AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

CIRLAŞAN TRİQONOMETRİK SİSTEMLƏRİN FREYMLİK XASSƏLƏRİ, KOSTYUÇENKO SİSTEMİ TİPLİ SİSTEMLƏRİN BAZİSLİK XASSƏLƏRİ VƏ BƏZİ TƏTBİQLƏR

İxtisas: 1202.01-Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Aydın Şükür oğlu Şükürov**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2022

Dissertasiya işi AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi: AMEA–nın müxbir üzvü, f-r.e.d., professor
Bilal Telman oğlu Bilalov

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Hidayət Məhəmməd oğlu Hüseynov

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Rəhim Mikayıl oğlu Rzayev

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
Rövşən Əlifağa oğlu Bəndəliyev

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
Elnur Həsən oğlu Xəlilov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA–nın müxbir üzvü, f-r.e.d., professor
______________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f-r.e.n.
______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: f-r.e.d., professor
______________ **Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Müstəqil bir tədqiqat sahəsi kimi bazislər nəzəriyyəsi çoxsaylı tədqiqatlarda öyrənilmişdir. Bu tədqiqatların mövzularına, xüsusi halda, müxtəlif fəzalarda sistemlərin bazisliyi üçün meyarlar, bazisə müəyyən mənada yaxın olan sistemlərin bazisliyinin araşdırılması, bazisi olan fəzada təsir edən operatorların müəyyən xassələrinin araşdırılması, fəza üzərinə bazisin varlığını təmin edən abstrakt şərtlərin tapılması və s. daxildir. Bazislər nəzəriyyəsinə həsr olunmuş elmi işlərə misal olaraq İ.Zinger, R.Yanq, A.Sedletskii, K.Heil, B.Bilalov və s. müəlliflərin monoqrafiyalarını, V.Milman, N.Bari, İ.Qoxberq, A.Markus və s. müəlliflərin məqalələrini misal göstərmək olar.

Ümumi mənzərənin çox cüzi bir hissəsini təsvir edən yuxarıda təqdim olunan məlumat, bazislər nəzəriyyəsinin daxili nəzəri suallarının da özlüyündə böyük maraq doğurduğunu göstərmək məqsədi daşıyır. Lakin bu nəzəriyyənin riyaziyyatın və digər təbiət elmlərinin başqa sahələrində yaranan problemlərin həlli üçün tətbiqi bu nəzəriyyənin tətbiq baxımından da əhəmiyyətli olduğunu göstərir.

Qeyd etmək lazımdır ki, bazis nəzəriyyəsinin daxili nəzəri məsələlərində, adətən, sistemlərin forması ilə bilavasitə əlaqəsi olmayan müəyyən şərtləri ödəyən sistemlərin bazis xassələri nəzərdən keçirilir; lakin tətbiqi xarakterli məsələlərdə müəyyən spesifik fəzalarda müəyyən formalı sistemlərin bazislik xassələrini öyrənmək zərurəti yaranır. Bu məsələlərdə baxılan sistemin forması sistemi yaradan məsələdən asılı olaraq dəyişir. Tətbiqi xarakterli belə məsələlərə nümunə olaraq diferensial tənliklər nəzəriyyəsində geniş istifadə olunan Furye metodunun əsaslandırılması zamanı yaranan sistemlərin bazis xassəsinin öyrənilməsi zərurəti göstərilə bilər.

Müxtəlif məsələlərdə tətbiqləri ilə əlaqədar olaraq klassik $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ eksponent, $\{\sin nt\}_{n\in N}$ sinus və $\{\cos nt\}_{n\in Z^+}$ kosinus sistemlərinin müxtəlif fəzalarda bazislik xassələri geniş şəkildə öyrənilmişdir. Lakin riyaziyyatın nəzəri xarakterli bəzi problemləri və tətbiqlərlə əlaqədar yaranan bəzi məsələlər təkcə bu sistemlərin deyil, həm də bu sistemlərin müxtəlif modifikasiyalarının bazis xassələrinin öyrənilməsini tələb edir. Məsələn, belə modifikasiya olunmuş sistemlər bəzi diferensial operatorların məxsusi funksiyalar sisteminin çəkili fəzalarda bazislik xassələrinin öyrənilməsi ilə əlaqədar tədqiq edilmişdir. Bu sistemlərin modifikasiyalarının istifadə olunduğu nəzəri məsələ kimi K.İ. Babenkonun nəticəsini də misal göstərmək olar: Babenko

$$0 < |\alpha| < \frac{1}{2}$$

olduqda

$$\{|t|^{\alpha} e^{int}\}_{n \in Z}$$

sisteminin Barinin $L_2(-\pi,\pi)$ fəzasında Riss bazisi olmayan normallaşmış Şauder bazisinin varlığı haqqında sualına müsbət cavab olduğunu göstərmişdir.

