l$. Тогда выражение

$$(A\rho)^N(x(l))=\sum_{j=1}^{N}a_{l\,j}\,\rho(x(j)) \tag{12}$$

в точках $x(l),\, l=\overline{1,N}$, является кубатурной формулой для интеграла $(A\rho)(x)$, где

$$a_{l\,j}=0\ \text{, если } l=j\,,$$
$$a_{l\,j}=2\left[\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(l))}-i\eta\,\Phi_k(x(l),x(j))\right]mesS_j,\ \text{ если }\ l\neq j,$$

причем справедлива оценка

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(A\rho)(x(l))-(A\rho)^N(x(l))\right|\le M\left[\|\rho\|_\infty R(N)|\ln R(N)|+\omega(\rho,R(N))\right].$$

Кроме того, если функция f непрерывно дифференцируема на S и

$$\int_0^d\frac{\omega(grad\,f,t)}{t}dt<\infty,$$

то выражение

$$(Bf)^N(x(l))=\sum_{j=1}^{N}b_{l\,j}\,f(x(j)) \tag{13}$$

[5] Waterman, P.C. Matrix formulation of electromagnetic scattering // Proceedings of the IEEE, – 1965. v.53, – p.805–812.

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, является кубатурной формулой для интеграла $(Bf)(x)$, где

$$b_{l\,l}=\frac{3}{2\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N}\frac{(x(j)-x(l),\vec n(x(j)))\,(x(j)-x(l),\vec n(x(l)))}{|x(l)-x(j)|^5}\,mesS_j-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\vec n(x(l)),\vec n(x(j)))}{|x(l)-x(j)|^3}\,mesS_j+i\eta \quad \text{при} \quad l=\overline{1,N},$$

$$b_{l\,j}=2\left[\frac{\partial}{\partial \vec n(x(l))}\left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l),x(j))-\Phi_0(x(l),x(j)))}{\partial \vec n(x(j))}\right)-\right.$$

$$-\frac{3}{4\pi}\frac{(x(j)-x(l),\vec n(x(j)))\,(x(j)-x(l),\vec n(x(l)))}{|x(l)-x(j)|^5}-$$

$$\left.-i\eta\,\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial n(x(j))}\right]mesS_j \quad \text{при} \quad j\in P_l \quad \text{и} \quad j\neq l,$$

$$b_{l\,j}=2\left[\frac{\partial}{\partial \vec n(x(l))}\left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l),x(j))-\Phi_0(x(l),x(j)))}{\partial \vec n(x(j))}\right)-\right.$$

$$-\frac{3}{4\pi}\frac{(x(j)-x(l),\vec n(x(j)))\,(x(j)-x(l),\vec n(x(l)))}{|x(l)-x(j)|^5}+$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi}\frac{(\vec n(x(l)),\vec n(x(j)))}{|x(l)-x(j)|^3}-i\eta\,\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial n(x(j))}\right]mesS_j \quad \text{при} \quad j\in Q_l,$$

причем

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(Bf)(x(l))-(Bf)^N(x(l))\right|\le$$

$$\le M\left[\|f\|_\infty R(N)|\ln R(N)|+\|grad\,f\|_\infty\sqrt{R(N)}+\int_0^{\sqrt{R(N)}}\frac{\omega(grad\,f,t)}{t}dt\right].$$

Используя кубатурные формулы (12) и (13), интегральное уравнение (11) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N – приближенных значений $\rho(x(l))$, $l=\overline{1,N}$, которую запишем в виде

$$\left(I^N + A^N\right)z^N = B^N f^N, \qquad (14)$$

где $f^N = p^N f$, $A^N = \left(a_{lj}\right)_{l,j=1}^N$ и $B^N = \left(b_{lj}\right)_{l,j=1}^N$.

Теорема 11. *Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на S и*

$$\int_0^d \frac{\omega(gradf,\, t)}{t}dt < \infty.$$

Тогда уравнения (11) и (14) имеют единственные решения $\rho_* \in C(S)$ и $z_*^N \in C^N$ $\left(N \geq N_0\right)$, соответственно, и $\left\| z_*^N - p^N \rho_* \right\| \to 0$ при $N \to \infty$ с оценкой скорости сходимости

$$\left\| z_*^N - p^N \rho_* \right\| \leq M\left(\sqrt{R(N)} + \omega\left(grad\, f, \sqrt{R(N)}\right)\right).$$

Следствие 2. *Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на S и*

$$\int_0^d \frac{\omega(gradf, t)}{t}dt < \infty,$$

$z_*^N = \left(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_N^*\right)^{\mathrm{T}}$ является решением системы алгебраических уравнений (14) и $x_0 \in R^3 \setminus \overline{D}$. Тогда последовательность

$$u_N(x_0) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_k\left(x_0, x(j)\right)}{\partial \vec{n}\left(x(j)\right)} f\left(x(j)\right) mesS_j - \sum_{j=1}^N \Phi_k\left(x_0, x(j)\right) z_j^*\, mesS_j$$

сходится к значению $u(x_0)$ решения $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в точке x_0, причем

$$\left|u_N(x_0) - u(x_0)\right| \leq M\left(\sqrt{R(N)} + \omega\left(grad\, f, \sqrt{R(N)}\right)\right).$$

Приведем обоснование метода коллокации для граничного интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, f – заданная непрерывная функция на S, $\lambda -$заданное число, причем $\mathrm{Im}\left(\bar{k}\lambda\right)\geq 0$,

$$\overline{\Phi}_k\left(x,y\right)=2\,\frac{\partial}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\left(\Phi_k\left(x,y\right)-\Phi_0\left(x,y\right)\right),\ x,y\in R^3,\ x\neq y,$$

$$\upsilon_1\left(x,\rho\right)=2\int_S\frac{\partial\Phi_k\left(x,y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\rho\left(y\right)dS_y\ ,\ \ \upsilon_2\left(x,\rho\right)=2\int_S\Phi_k\left(x,y\right)\rho\left(y\right)dS_y\ ,$$

и $\psi\left(x\right)=\upsilon_{20}\left(x,\rho\right)-$потенциал простого слоя с плотностью $\rho\in C\left(S\right)$ для уравнения Лапласа, т.е.

$$\upsilon_{20}\left(x,\rho\right)=2\int_S\Phi_0\left(x,y\right)\rho\left(y\right)dS_y\ .$$

В работе О.И.Панича[6] показано, что функция

$$u\left(x\right)=\upsilon_2\left(x,\rho\right)-\mu\,\upsilon_1\left(x,\psi\right),\ \ x\in R^3\setminus\overline{D}\,,$$

где $\mu -$комплексное число, причем если $\mathrm{Im}k=0$, то $\mathrm{Im}\mu\neq 0$, а если $\mathrm{Im}k>0$, то $\mu=0$, является решением смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, если плотность ρ является решением однозначно разрешимого интегрального уравнения

$$\rho+A\rho=\varphi, \tag{15}$$

где

$$\varphi=\left(\mu-1\right)^{-1}f\ ,$$

$$A=\left(\mu-1\right)^{-1}\left(\widetilde{K}-2\mu\left(G+2R\right)+\lambda\left(L-\mu\widetilde{L}-4\mu Q\right)\right),$$

$$\left(\widetilde{L}\rho\right)\!\left(x\right)=\left(L\rho\right)\!\left(x\right)|_{k=0}=2\int_S\Phi_0\left(x,y\right)\rho\left(y\right)dS_y\ ,\ x\in S\,,$$

$$\left(G\rho\right)\!\left(x\right)=\int_S\frac{\partial\overline{\Phi}_k\left(x,y\right)}{\partial\vec{n}\left(x\right)}\left(\int_S\Phi_0\left(y,t\right)\rho\left(t\right)dS_t\right)dS_y\ ,\ x\in S\,,$$

$$\left(R\rho\right)\!\left(x\right)=\int_S\frac{\partial\Phi_0\left(x,y\right)}{\partial\vec{n}\left(x\right)}\left(\int_S\frac{\partial\Phi_0\left(y,t\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\rho\left(t\right)dS_t\right)dS_y\ ,\ x\in S\,,$$

[6] Панич, О.И. К вопросу о разрешимости внешних краевых задач для волнового уравнения и для системы уравнений Максвелла // – Москва: Успехи математических наук, – 1965. т. 20, №1, – с. 221–226.

$$(Q\rho)(x)=\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\left(\int_S \Phi_0(y,t)\rho(t)dS_t\right)dS_y\,,\quad x\in S\,.$$

Разбивая S на «регулярные» элементарные части $S=\bigcup_{l=1}^{N} S_l$, предположим

$$a_{l\,j}=(\mu-1)^{-1}\left(2b_{l\,j}^{(k)}-2\mu\left(\sum_{m=1}^{N} g_{l\,m}^{(k)}c_{m\,j}^{(0)}+2\sum_{m=1}^{N} b_{l\,m}^{(0)}b_{m\,j}^{(0)}\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(2c_{l\,j}^{(k)}-2\mu\,c_{l\,j}^{(0)}-4\mu\sum_{m=1}^{N} e_{l\,m}^{(k)}c_{m\,j}^{(0)}\right)\right),$$

где

$$b_{ll}^{(k)}=g_{ll}^{(k)}=c_{ll}^{(k)}=e_{ll}^{(k)}=0\quad\text{при}\quad l=\overline{1,N}\ ,$$

$$b_{l\,j}^{(k)}=\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(l))}mesS_j\quad\text{при}\quad l,j=\overline{1,N}\ \text{ и }\ l\neq j\,,$$

$$g_{l\,j}^{(k)}=\frac{\partial\overline{\Phi}_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(l))}mesS_j\ \text{ при}\quad l,j=\overline{1,N}\ \text{ и }\ l\neq j\,,$$

$$c_{l\,j}^{(k)}=\Phi_k(x(l),x(j))mesS_j\quad\text{при}\quad l,j=\overline{1,N}\ \text{ и }\ l\neq j\,,$$

$$e_{l\,j}^{(k)}=\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(j))}mesS_j\ \text{ при}\quad l,j=\overline{1,N}\ \text{ и }\ l\neq j\,,$$

$$b_{l\,j}^{(0)}=b_{l\,j}^{(k)}\Big|_{k=0},\ \ c_{l\,j}^{(0)}=c_{l\,j}^{(k)}\Big|_{k=0},\ \ e_{l\,j}^{(0)}=e_{l\,j}^{(k)}\Big|_{k=0}.$$

Теорема 12. *Выражение*

$$(A\rho)^N(x(l))=\sum_{j=1}^{N} a_{l\,j}\,\rho(x(j))\tag{16}$$

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $(A\rho)(x)$, *причем справедлива следующая оценка:*

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(A\rho)(x(l))-(A\rho)^N(x(l))\right|\le M\left[\|\rho\|_\infty R(N)|\ln R(N)|+\omega(\rho,R(N))\right].$$

Используя кубатурную формулу (16), интегральное уравнение (15) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N – приближенных значений $\rho(x(l))$, $l=\overline{1,N}$, которую запишем в виде

$$\left(I^N + A^N\right) z^N = \varphi^N, \tag{17}$$

где $A^N = \left(a_{lj}\right)_{l,j=1}^N$ и $\varphi^N = (\mu-1)^{-1} p^N f$.

Теорема 13. *Уравнения (15) и (17) имеют единственные решения $\rho_* \in C(S)$ и $z_*^N \in C^N$, соответственно, и $\left\| z_*^N - p^N \rho_* \right\| \to 0$ при $N \to \infty$ с оценкой*

$$\left\| z_*^N - p^N \rho_* \right\| \le M\left[R(N)\left|\ln R(N)\right| + \omega(f, R(N))\right].$$

Следствие 3. *Пусть $z_*^N = \left(z_1^*, z_2^*, \dots, z_N^*\right)^{\mathrm{T}}$ является решением системы алгебраических уравнений (17) и $x_0 \in R^3 \setminus \overline{D}$. Тогда последовательность*

$$u_N(x_0) = 2\sum_{j=1}^N \Phi_k\left(x_0, x(j)\right) z_j^* \, mesS_j -$$

$$-4\mu \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_k\left(x_0, x(j)\right)}{\partial \vec{n}(x(j))} \left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^N \Phi_0\left(x(j), x(m)\right) z_m^* \, mesS_m \right) mesS_j$$

сходится к значению $u(x_0)$ решения $u(x)$ смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца в точке x_0, причем

$$\left|u_N(x_0) - u(x_0)\right| \le M\left[\omega(f, R(N)) + R(N)\left|\ln R(N)\right|\right].$$

Теперь перейдем к обоснованию метода коллокации для систем интегральных уравнений краевой задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца. Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, f и g – заданные непрерывные функции на S, а k, k_0, μ и μ_0 – заданные комплексные числа, причем $\mathrm{Im}k \ge 0$, $\mathrm{Im}k_0 \ge 0$ и $\mu + \mu_0 \ne 0$.