Bu nəticədən başlayaraq,

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in \mathrm{Z}},$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} \cos nt \right\}_{n \in \mathrm{Z}_+},$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} \sin nt \right\}_{n \in N}$$

formalı sistemlərin bazislik xassələrinin (tam, minimal və Şauder bazisi olma xassələri) öyrənilməsinə bir çox məqalələr həsr edilmişdir. Məsələn, müəyyən diferensial operatorların məxsusi funksiyalarının müəyyən çəkili fəzalarda bazis xassələrinin öyrənilməsi ilə əlaqədar yuxarıda göstərilən tipli sistemlər tədqiq edilmişdir.

K.İ.Babenkonun qeyd olunan nəticəsi daha sonra V.F.Qapoşkin tərəfindən genişləndirilmiş, xüsusi halda,

$$\{\omega(t)e^{int}\}_{n\in Z}$$

sisteminin $L_2(-\pi,\pi)$ fəzasında bazis olması üçün $\omega(t)$ çəki funksiyası üzərinə müəyyən kafi şərt verilmişdir. Nəhayət, $\omega(t)$ çəki funksiyası terminində, $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ sisteminin çəkili $L_{p,\omega()}(-\pi,\pi)$ fəzasında Şauder bazisi olmasını təmin edən zəruri və kafi şərt alınmışdır; bu şərt $\omega(t)$ çəki funksiyası üzəinə qoyulan Makenhoupt şərtidir:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(t)dt\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt\right)^{p-1} < \infty,$$

burada sup bütün $I\subset[-\pi,\pi]$ intervalları üzrə götürülür, $|I|$ ilə isə I intervalının uzunluğunu işarə olunur. Bu istiqamətdə olan işlərə misal olaraq B.Qapoşkin, R.Hant, B.Makenhoupt, R.Viiden, V.Yanq və s. müəlliflərin işlərini göstərmək olar.

Qeyd edək ki, çəkili $L_{p,\omega()}$ Lebeq fəzalarında sistemin bazislik xassələrinin tədqiqi müvafiq çəki ilə götürülmüş bu sistemin "adi" L_p Lebeq fəzasında analoji xassələrinin öyrənilməsinə ekvivalentdir. Ona görə də qeyd olunan bu meyara cırlaşan əmsallı

$$\{\omega(t)e^{int}\}_{n\in Z}$$

sisteminin L_p fəzasında Şauder bazisi olması üçün zəruri və kafi şərt kimi də baxıla bilər.

Bazis nəzəriyyəsinin riyaziyyatın digər sahələrində tətbiqinə misal olaraq diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində yaranan sistemlərin bazis xassəsinin öyrənilməsi zərurəti də göstərilə bilər. Məsələn,

$$-y''(t)+2\alpha\lambda y'(t)+(\alpha^2+1)\lambda^2 y(t)=0,\ \ t\in(0,\pi)$$

kvadratik dəstəsi və

$$y(0)=y(\pi)=0$$

şərtlərinin doğurduğu spektral məsələ ilə əlaqədar Kostyuçenko sistemi adlanan

$$S_\alpha^+ \equiv \{e^{i\alpha nt} \sin nt\}_{n\in \mathbb{N}}$$

sisteminin (burada $\alpha \in \mathbb{C}$, ümumiyyətlə desək, kompleks ədəddir) bazislik xassələrinin öyrənilməsi zərurəti meydana gəlir.

1969-cu ildə qoyulan və S_α^+ sisteminin $L_2(0,\pi)$ fəzasında tamlıq və minimallllığının sırf funksional metodlarla araşdırılmasını nəzərdə tutan A.Q. Kostyuçenko məsələsi diferensial operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsində yaxşı məlumdur. Bu istiqamətdə bizə məlum olan ilk nəticə 1971-ci ildə B.Ya.Levin tərəfindən alınmışdır: o, isbat etmişdir ki, ixtiyari $\alpha \in iR$ üçün S_α^+ sistemi $L_2(0,\pi)$ fəzaında tam sistemdir. Onu da qeyd edək ki, bu nəticə daha əvvəl M.Q.Cavadov tərəfindən də fərqli yanaşmadan istifadə olunaraq alınmışdır.