Кресс и Роч[7] доказали, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x)=\int_S\left\{\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\psi(y)+\mu\Phi_k(x,y)\varphi(y)\right\}dS_y,\ x\in R^3\setminus\overline{D},$$

$$u_0(x)=\int_S\left\{\frac{\partial\Phi_{k_0}(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\psi(y)+\mu_0\Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y)\right\}dS_y,\ x\in D,$$

с непрерывными плотностями ψ и φ, является решением задачи сопряжения, если ψ и φ являются решениями разрешимой единственным образом системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned}&(\mu+\mu_0)\psi+(\mu K-\mu_0K_0)\psi+\left(\mu^2L-\mu_0^2L_0\right)\varphi=2f,\\&(\mu+\mu_0)\varphi-(T-T_0)\psi-\left(\mu\tilde{K}-\mu_0\tilde{K}_0\right)\varphi=-2g,\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$L_0=L|_{k=k_0},\quad K_0=K|_{k=k_0},\ \tilde{K}_0=\tilde{K}|_{k=k_0},$$

$$((T-T_0)\psi)(x)=2\int_S\frac{\partial}{\partial\vec{n}(x)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x,y)-\Phi_{k_0}(x,y)\right)}{\partial\vec{n}(y)}\right)\psi(y)dS_y,\ x\in S.$$

На пространстве $C(S)\times C(S)$ введем оператор

$$A=\frac{1}{\mu+\mu_0}\begin{pmatrix}\mu K-\mu_0K_0 & \mu^2L-\mu_0^2L_0\\ T_0-T & \mu_0\tilde{K}_0-\mu\tilde{K}\end{pmatrix}.$$

Тогда систему (18) можно переписать в виде

$$(I+A)\rho=h,\tag{19}$$

где $I-$единичный оператор на $C(S)\times C(S)$,

$$\rho=\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix},\quad h=\frac{2}{\mu+\mu_0}\begin{pmatrix}f\\ -g\end{pmatrix}.$$

Следует указать, что $C(S)\times C(S)$ является банаховым пространством с нормой $\|\rho\|_1=\max\left\{\|\psi\|_\infty,\|\varphi\|_\infty\right\}$.

---

[7] Kress, R., Roach, G.F. Transmission problems Helmholtz equation // Journal of Mathematical Physics, – 1978. v.19, – p.1433–1437.

Опять–таки разобьем S на «регулярные» элементарные части $S=\bigcup_{l=1}^{N}S_l$ и пусть $\widetilde{p}^{2N}:C(S)\times C(S)\to C^{2N}$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$\widetilde{p}^{2N}\rho=\widetilde{p}^{2N}\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\psi(x(1)),\psi(x(2)),\ldots,\psi(x(N)),\varphi(x(1)),\varphi(x(2)),\ldots,\varphi(x(N))\right)^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим $2N$ – мерную матрицу $A^{2N}=\left(a_{lj}\right)_{l,j=1}^{2N}$ с элементами

$$a_{lj}=0 \text{ при } l=\overline{1,N},\ j=\overline{1,N} \text{ и } l=j;$$

$$a_{lj}=\frac{mes\,S_j}{\mu+\mu_0}\left(\mu\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(j))}-\mu_0\frac{\partial\Phi_{k_0}(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(j))}\right) \text{ при } l=\overline{1,N},$$

$$j=\overline{1,N} \text{ и } l\neq j;$$

$$a_{lj}=0 \text{ при } l=\overline{1,N},\ j=\overline{N+1,2N} \text{ и } l=j-N;$$

$$a_{lj}=\frac{mes\,S_{j-N}}{\mu+\mu_0}\left(\mu^2\Phi_k(x(l),x(j-N))-\mu_0^2\Phi_{k_0}(x(l),x(j-N))\right)$$

$$\text{при } l=\overline{1,N},\ j=\overline{N+1,2N} \text{ и } l\neq j-N;$$

$$a_{lj}=0 \text{ при } l=\overline{N+1,2N},\ j=\overline{1,N} \text{ и } l=j+N;$$

$$a_{lj}=\frac{mes\,S_j}{\mu+\mu_0}\frac{\partial}{\partial\vec{n}(x(l-N))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_{k_0}(x(l-N),x(j))-\Phi_k(x(l-N),x(j))\right)}{\partial\vec{n}(x(j))}\right)$$

$$\text{при } l=\overline{N+1,2N},\ j=\overline{1,N} \text{ и } l\neq j+N;$$

$$a_{lj}=0 \text{ при } l=\overline{N+1,2N},\ j=\overline{N+1,2N} \text{ и } l=j;$$

$$a_{lj}=\frac{mes\,S_{j-N}}{\mu+\mu_0}\left(\mu_0\frac{\partial\Phi_{k_0}(x(l-N),x(j-N))}{\partial\vec{n}(x(l-N))}-\mu\frac{\partial\Phi_k(x(l-N),x(j-N))}{\partial\vec{n}(x(l-N))}\right)$$

$$\text{при } l=\overline{N+1,2N},\ j=\overline{N+1,2N} \text{ и } l\neq j.$$

Теорема 14. *Пусть* $\rho=\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix}\in C(S)\times C(S)$. *Тогда выражение*

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} a_{lj}\psi(x(j))+\sum_{j=1}^{N} a_{l,N+j}\,\varphi(x(j)) \\ \sum_{j=1}^{N} a_{N+l,j}\,\psi(x(j))+\sum_{j=1}^{N} a_{N+l,N+j}\,\varphi(x(j)) \end{pmatrix} \tag{20}$$

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $(A\rho)(x)$ *, причем справедлива оценка*

$$\left\|\widetilde{p}^{2N}(A\rho)-A^{2N}\left(\widetilde{p}^{2N}\rho\right)\right\| \le M\left[\|\rho\|_1 R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(\rho,R(N))\right].$$

Используя кубатурную формулу (20), систему интегральных уравнений (19) заменим системой алгебраических уравнений относительно $z^{2N}=\left(z_1^{2N},z_2^{2N},...,z_{2N}^{2N}\right)\in C^{2N}$, являющимся приближенным значением $\widetilde{p}^{2N}\rho$ (здесь z_l^{2N}, $l=\overline{1,N}$, является приближенным значением $\psi(x(l))$, а z_{N+l}^{2N}, $l=1,N$ есть приближенное значение $\varphi(x(l))$). Эту систему, в свою очередь, запишем в виде

$$\left(I^{2N}+A^{2N}\right)z^{2N}=h^{2N}, \tag{21}$$

где $h^{2N}=\widetilde{p}^{2N}h$ и $I^{\ 2N}-$ единичный оператор на C^{2N}.

Теорема 15. *Пусть* $h\in C(S)\times C(S)$. *Тогда уравнения (19) и (21) имеют единственные решения* $\rho_*\in C(S)\times C(S)$ *и* $z_*^{2N}\in C^{2N}$, *соответственно, при этом* $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|z_*^{2N}-\widetilde{p}^{2N}\rho_*\right\|=0$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\left\|z_*^{2N}-\widetilde{p}^{2N}\rho_*\right\|\le M\left[R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(h,R(N))\right].$$

Следствие 4. *Пусть* $z_*^{2N}=\left(z_1^*,z_2^*,\dots,z_{2N}^*\right)^{\mathrm{T}}$ *является решением системы алгебраических уравнений (21). Тогда последовательность*

$$u^N(x^*)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_k\left(x^*,x(j)\right)}{\partial\vec{n}(x(j))}z_j^*+\mu\Phi_k\left(x^*,x(j)\right)z_{N+j}^*\right)mesS_j\,,\ x^*\in R^3/\overline{D}\,,$$

сходится к $u\left(x^*\right)$, *а последовательность*

$$u_0^N(x_*) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \Phi_{k_0}(x_*, x(j))}{\partial \vec{n}(x(j))} z_j^* + \mu_0 \Phi_{k_0}(x_*, x(j)) z_{N+j}^* \right) mesS_j \ , \ x_* \in D,$$

сходится к $u_0(x_*)$, *причем*

$$\left| u^N(x^*) - u(x^*) \right| \le M \left[R(N) \left| \ln R(N) \right| + \omega(h, R(N)) \right],$$

$$\left| u_0^N(x_*) - u_0(x_*) \right| \le M \left[R(N) \left| \ln R(N) \right| + \omega(h, R(N)) \right].$$

В четвертой главе дан метод аппроксимации в опорных точках оператора, обратного к оператору, порожденного нормальной производной акустического потенциала двойного слоя. На основе этого метода исследовано приближенное решение одного класса поверхностных интегральных уравнений первого рода и гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода краевых задач для уравнения Гельмгольца проекционными методами. Кроме того, построены последовательности, сходящие к точным решениям рассматриваемых краевых задач, и даны оценки погрешности. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [15, 21, 23, 27, 28, 30, 31].

Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, а g – заданная непрерывная функция на S. В ранее упомянутой книге Д.Колтона и Р.Кресса доказано, что потенциал двойного слоя

$$u(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \varphi(y) dS_y \ , \quad x \in R^3 \setminus S,$$

с плотностью $\varphi \in \mathrm{N}(S)$ является решением внутренней и внешней краевых задач Неймана для уравнения Гельмгольца, если φ есть решение гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода

$$T\varphi = 2g \ . \qquad (22)$$

Отметим, что оператор T является неограниченным в пространстве $\mathrm{N}(S)$. Однако, в этой работе показано, что если $\operatorname{Im} k > 0$, то при любой правой части $g \in C(S)$ гиперсингулярное интегральное уравнение (22) однозначно разрешимо в пространстве $\mathrm{N}(S)$, причем решение интегрального уравнения (22) имеет вид

$$\varphi = -2L\left(I-\widetilde{K}\right)^{-1}\left(I+\widetilde{K}\right)^{-1}g\ .$$

Следовательно, оператор T^{-1}, обратный к оператору T, дается соотношением

$$T^{-1} = -L\left(I-\widetilde{K}\right)^{-1}\left(I+\widetilde{K}\right)^{-1}.$$

Как и ранее, разобьем S на «регулярные» элементарные части $S=\bigcup_{l=1}^{N} S_l$. Пусть I^N есть $N-$мерная единичная матрица и $\widetilde{K}^N = \left(\widetilde{k}_{lj}\right)_{l,j=1}^{N}$, где

$$\widetilde{k}_{lj} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad l=j, \\ 2\dfrac{\partial \Phi_k\left(x(l),x(j)\right)}{\partial \vec{n}\left(x(l)\right)}\,mesS_j & \text{при} \quad l\neq j. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если* $\mathrm{Im}k>0$, *то существует обратная матрица* $\left(I^N+\widetilde{K}^N\right)^{-1}$ *, причем*

$$M_1=\sup_N\left\|\left(I^N+\widetilde{K}^N\right)^{-1}\right\|<+\infty$$

и

$$\max_{l=1,N}\left|\left(\left(I+\widetilde{K}\right)^{-1}g\right)\left(x(l)\right)-\sum_{j=1}^{N}\widetilde{k}_{lj}^{+}\,g\left(x(j)\right)\right|\leq$$
$$\leq M\ \left[\|g\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega\left(g,R(N)\right)\right],$$

где $\widetilde{k}_{lj}^{+}$ *– элемент* $l-$*ой строки и* $j-$*ого столбца матрицы* $\left(I^N+\widetilde{K}^N\right)^{-1}$.

Лемма 2. *Если* $\mathrm{Im}k>0$, *то существует обратная матрица* $\left(I^N-\widetilde{K}^N\right)^{-1}$ *, причем*

$$M_2=\sup_N\left\|\left(I^N-\widetilde{K}^N\right)^{-1}\right\|<+\infty$$

и

$$\max_{l=1,N}\left|\left(\left(I-\widetilde{K}\right)^{-1} g\right)(x(l))-\sum_{j=1}^{N}\widetilde{k}_{l\,j}^{-}\, g(x(j))\right| \le$$
$$\le M\,\left[\|g\|_{\infty} R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(g,R(N))\right],$$

где $\widetilde{k}_{l\,j}^{-}$ *– элемент* l *– ой строки и* j *– ого столбца матрицы* $\left(I^{N}-\widetilde{K}^{N}\right)^{-1}$.

Пусть

$$f_{l\,j}=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad l=j\,, \\ 2\,\Phi_k(x(l),x(j))\,mesS_j & \text{при} \quad l\neq j\,. \end{cases}$$

Теорема 16. *Если* $\mathrm{Im}k>0$*, то выражение*

$$\varphi^{N}(x(l))=-2\sum_{j=1}^{N} f_{l\,j}\left(\sum_{n=1}^{N}\widetilde{k}_{j\,n}^{-}\left(\sum_{m=1}^{N}\widetilde{k}_{n\,m}^{+}\, g(x(m))\right)\right)$$

является приближенным значением решения $\varphi(x)$ *уравнения (22) в точках* $x(l), l=\overline{1,N}$*, причем*

$$\max_{l=1,N}\left|\varphi(x(l))-\varphi^{N}(x(l))\right|\le M\left[\|g\|_{\infty} R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(g,R(N))\right].$$

Следствие 5. *Пусть* $\mathrm{Im}k>0$*,*

$$\varphi^{N}(x(l))=-2\sum_{j=1}^{N} f_{l\,j}\left(\sum_{n=1}^{N}\widetilde{k}_{j\,n}^{-}\left(\sum_{m=1}^{N}\widetilde{k}_{n\,m}^{+}\, g(x(m))\right)\right)$$

и $x_0\in D$ *(*$x_0\in R^3\setminus\overline{D}$*). Тогда последовательность*

$$u_N(x_0)=\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial\Phi_k(x_0,x(l))}{\partial\vec{n}(x(l))}\varphi^{N}(x(l))\,mesS_l$$