M.Q.Cavadovun məqaləsindən sonra S_α^+ sisteminin $L_p(0,\pi)$, $1 \le p < +\infty$, fəzalarında bazislik xassələrinin (tamlıq, minimallıq, bazislik) öyrənilməsinə bir çox məqalələr həsr olunmuşdur. Bu istiqamətdə əldə edilən nəticələrdən bəziləri aşağıdakılardır:

$$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)\}$$

olduqda S_α^+ sisteminin $L_2(0,\pi)$ fəzasında tamlıq və minimallığı üçün meyarlar alınmışdır; bu nəticələrdən, xüsusi halda, alınır ki, S_α^+ sistemi ixtiyari $\alpha \in i\mathbb{R}$, yəni ixtiyari sırf xəyali α üçün $L_2(0,\pi)$ fəzasında tam və minimaldır.

Qeyd olunan sistemin tamlığı və minimallığı bir çox işlərdə tədqiq edilmiş və demək olar ki, tamamilə öyrənilmişdir. Lakin S_α^+ Kostyuçenko sisteminin Şauder bazisi olması məsələsinin öyrənilməsi bu sistemin tamlıq və minimallığının öyrənilməsi ilə müqayisədə, bəzi səbəblərə görə, bir sıra çətinliklər yaradır; tamlıq və minimallıqla bağlı nəticələr ilə müqayisədə bu istiqamətdə çox az sayda nəticələr var. Bu nəticələrdən bəzilərini qeyd edək: kvadratik operator dəstələrinin məxsusi funksiyalarının bazisliyi üçün ümumi xarakterli nəticələrdən istifadə edərək A.Şkalikov isbat etmişdir ki,

$$\alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

olduqda S_{α}^{+} sistemi $L_2(0,\pi)$ fəzasında Riss bazisidir; L.V.Kritskov isbat etmişdir ki, $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$ olduqda S_{α}^{+} sistemi $L_2(0,\pi)$ fəzasında müntəzəm minimal (və deməli, həm də Şauder bazisi) deyil. Kostyuçenko sisteminin Şauder bazisliyinin tədqiqində ən dolğun nəticə B.Bilalova məxsusdur; Bilalov tərəfindən S_{α}^{+} sisteminin $L_2(0,\pi)$ fəzasında bazisliyi üçün bu sistemə daxil olan parametrlə bağlı meyar alınmışdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, S_{α}^{+} sistemi praktiki məsələlərdə tətbiqi baxımından da maraq doğurur. Məsələn, Kostyuçenko sisteminin bazislik xassələrinin öyrənilməsi optimal idarəetmə nəzəriyyəsi baxımından da maraqlıdır. Oxşar problemlər böyük mexaniki sistemlərin sönən rəqsləri ilə bağlı məsələlərdə də yaranır. Bu qəbildən olan problemlərlə, məsələn, A.Q. Butkovski və L.A. Muraveyin işlərində tanış olmaq olar.

Freym anlayışı, bizə məlum olduğu qədəri ilə, həyəcanlanmış eksponent sistemlər üzrə qeyri-harmonik Furye sıraları ilə bağlı bəzi məsələlərin öyrənilməsi ilə əlaqədar olaraq R.Daffin və A.Şeffer tərəfindən daxil edilmişdir. Bu işdə eksponensial sistemlərdən ibarət freymlərin bəzi xassələri müəyyən edilmişdir. Bu işdə Hilbert fəzasında abstrakt freym anlayışı da təqdim edilmiş və eksponensial freymlərin bəzi xassələri bu hala keçirilmişdir.

Ötən əsrin 80-ci illərində veyvletlərin təbiət elmlərinin müxtəlif sahələrində tətbiqi tapılmışdır. Veyvletlər siqnalların, müxtəlif təbiətli təsvirlərin (nitq, peyk şəkilləri, daxili orqanların rentgen şəkilləri və s.) işlənməsi və kodlaşdırılmasında, təsvirlərin tanınmasında, kristalların və nanoobyektlərin səthlərinin xassələrinin öyrənilməsində və bir çox başqa sahələrdə geniş istifadə olunur.

Təbiət elmlərinin müxtəlif sahələrində çoxsaylı tətbiqləri ilə əlaqədar olaraq, freym nəzəriyyəsi sürətlə inkişaf edir və ona maraq günü-gündən artmaqdadır. Freym nəzəriyyəsinə həsr olunmuş elmi işlərə misal olaraq Ç. Çui, Y. Meyer, İ. Dobeşi, S. Mallat, R. Yanq, K. Heil, O. Kristensen və s. müəlliflərin monoqrafiyalarını və P.Kazassa və s. müəlliflərin məqalələrini misal göstərmək olar.