сходится к значению $u(x_0)$ *решения* $u(x)$ *внутренней (внешней) краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в точке* x_0*, причем*

$$\left|u_N(x_0)-u(x_0)\right|\le M\left[\|g\|_{\infty} R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(g,R(N))\right].$$

Теперь исследуем приближенное решение граничного интегрального уравнения первого рода внутренней и внешней краевых задач Дирихле для уравнения Гельмгольца. Пусть $D\subset R^3$ –

ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, а f – заданная непрерывная функция на S. В ранее упомянутой книге Д.Колтона и Р.Кресса показано, что потенциал простого слоя

$$u(x)=\int_S \Phi_k(x,y)\varphi(y)dS_y\,,\ x\in R^3\setminus S\,,$$

с непрерывной плотностью φ является решением внутренней и внешней краевых задач Дирихле, если φ является решением интегрального уравнения

$$L\varphi = 2f\,. \qquad (23)$$

Следует указать, что оператор L^{-1}, обратный компактному оператору L, является неограниченным в пространстве $\mathrm{N}(S)$. Однако, в этой книге показано, что если $\mathrm{Im}\,k>0$, то при любой правой части $f\in\mathrm{N}(S)$ уравнение (23) имеет единственное решение, причем решение интегрального уравнения (23) имеет вид

$$\varphi=-2T(I-K)^{-1}(I+K)^{-1}f\,. \qquad (24)$$

Однако теорема 4 показывает, что если $g\in J_1(S)$, то потенциал двойного слоя с плотностью g имеет непрерывную производную, где через $J_1(S)$ обозначено пространство непрерывно дифференцируемых функций g на S, для которых

$$\int_0^{diam\,S}\frac{\omega(grad\,g\,,t)}{t}dt<+\infty\,.$$

Как видно, использование представления (24) для исследования приближенного решения уравнения (23) неудобно в том смысле, что дополнительно приходится проверять выполнение условия

$$(I-K)^{-1}(I+K)^{-1}f\in J_1(S).$$

Поэтому необходимо получить другое представление для решения уравнения (23). Если $\mathrm{Im}\,k>0$, то оператор

$$T^{-1}=-L\left(I-\widetilde{K}\right)^{-1}\left(I+\widetilde{K}\right)^{-1}$$

представляет собой обратный оператор к T, следовательно, обратный оператор L^{-1} определяется соотношением

$$L^{-1} = -\left(I - \widetilde{K}\right)^{-1}\left(I + \widetilde{K}\right)^{-1} T .$$

Тогда решение уравнения (23) имеет вид

$$\varphi = -2\left(I - \widetilde{K}\right)^{-1}\left(I + \widetilde{K}\right)^{-1} Tf .$$

Разбивая S на «регулярные» элементарные части $S = \bigcup_{l=1}^{N} S_l$, предположим

$$t_{ll} = \frac{3}{2\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N} \frac{\left(x(j)-x(l),\vec{n}(x(j))\right)\left(x(j)-x(l),\vec{n}(x(l))\right)}{\left|x(l)-x(j)\right|^5} mesS_j -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l} \frac{\left(\vec{n}(x(l)),\vec{n}(x(j))\right)}{\left|x(l)-x(j)\right|^3} mesS_j \quad \text{при} \quad l = \overline{1,N} ;$$

$$t_{lj} = \left[2\frac{\partial}{\partial\vec{n}(x(l))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x(l),x(j)) - \Phi_0(x(l),x(j))\right)}{\partial\vec{n}(x(j))}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{2\pi}\frac{\left(x(j)-x(l),\vec{n}(x(j))\right)\left(x(j)-x(l),\vec{n}(x(l))\right)}{\left|x(l)-x(j)\right|^5}\right] mesS_j \quad \text{при} \quad j \in P_l,\ j \neq l ;$$

$$t_{lj} = \left[2\frac{\partial}{\partial\vec{n}(x(l))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x(l),x(j)) - \Phi_0(x(l),x(j))\right)}{\partial\vec{n}(x(j))}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\left(\vec{n}(x(l)),\vec{n}(x(j))\right)}{\left|x(l)-x(j)\right|^3} -$$

$$\left. -\frac{3}{2\pi}\frac{\left(x(j)-x(l),\vec{n}(x(j))\right)\left(x(j)-x(l),\vec{n}(x(l))\right)}{\left|x(l)-x(j)\right|^5}\right] mesS_j \quad \text{при} \quad j \in Q_l .$$

Теорема 17. *Пусть* $\mathrm{Im}k > 0$ *и* $f \in J_1(S)$. *Тогда выражение*

$$\varphi^N(x(l)) = -2\sum_{j=1}^{N} \widetilde{k}_{lj}^{-}\left(\sum_{n=1}^{N} \widetilde{k}_{jn}^{+}\left(\sum_{m=1}^{N} t_{nm}\, f(x(m))\right)\right)$$

в точках $x(l), l = \overline{1,N}$, *является приближенным значением решения* $\varphi(x)$ *уравнения (23), причем*

$$\max_{l=1,N}\left|\varphi(x(l))-\varphi^N(x(l))\right|\le M\Bigl[\sqrt{R(N)}+\omega(grad\, f, R(N))+$$

$$+\int_0^{\sqrt{R(N)}}\frac{\omega(grad\, f,t)}{t}dt+R(N)\int_{R(N)}^{diam\, S}\frac{\omega(grad\, f,t)}{t^2}dt\Bigr].$$

Следствие 6. *Пусть* $\mathrm{Im}\, k>0$, $f\in J_1(S)$,

$$\varphi^N(x(l))=-2\sum_{j=1}^N\widetilde{k}_{l\,j}^-\left(\sum_{n=1}^N\widetilde{k}_{j\,n}^+\left(\sum_{m=1}^N t_{nm}\,f(x(m))\right)\right)$$

и $x_0\in D$ *(* $x_0\in R^3\setminus\overline{D}$ *). Тогда последовательность*

$$u_N(x_0)=\sum_{l=1}^N\Phi_k(x_0,x(l))\varphi^N(x(l))mesS_l$$

сходится к значению $u(x_0)$ *решения* $u(x)$ *внутренней (внешней) краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в точке* x_0*, причем*

$$|u_N(x_0)-u(x_0)|\le M\Bigl[\sqrt{R(N)}+\omega(grad\, f, R(N))+$$

$$+\int_0^{\sqrt{R(N)}}\frac{\omega(grad\, f,t)}{t}dt+R(N)\int_{R(N)}^{diam\, S}\frac{\omega(grad\, f,t)}{t^2}dt\Bigr].$$

Теперь перейдем к обоснованию метода коллокации для гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода для внешней краевой задачи Неймана и для краевой задачи уравнения Гельмгольца с импедансным условием.

Пусть $D\subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, а g – заданная непрерывная функция на S. Используя представление (9), в ранее упомянутой книге Д.Колтона и Р.Кресса внешняя краевая задача Неймана приведена к однозначно разрешимому в пространстве $\mathrm{N}(S)$ гиперсингулярному интегральному уравнению второго рода

$$\psi-K\psi-i\eta T\psi=-Lg-i\eta\left(g+\widetilde{K}g\right), \tag{25}$$

где $\eta\ne 0$ – произвольное действительное число, причем $\eta\,\mathrm{Re}\, k\ge 0$. Отметим, что решение уравнения (25) является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца на S. При этом функция

$$u(x)=\int_S\left\{\psi(y)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}-g(y)\Phi_k(x,y)\right\}dS_y\ ,\ x\in R^3\setminus\overline{D}\,,$$

является решением внешней краевой задачи Неймана, если $\psi\in\mathrm{N}(S)$ является решением гиперсингулярного интегрального уравнения (25). Кроме того, решение уравнения (25) является решением уравнения метода нулевого поля, полученное Уотерменом[8] для рассеяния акустических волн.

Пусть волновое число k_0 не совпадает с собственным значением внутренних задач Дирихле или Неймана (для этого достаточно выбрать любое значение k_0 с $\mathrm{Im}\,k_0>0$). В дальнейшем, обозначим индексом нуль то обстоятельство, что параметр k, входящий в операторы $\widetilde{K}, L$ и T, равен значению k_0. Поскольку оператор

$$A_0=-L_0\left(I-\widetilde{K}_0\right)^{-1}\left(I+\widetilde{K}_0\right)^{-1}:C(S)\to\mathrm{N}(S)$$

представляет собой обратный оператор к $T_0:\mathrm{N}(S)\to C(S)$, то, проведя регуляризацию, уравнение (25) можно преобразовать к эквивалентному виду

$$\psi+A\psi=Bg\,, \tag{26}$$

причем полученное уравнение рассматривается в пространстве $C(S)$, где

$$A\psi=\frac{1}{i\eta}A_0\left(K+i\eta\left(T-T_0\right)-I\right)\psi\,,\ \ Bg=\frac{1}{i\eta}A_0\left(L+i\eta\left(I+\widetilde{K}\right)\right)g\,.$$

Пусть S разбита на «регулярные» элементарные части $S=\bigcup_{l=1}^{N}S_l$ и

[8] Waterman, P.C. New formulation of acoustic scattering // The journal of the acoustical society of America, – 1969. v.45, – p.1417–1429.

$$f_{lj}^0 = f_{lj}\,|_{k=k_0}\,,\ l,j=\overline{1,N}\,,$$

$$c_{ll} = -1 \quad \text{при} \quad l=\overline{1,N}\,,$$

$$c_{lj} = 2i\eta \frac{\partial}{\partial\vec{n}(x(l))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x(l),x(j)) - \Phi_{k_0}(x(l),x(j))\right)}{\partial\vec{n}(x(j))}\right) mesS_j +$$

$$+2\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(j))}\, mesS_j \quad \text{при} \quad l,j=\overline{1,N}\,,\ \ l\neq j\,,$$

$$g_{ll} = i\eta \quad \text{при} \quad l=\overline{1,N}\,,$$

$$g_{lj} = 2\left[\Phi_k(x(l),x(j)) + i\eta\,\frac{\partial\Phi_k(x(l),x(j))}{\partial\vec{n}(x(l))}\right] mesS_j$$

$$\text{при} \quad l,j=\overline{1,N}\,,\ \ l\neq j\,.$$

Теорема 18. *Выражение*

$$(A\psi)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^{N} a_{lj}\,\psi(x(j)) \tag{27}$$

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $(A\psi)(x)$*, причем*

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(A\psi)x(l) - (A\psi)^N x(l)\right| \le M\ \left[\|\psi\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right| + \omega(\psi,R(N))\right],$$

где

$$a_{lj} = -\frac{1}{i\eta}\sum_{n=1}^{N}\left(f_{ln}^0\left(\sum_{m=1}^{N}\widetilde{k}_{nm}^{-}\left(\sum_{t=1}^{N}\widetilde{k}_{mt}^{+}c_{tj}\right)\right)\right),\ \ l,j=\overline{1,N}\,.$$

Теорема 19. *Выражение*

$$(Bg)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^{N} b_{lj}\,g(x(j)) \tag{28}$$

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $(Bg)(x)$*, причем*

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(Bg)x(l) - (Bg)^N x(l)\right| \le M\ \left[\|g\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right| + \omega(g,R(N))\right],$$

где

$$b_{lj}=-\frac{1}{i\eta}\sum_{n=1}^{N}\left(f_{ln}^{0}\left(\sum_{m=1}^{N}\widetilde{k}_{nm}^{-}\left(\sum_{t=1}^{N}\widetilde{k}_{mt}^{+}g_{tj}\right)\right)\right),\quad l,j=\overline{1,N}.$$

Используя кубатурные формулы (27) и (28), уравнение (26) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N – приближенных значений $\psi(x(l))$, $l=\overline{1,N}$, которую запишем в виде

$$\left(I^N+A^N\right)z^N=B^N g^N, \tag{29}$$

где $A^N=\left(a_{lj}\right)_{l,j=1}^{N}$, $B^N=\left(b_{lj}\right)_{l,j=1}^{N}$ и $g^N=p^N g$.

Теорема 20. *Уравнения (26) и (29) имеют единственные решения* $\psi_*\in C(S)$ *и* $z_*^N\in C^N$, *соответственно, при этом* $\left\|z_*^N-p^N\psi_*\right\|\to 0$ *при* $N\to\infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\left\|z_*^N-p^N\psi_*\right\|\le M\left[\|g\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(g,R(N))\right].$$

Следствие 7. *Пусть* $z_*^N=\left(z_1^*,z_2^*,\dots,z_N^*\right)^{\mathrm{T}}$ *является решением системы алгебраических уравнений (29) и* $x_0\in R^3\setminus\overline{D}$. *Тогда последовательность*

$$u_N(x_0)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\Phi_k(x_0,x(j))}{\partial\vec{n}(x(j))}z_j^*\,mesS_j-\sum_{j=1}^{N}\Phi_k(x_0,x(j))g(x(j))mesS_j$$

сходится к значению $u(x_0)$ *решения* $u(x)$ *внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в точке* x_0, *причем*

$$\left|u_N(x_0)-u(x_0)\right|\le M\left[\|g\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(g,R(N))\right].$$