Operator iterasiyaları ilə əldə edilən elementlər sisteminin freym xassəsinin öyrənilməsi məsələsi tətbiqi harmonik analizin nisbətən yeni tədqiqat sahəsi olan “dinamik seçmə”nin mərkəzi problemlərindən biridir. Bu yeni tədqiqat sahəsi son illərdə müxtəlif tədqiqatçılar tərəfindən əhəmiyyətli dərəcədə diqqət cəlb etmişdir (bu sahə ilə bağlı işlərlə tanış olmaq üçün, məsələn, A. Aldroubi, O. Kristensen, K. Kabrelli, A. Çakmak, U. Molter, M. Hasannasab, F. Filip, D. Stoeva və s. müəlliflərin işlərinə və bu işlərdə olan ədəbiyyatlara baxın).

Məlumdur ki, Hilbert fəzaları ilə bağlı bir sıra məsələlərin öyrənilməsində ortoqonal və ortonormal sistem anlayışları mühüm rol oynayır; həm bu sistemlərin özlərinin xassələrinin öyrənilməsi, həm də bu sistemlər vasitəsilə müxtəlif obyektlərin xassələrinin müəyyən edilməsi bu qəbildən olan məsələlərə aiddir. Məsələn, Hilbert fəzasında təsir edən kompakt operatların ortonormal sistemlər vasitəsilə Rnqrouz xarakterizasiyası bu tip məsələlərdəndir: bu xarakterizasiya bildirir ki, H Hilbert fəzasında təsir edən xətti məhdud A operatorunun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt H fəzasının elementlərindən ibarət ixtiyari $\{e_n\}$ ortonormal ardıcıllığı üçün

$$\|Ae_n\| \to 0$$

şərtinin ödənməsidir. Bu istiqamətdə C.Rinqrouz, P.Fillmor və C.Uilyams, C.Anderson və C.Stampfli, K.Muroi və K.Tamaki, D.Bakic və B.Qulyasın işləri mövcuddur.

Məlumdur ki, hər bir separabel Hilbert fəzasının ortonormal, yəni ixtiyari $n \in N$ üçün

$$\|x_n\| = 1$$

və ixtiyari $n, m \in N, n \neq m$ üçün

$$\left(x_n, x_m\right) = 0$$

şərtlərini ödəyən $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Şauder bazisi var. Burada 1-in hər hansı digər müsbət ədədlə əvəz edilməsi ilə alınan şərtləri ödəyən bazisin varlığı faktı trivialdır. Ona görə də, təbii olaraq, hər hansı iki elementi arasındakı bucaq sıfırdan fərqli eyni bir ədədə bərabər olan, yəni burada 0-ın hər hansı digər ədədlə əvəz olunması ilə alınan şərtləri ödəyən bazisin mövcudluğu ilə bağlı sual yaranır. Bu istiqamətdə bizə məlum olan ilk nəticə T.E. Xmıleva və İ.P. Buxtinaya məxsusdur. M.A. Sadıbekov və A.M. Sarsenbi, şərtsiz bazisliklə bağlı məsələyə baxaraq, sanki normallaşmış ardıcıllıqlar üçün analoji nəticə almışlar. Bazislik üçün müxtəlif abstrakt meyarların mövcud olmasına baxmayaraq, bəzən, konkret elementlər ardıcıllığının bazis olub-olmamasının yoxlanması əhəmiyyətli dərəcədə çətinlik törədir. Ona görə də asan yoxlanılan şərtlərin tapılması aktual məsələdir və qeyd olunan müəlliflərin işləri də bu baxımdan da maraqlıdır.

Dissertasiya işi bazis və freym nəzəriyyələri ilə bağlı yuxarıda qeyd olunanlar ətrafında məsələlərə həsr edilmişdir. Ona görə də hesab edirik ki, dissertasiya işinin mövzusu aktualdır və elmi maraq kəsb edir.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Lebeq fəzaları, kəsilməz funksiyalar fəzası, çəkili eksponent və çəkili triqonometrik sistemlər, ortonormal və ortonormal tip sistemlər, Kostyuçenko tip sistemlər, qüvvət sistemləri, vurma operatorunun iterasiyaları.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi Lebeq fəzalarında eksponensial və triqonometrik sistemlərin bazislik xassələri ilə bağlı çəkilərin xarakterizə olunması, Lebeq fəzalarında Kostyuçenko tipli sistemlərin bazisliyi üçün zəruri şərtlərin alınması, qüvvət şəkilli sistemlərin Lebeq və kəsilməz funksiyalar fəzalarında bazisliyinin araşdırılması, ortonormal tip sistemlərin bazislik və ayrılış xassələrinin öyrənilməsi, kompakt operatorları ortonormal sistem dilində xarakterizə edilməsi, vurma operatorlarının iterasiyalarından ibarət freymlərin öyrənilməsidir.

Tədqiqat metodları. Əsas nəticələrin alınmasında funksional analiz, bazislər nəzəriyyəsi, freymlər nəzəriyyəsi, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi, yaxınlaşma nəzəriyyəsi və harmonik analiz metodlarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

1. Eksponensial və triqonometrik sistemlərin Lebeq fəzalarında tamlıq və minimallığını təmin edən çəkilərin xarakterizasiyası;

2. Eksponensial və triqonometrik sistemlərdə artıqlıq əmələ gətirən çəkilərin xarakterizasiyası;

3. $L_p = L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, fəzalarında Kostyuçenko sistemi şəkilli

$$\left\{\varphi^n(t)\sin nt\right\}_{n\in N}$$

sistemlərinin bazisliyi üçün zəruri şərtin alınması, burada $\varphi:[a,b]\to C$ ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan funksiyadır;

4. $L_p[a,b]$ və $C[a,b]$ fəzalarında

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli sistemlərin bazisliyi məsələləri;

5. $C[a,b]$ fəzalarında

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli sistemlərin psevdo-bazisliyi məsələsi;

6. $L_2(a,b)$ fəzasında

$$T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t),\ f \in L_2(a,b)$$

vurma operatorunun

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

və

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

iterasiyalarının freymlik xassələrinin araşdırılması;

7. Hilbert fəzalarında psevdoortoqonal sistemlərin bazisliyi ilə əlaqəli bəzi məsələlər;

8. Kompakt operatorların ortonormal sistemlər vasitəsilə xarakterizasiyası.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

1. α_j dərəcələrindən ikisi Makenhoupt şərtini ödəmədiyi halda

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} e^{\text{int}} \right\}_{n \in Z}$$

şəkilli sistemlərin L_p fəzalarında tamlıq və minimallığı tam araşdırılmışdır;

2. $\{\omega(t)e^{int}\}_Z$ $\left(\{\omega(t)\cos nt\}_{n=0}^{\infty}\right)$ sistemindən element kənarlaşdırıldıqdan sonra alınan sistemin uyğun L_p fəzalarında tam və minimal olmasını təmin edən bütün $\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ $\left(\omega(t) \in L_p(0, \pi)\right)$ funksiyalar sinfi müəyyən olunmuşdur;

3. Göstərilmişdir ki, $\{\varphi_n(t)\}$ sistemi klassik sinus sistemi olduqda, təbii

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0$$

şərti daxilində, ixtiyari n üçün $\omega(t)\varphi_n(t) \in L_p$ olmasından $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ sisteminin L_p fəzasında tam sistem olması alınır. Bundan əlavə, isbat olunmuşdur ki, klassik ekponensial və kosinus sistemləri üçün də analoqlarının doğruluğu yaxşı məlum olan bu fakt ümumi halda, ixtiyari tam və ya ixtiyari tam ortonormal sistemlər üçün, doğru deyildir;

4. Elə $\omega(t) \in L_p(0, \pi)$ çəki funsiyaları tapılmışdır ki, bu çəkilər üçün

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n \in Z_+}$$

sistemi $L_p(0,\pi)$ fəzasında tam sistemdir, lakin nə bu sistem, nə də bu sistemdən sonlu sayda element kənarlaşdırılmaqla alınan heç bir sistem $L_p(0,\pi)$ fəzsında tam və eyni zamanda minimal olan sistem deyil;

5. Kostyuçenko sistemi şəkilli

$$\left\{\varphi^n(t)\sin nt\right\}_{n\in N},$$

$$\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n\in N\cup\{0\}}$$

sistemlərinin L_p $(1\leq p<+\infty)$ fəzalarında bazisliyi üçün zəruri şərt tapılmışdır; bu şərtdən, xüsusi halda,

$$\{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\in\mathrm{N}}$$

Kostyuçenko sisteminin L_p fəzalarında bazisliyi üçün zəruri şərt alınır;

6. Ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan ixtiyari $\varphi(t)$ funksiyası üçün

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli sistemlərin $L_p[a,b]$ fəzalarında Şauder bazisi olmadığı isbat olunmuşdur;