Пусть $D\subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, а f и g – заданные непрерывные функции на S. В ранее упомянутой книге Д.Колтона и Р.Кресса показано, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x)=\int_S\left\{\Phi_k(x,y)+i\eta\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right\}\varphi(y)dS_y,\quad x\in R^3\setminus\overline{D},$$

где $\eta \neq 0$ – произвольное вещественное число, причем $\eta\,\mathrm{Re}\,k \geq 0$, является решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием, если плотность φ – есть решение гиперсингулярного интегрального уравнения

$$\left(1 - i\eta f\right)\varphi - \left(\widetilde{K} + i\eta T + i\eta f K + f L\right)\varphi = -2g\,. \tag{30}$$

Пусть $\mathrm{Im}\,k_0 > 0$. Тогда уравнение (30) можно преобразовать к эквива- лентному виду

$$\varphi + \widetilde{A}\varphi = \widetilde{B}g\,, \tag{31}$$

причем полученное уравнение рассматривается в пространстве $C(S)$, где

$$\widetilde{A}\varphi = -\frac{1}{i\eta}A_0\left[\left(1 - i\eta f\right)I - \left(\widetilde{K} + i\eta\left(T - T_0\right) + i\eta f K + f L\right)\right]\varphi,$$

$$\widetilde{B}g = \frac{2}{i\eta}A_0 g\,.$$

Как и ранее разобьем S на «регулярные» элементарные части $S = \bigcup_{l=1}^{N} S_l$ и пусть

$$\widetilde{c}_{ll} = 1 - i\eta f\left(x(l)\right) \quad \text{при} \quad l = \overline{1, N}\,;$$

$$\widetilde{c}_{lj} = -2i\eta\frac{\partial}{\partial\vec{n}\left(x(l)\right)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k\left(x(l), x(j)\right) - \Phi_{k_0}\left(x(l), x(j)\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x(j)\right)}\right) mesS_j -$$

$$-2\frac{\partial\Phi_k\left(x(l), x(j)\right)}{\partial\vec{n}\left(x(l)\right)}\,mesS_j - 2i\eta f\left(x(l)\right)\frac{\partial\Phi_k\left(x(l), x(j)\right)}{\partial\vec{n}\left(x(j)\right)}\,mesS_j -$$

$$-2f\left(x(l)\right)\Phi_k\left(x(l), x(j)\right) mesS_j \quad \text{при} \quad l, j = \overline{1, N}, \quad l \neq j\,;$$

$$\widetilde{a}_{lj} = \frac{1}{i\eta}\sum_{n=1}^{N}\left(f_{ln}^0\left(\sum_{m=1}^{N}\widetilde{k}_{nm}^{-}\left(\sum_{t=1}^{N}\widetilde{k}_{mt}^{+}\,\widetilde{c}_{tj}\right)\right)\right), \quad l, j = \overline{1, N}\,;$$

$$\widetilde{b}_{lj} = -\frac{2}{i\eta}\sum_{n=1}^{N}\left(f_{ln}^0\left(\sum_{m=1}^{N}\widetilde{k}_{nm}^{-}\,\widetilde{k}_{mj}^{+}\right)\right), \quad l, j = \overline{1, N}\,.$$

Тогда выражения

$$\left(\widetilde{B}g\right)^N(x(l))=\sum_{j=1}^{N}\widetilde{b}_{l\,j}\,g(x(j)), \tag{32}$$

$$\left(\widetilde{A}\varphi\right)^N(x(l))=\sum_{j=1}^{N}\widetilde{a}_{l\,j}\,\varphi(x(j)) \tag{33}$$

в точках $x(l), l=\overline{1,N}$, являются кубатурными формулами для $\left(\widetilde{B}g\right)(x)$ и $\left(\widetilde{A}\varphi\right)(x)$, соответственно, причем

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|\left(\widetilde{B}g\right)^N(x(l))-\left(\widetilde{B}g\right)(x(l))\right|\le M\,\left[\omega(g,R(N))+\|\,g\,\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|\right],$$

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|\left(\widetilde{A}\varphi\right)^N(x(l))-\left(\widetilde{A}\varphi\right)(x(l))\right|\le$$

$$\le M\,\left[\omega(\varphi,R(N))+\|\,\varphi\,\|_\infty\,\omega(f,R(N))+\|\,\varphi\,\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|\right].$$

Используя кубатурные формулы (32) и (33), уравнение (31) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N – приближенных значений $\varphi(x(l))$, $l=\overline{1,N}$, которую запишем в виде

$$\left(I^N+\widetilde{A}^N\right)z^N=\widetilde{B}^N g^N, \tag{34}$$

где $\widetilde{A}^N=\left(\widetilde{a}_{l\,j}\right)_{l,j=1}^N$, $\widetilde{B}^N=\left(\widetilde{b}_{l\,j}\right)_{l,j=1}^N$ и $g^N=p^N g$.

Теорема 21. *Уравнения (31) и (34) имеют единственные решения* $\varphi_*\in C(S)$ *и* $z_*^N\in C^N$*, соответственно, при этом* $\left\|\,z_*^N-p^N\varphi_*\right\|\to 0$ *при* $N\to\infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\left\|\,z_*^N-p^N\varphi_*\right\|\le M\,\left[\omega(g,R(N))+\omega(f,R(N))+R(N)\left|\ln R(N)\right|\right].$$

Следствие 8. *Пусть* $z_*^N=\left(z_1^*,z_2^*,...,z_N^*\right)^{\mathrm{T}}$ *является решением системы алгебраических уравнений (34) и* $x_0\in R^3\setminus\overline{D}$. *Тогда последовательность*

$$u^N(x_0)=\sum_{j=1}^{N}\left(\Phi_k(x_0,x(j))+i\,\eta\frac{\partial\Phi_k(x_0,x(j))}{\partial\vec{n}(x(j))}\right)z_j^*\,mesS_j$$

сходится к значению $u(x_0)$ *решения* $u(x)$ *краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием в точке* x_0, *причем*

$$\left| u^N(x_0) - u(x_0) \right| \le M\left[\omega(g, R(N)) + \omega(f, R(N)) + R(N)\left|\ln R(N)\right|\right].$$

Выводы

Диссертационная работа посвящена исследованию проекционно–сеточными методами приближенных решений поверхностных интегральных уравнений краевых задач для уравнения Гельмгольца.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказана ограниченность оператора, порожденного прямым значением производной акустического потенциала простого слоя в обобщенных пространствах Гельдера.

2. Дана практичная формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя и доказана ограниченность оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гельдера.

3. Построена кубатурная формула для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегралов.

4. Дан метод построения кубатурной формулы для поверхностного сингулярного интеграла, и на основе этого метода построена кубатурная формула для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя и для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя.

5. Дано обоснование метода коллокации для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегральных уравнений внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца.