7. Həqiqi və ya kompleks qiymətli ixtiyari $\varphi(t)$ kəsilməz funksiyası üçün

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli ardıcıllığın $C[a,b]$ fəzasında Şauder bazisi olmaması göstərilmişdir;

8. İxtiyari $\varphi(t)$ kəsilməz funksiyası üçün

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli ardıcıllığın $C[a,b]$ fəzasında psevdo-bazis olmaması göstərilmişdir;

9. $L_2(a,b)$ fəzasında

$$T_{\varphi} f(t) = \varphi(t) f(t), \ f \in L_2(a,b)$$

vurma operatorunun

$$\left\{T_{\varphi}^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

və

$$\left\{T_{\varphi}^n f\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

iterasiyalarının freymlik xassələri araşdırılmışdır; Göstərilmişdir ki, heç bir ölçülən $\varphi(t)$ doğuran funksiyası və $f \in L_2(a,b)$ üçün T_{φ} vurma operatorunun

$$\left\{T_{\varphi}^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

orbiti $L_2(a,b)$ fəzasında freym təşkil edə bilməz. T_{φ} vurma operatorunun iterasiyalarından ibarət

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

şəkilli freymlərin xarakterizasiyası verilmişdir. Göstərilmişdir ki, bu məsələ aşağıdakı məsələnin həllinə gətirilə bilər:

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

sisteminin $L_2(a,b)$ *fəzasında freym olmasını təmin edən həqiqiqiymətli bütün* $\alpha(t)$ *funksiyalarını tapın (və ya bu şərti ödəyən* $\alpha(t)$ *funksiyalar sinfini təsvir edin).*

Bu məsələyə qismən cavab verilmişdir.

10. Hilbert fəzasında ixtiyari iki elemeni arasındakı bucaq sıfırdan fərqli eyni bir ədədə bərabər olan ardıcıllıqların və ixtiyari $k, m \in N, k \neq m$ üçün

$$\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$$

şərtini ödəyən məhdud $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ alt ardıcıllığına malik $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllıqlarının bazislik və ayrılış xassələri öyrənilmişdir;

11. Kompakt operatorların ortonormal ardıcıllıqlar vasitəsilə Rinqrouz xarakterizasiyasının qısa və sadə isbatı verilmişdir.

Dissertasiyda təqdim olunan isbat bu teoremin hökmünün Hilbert fəzasından ixtiyari (ümumiyyətlə desək Hilbert olmayan) Banax fəzasına təsir edən operatorlar halında da doğru qaldığını göstərir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işi nəzəri xarakter daşıyır. Onun nəticələrindən yaxınlaşma nəzəriyyəsində, freymlər nəzəriyyəsində, diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, diferensial tənliklərin həllində Furye metodunun əsaslandırılması üçün və s. istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Qeyri-harmonik analiz” şöbəsinin elmi seminarlarında (AMEA-nın müxbir üzvü, professor B.T.Bilalov), “Funksional analiz” şöbəsinin seminarlarında (f-r.e.d., professor N.Ş. İsgəndərov), AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ümuminstitut seminarında məruza edilmiş və müxtəlif beynəlxalq elmi konfrans materiallarında dərc olunmuşdur.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Dissertasiyada alınan bütün nəticələr müəllifin şəxsi töhfəsidir.

Nəşrlər. Dissertasiyanın əsas nəticələri 27 işdə çap olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilat. Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Qeyri-harmonik analiz" şöbəsi.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 378927 işarə (titul səhifəsi – 433 işarə, mündəricat – 2494 işarə, giriş – 66000 işarə, birinci fəsil– 68000 işarə, ikinci fəsil – 122000 işarə, üçüncü fəsil –54000 işarə, dördüncü fəsil -38000 işarə, beşinci fəsil–26000 işarə, nəticə – 2000 işarə). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 139 addan ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiya mövzusu ilə əlaqədar işlərin xülasəsi verilir və işin qısa məzmunu şərh olunur.