6. Дано обоснование метода коллокации для системы поверхностных интегральных уравнений краевой задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца.

7. Дан метод аппроксимации в опорных точках оператора, обратного к оператору, порожденному нормальной производной

акустического потенциала двойного слоя. На основе этого метода исследовано приближенное решение одного класса гиперсингулярных поверхностных интегральных уравнений первого и второго рода.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Халилов, Э.Г. О разрешимости одного класса линейных сингулярных интегральных уравнений //Тезисы научной конференции, посвяшенной 70–летию проф. Я. Дж. Мамедова, – Баку: – 2001, – с. 133–134.
2. Khalilov, E.H. On an approximate solution of a boundary integral equation of mixed problem for Nelmoltz equation // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2009. v. 31 (39), – p. 105–110.
3. Mustafa, N., Khalilov, E.H. The colocation method for the solution of boundary integral equations // Applicable Analysis, – 2009. v. 88, № 12, – p.1665–1675.
4. Khalilov, E.H. Cubic formula for class of weakly singular surface integrals // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Baku, – 2013. v. 39, – p. 69–76.
5. Khalilov, E.H. Existence and calculation formula of the devivative of double layer acoustic potential // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, series of phys. – tech. and math. sciences, – 2013. v. 33, № 4, – p. 139–146.
6. Халилов, Э.Г. Оценка типа А. Зигмунда для производной акустического потенциала двойного слоя//Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики», посвяшенной 90–летию со дня рождения Г.А.Алиева, – Баку: – 29–31 мая, – 2013, – с. 204.
7. Халилов, Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // – Новосибирск: Сибирский математический журнал, – 2014. т. 55, №3, – с. 690–700.

8. Khalilov, E.H. Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, series of phys.– tech. and math. sciences, – 2014. v. 34, №1, – p. 73–82.
9. Халилов, Э.Г. О компактности одного класса сингуляр- ных интегральных операторов // – Баку: Вестник Бакинс- кого Университета, сер. физ.–мат. наук, – 2014. №3, – с. 57–62.
10. Khalilov, E.H., Gasymova, D.G. On approximate solution of mixed boundary value problem for Laplace equation // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2014. v. 40, № 2, – p. 107–114.
11. Халилов, Э.Г. Оценка А. Зигмунда для одного класса поверхностных сингулярных интегралов // – Баку: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2014, v. 4, № 2, – p. 11–17.
12. Khalilov, E.H. On direct value of the derivative of an acoustic single layer potential // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, series of phys.–tech. and math. sciences, – 2014. v. 34, №4, – p.143–148.
13. Абдуллаев, Ф.А., Халилов, Э.Г. Кубатурная формула для производной акустического потенциала простого слоя // – Баку: Вестник Бакинского Университета, сер. физ.–мат. наук, – 2015. №1, – с. 9–15.
14. Khalilov, E.H. On approximate solution of external Dirichlet boundary value problem for Laplace equation by collocation method // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2015. v. 5, № 2, – p. 13–20.
15. Khalilov, E.H. On approximate solution of a singular integral equation of Neumanns external boundary value problem for a wave equation // –Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2015. v. 41, № 2, – p. 91–105.
16. Khalilov, E.H. Zygmund estimations for the direct value of the derivative of a simple layer acoustic potential // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, issue math., – 2015. v. 35, №4, – p.102–112.

17. Халилов, Э.Г. О приближенном решении одного класса поверхностных интегральных уравнений методом кол- локации // Тезисы международной конференции «Функ- циональные пространства и теория приближения фун- кции», посвяшенной 110–летию со дня рождения акад. С.М.Никольского, – Москва: – 25–29 мая, – 2015, – с. 240.
18. Khalilov, E.H. A cubic formula for a class of singular surface integrals // International Conference «Mathematical analysis, differential equations and their applications», MADEA–7, – Baku: – 8–13 september, – 2015, – p.86.
19. Abdullayev, F.A., Khalilov, E.H. Grounding of the colloca- tion method for a class of second kind integral equation // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, issue math., – 2016. v. 36, №1, – p. 3–9.
20. Халилов, Э.Г. Обоснование метода коллокации для ин- тегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // –Москва: Журнал вычисли- тельной математики и математической физики, – 2016. т. 56, №7, – с. 1340–1348.
21. Халилов, Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2016. т. 52, №9, – с. 1277–1283.
22. Халилов, Э.Г. Обоснование метода коллокации для одно- го класса систем поверхностных интегральных уравне- ний // Материалы научной конференции «Функциональ- ный анализ и его приложения», посв. 100–летию проф. А.Ш.Габибзаде, – Баку: – 2016, – с. 207–208.
23. Khalilov, E.H. On approximate solution of a class of surface integral equations of first kind // International Workshop on Non–Harmonic Analysis and Differential Operators, – Baku: – 25–27 may, – 2016, – p.64.
24. Халилов, Э.Г. О свойствах оператора, порожденного производной акустического потенциала простого слоя // – Новосибирск: Сибирский журнал чистой и прикладной математики, – 2017. т. 17, №1, – с. 78–90.

25. Khalilov, E.H. Constructive method for solving the external Dirichlet boundary–value problem for the Helmholtz equa- tion // – Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2017. v. 5, №1, – p. 56–64.
26. Халилов, Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса систем интегральных уравнений // – Киев: Украинский математический журнал, – 2017. т. 69, №6, – с. 823–835.
27. Халилов, Э.Г. Обоснование квадратурного метода для одного класса поверхностных сингулярных интегральных уравнений // Тезисы международной конференции «Весовые оценки дифференциальных и интегральных операторов и их приложения» посвяшенной 70–летию проф. Р.Ойнарова, – Астана: – 4–6 мая, – 2017, – с. 275–276.
28. Халилов, Э.Г. Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным усло- вием // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2018. т. 54, № 4, – с. 544–555.
29. Abdullayev, F.A., Khalilov, E.H. Constructive method for solving the external Neumann boundary–value problem for the Helmholtz equation // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2018. v.44, № 1, – p. 62–69.
30. Khalilov, E.H., Aliev, A.R. Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences, – 2018. v. 41, №16, – p. 6921 – 6933.
31. Khalilov, E.H. Substantiation of the collocation method for a class of hypersingular integral equations // Operators, Functions and Systems of Mathematical Physics Conference, – Baku: – 21–24 may, – 2018, – p. 126–128.

Автор глубоко чтит память своего учителя, покойного профессора Бинали Мусаева и выражает искреннюю благодарность профессору Аразу Алиеву и доценту Фуаду Абдуллаеву за постоянное внимание к работе.

Защита диссертации состоится 30 апреля 2021 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 05 марта 2021 года.

Подписано в печать: 05.03.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 80000
Тираж: 70