Əvvəl bəzi tərifləri xatırladaq:

Tərif 1. *Tutaq ki,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - X *Banax fəzasının elementlərindən ibarət ardıcıllıqdır və ixtiyari* $x \in X$ *elementi üçün elə yeganə* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ədədlər ardıcıllığı var ki,*

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \ldots$$

bərabərliyi ödənilir. Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığına* X *Banax fəzasının Şauder bazisi deyilir.*

Tərif 2. *Tutaq ki,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - X *Banax fəzasının elementlərindən ibarət ardıcıllıqdır və bu ardıcıllıq öz xətti örtüyünün qapanmasında Şauder bazisidir. Onda* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığına* X *fəzasında bazis ardıcıllıq deyilir.*

Tərif 3. *Tutaq ki,* $\{x_n\}_{n \in N}$ - B *Banax fəzasının elementlərindən ibarət sistemdir və elə* $\delta > 0$ *ədədi var ki, ixtiyari* $k \in N$ *üçün*

$$\inf_{y \in B_k} \|x_k - y\| \geq \delta \|x_k\|$$

şərti ödənir, burada B_k *ilə* $\{x_n\}_{n \in N, n \neq k}$ *sisteminin xətti örtüyünün qapanması işarə olunmuşdur. Onda* $\{x_n\}_{n \in N}$ *sisteminə* B *fəzasında müntəzəm minimal sistem deyilir.*

Tərif 4. *Tutaq ki,* B *Banax fəzasının elementlərindən ibarət* $\{x_n^+, x_n^-\}_{n \geq 0}$ *"ikiqat" sistemi verilmişdir və ixtiyari* $x \in B$ *üçün elə yeganə* $\{a_n^+, a_n^-\}_{n \geq 0}$ *ədədlər ardıcıllığı var ki,* $N^+, N^- \to \infty$ *olduqda*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N^+} a_n^+ x_n^+ + \sum_{n=0}^{N^-} a_n^- x_n^- - x \right\| \to 0.$$

Onda $\{x_n^+, x_n^-\}_{n\geq 0}$ *"ikiqat" sisteminə* B *Banax fəzasının bazsisi deyilir.*

Tərif 5. *Tutaq ki,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *-* X *Banax fəzasının elementlərindən ibarət, elementləri* $x_n \neq 0$ *şərtini ödəyən ardıcıllıqdır və ixtiyari* $x \in X$ *elementi üçün elə* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ədədlər ardıcıllığı var ki,*

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \ldots$$

bərabərliyi ödənilir. Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığına* X *Banax fəzasında psevdo-bazis deyilir.*

Aydındır ki, hər bir Şauder bazisi psevdo-bazisdir, bu hökmün tərsi isə, ümumiyyətlə desək, doğru deyil. Xüsusi halda, məlumdur ki, hər bir separabel Banax fəzasında psevdo-bazis mövcuddur, lakin, məlumdur ki, Şauder bazisi olmayan separabel Banax fəzaları da mövcuddur.

Tərif 6. *Tutaq ki,* $\{x_n\}_{n\in N}$ *-* H *Hilbert fəzasının elementlərindən ibarət sistemdir və elə* $A, B > 0$ *ədədləri var ki, ixtiyari* $x \in H$ *üçün*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Onda $\{x_n\}_{n\in N}$ *sistemi* H *fəzasında freym adlanır.* $A = B$ *olarsa,* $\{x_n\}_{n\in N}$ *freyminə* A*- sərt freym deyilir.*

Birinci fəsil müəyyən şəkilli çəkili eksponensial sistemlərin Lebeq fəzalarında bazislik (tamlıq, minimallıq, Şauder bazisliyi) xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu fəsil üç paraqrafdan ibarətdir.

1.1

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$$

şəkilli sistemlərin $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, fəzalarında tamlıq və minimallığının öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu paraqrafda

$$\left\{ \omega(t) e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z} \tag{1}$$

şəkilli sistemə baxılır, burada

$$\omega(t) = \left| t - t_1 \right|^{\alpha_1} \left| t - t_2 \right|^{\alpha_2} \prod_{j=3}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} ,$$

$$t_j \in [-\pi, \pi], \; 1 \le j \le r$$

və

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q} \right),$$

$$\alpha_j \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right), \; 3 \le j \le r.$$

Q ilə bütün rasional ədədlər çoxluğunu işarə edəcəyik.

Teorem 1.

$$\left\{ \left| t - t_1 \right|^{\alpha_1} \left| t - t_2 \right|^{\alpha_2} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$$

sisteminə baxaq, burada

$$t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$$

və

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q} \right).$$

Onda

1) $\dfrac{t_2 - t_1}{\pi} \notin Q$ *olarsa, ixtiyari* k_1 *və* k_2 *ədədləri üçün*

$$\left\{ |t-t_1|^{\alpha_1} |t-t_2|^{\alpha_2} e^{\text{int}} \right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistemdir;*

2) $|t_2 - t_1| = 2\pi$ *olarsa, ixtiyari* k_0 *ədədi üçün*

$$\left\{ |t-t_1|^{\alpha_1} |t-t_2|^{\alpha_2} e^{\text{int}} \right\}_{n\in Z/\{k_0\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistemdir;*

3) $t_2 - t_1 = 2\pi \dfrac{k}{m}$, $m \neq 1$ *və* $(k,m)=1$ *olarsa, yalnız və yalnız* $k_2 \neq k_1 (\text{mod } m)$ *olduqda*

$$\left\{ |t-t_1|^{\alpha_1} |t-t_2|^{\alpha_2} e^{\text{int}} \right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistemdir.*

Bu teoremin dissertasiyada verilən isbatı daha ümumi növbəti hökmün də doğru olduğunu göstərir.

Teorem 2. *Tutaq ki,* (1) *sistemi verilmişdir. Onda*

1) $\dfrac{t_2 - t_1}{\pi} \notin Q$ *olarsa, ixtiyari* k_1 *və* k_2 *ədədləri üçün*

$$\left\{ \omega(t) \cdot e^{\text{int}} \right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistemdir;*

2) $|t_2 - t_1| = 2\pi$ *olarsa, ixtiyari* k_0 *ədədi üçün*

$$\left\{ \omega(t) \cdot e^{\text{int}} \right\}_{n\in Z/\{k_0\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistemdir;*

3) $t_2 - t_1 = 2\pi \dfrac{k}{m}$, $m \neq 1$ *və* $(k,m)=1$ *olarsa, yalnız və yalnız* $k_2 \neq k_1 (\text{mod } m)$ *olduqda*

$$\left\{\omega(t)\cdot e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistemdir.*

1.2-də

$$\left\{\omega(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$$

sisteminin elementlərindən biri kənarlaşdırıldıqdan sonra alınan sistemin $L_p(-\pi,\pi), 1<p<\infty,$ fəzasında tam və minimallığını təmin edən $\omega(t)\in L_p(-\pi,\pi)$ çəkilər sinfinin müəyyənləşdirilməsi məsələsinə baxılmışdır.

Bu paraqrafın məqsədi aşağıdakı faktı isbat etməkdir.

Teorem 3. *Tutaq ki,* k_0 *ixtiyari tam ədəddir. Onda*

$$\left\{\omega(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_0\}}$$

sisteminin $L_p(-\pi,\pi),\ 1<p<\infty,$ *fəzasında tam və minimal olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\omega(t)\in L_p(-\pi,\pi),$$

$$\frac{1}{\omega(t)}\notin L_q(-\pi,\pi)$$

və əlavə olaraq

1) *elə (yeganə)* $t_0\in[-\pi,\pi]$ *nöqtəsi var ki,*

$$\frac{t-t_0}{\omega(t)}\in L_q(-\pi,\pi);$$

və ya

2) $\dfrac{(t-\pi)(t+\pi)}{\omega(t)}\in L_q(-\pi,\pi)$

şərtlərinin ödənməsidir.

Bu teoremdən bilavasitə aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 1. *Tutaq ki,*

$$\left\{\omega(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$$

sistemindən hər hansı bir element kənarlaşdırıldıqda alınan sistem $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimaldır. Onda bu sistemdən ixtiyari element kənarlaşdırılmaqla alınan sistem də* $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam və minimal sistem olar.*

1.3-də

$$\left\{\omega(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$$

sistemindən müəyyən sayda elementlər kənarlaşdırıldıqdan sonra alınan sistemin Lebeq fəzalarında Şauder bazisliyi məsələsinə baxılmışdır.

Bu paraqrafın məqsədi aşağıdakı faktı isbat etməkdir.

Teorem 4. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *ixtiyari ölçülən funksiya,* $n_1,..., n_k$ *hər hansı tam ədədlərdir. Onda*

$$\{\omega(t)e^{int}\}_{n\in Z/\{n_1,...,n_k\}}$$

sistemi $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, *fəzasında Şauder bazisi deyil.*

Qeyd edək ki, dissertasiyada verilən isbatların müstəqil isbatlar olmasına baxmayaraq, bu teoremin və Paraqraf 2.3-də verilən hökmün doğruluğu K.S.Kazaryan tərəfindən dərc etdirilmiş daha ümumi oxşar faktdan nəticə kimi də alınır; bu nəticə dissertasiyanın müdafiəsinə təqdim olunmuş müddəalar siyahısında verilməmişdir və dissertasiyada müzakirə olunan artıqlığı olan eksponensial və triqonometrik sistemlərin tamlıq və minimallığı araşdırıldıqdan sonra təbii olaraq meydana çıxan bazislik sualına aydınlıq gətirmək məqsədi ilə verilmişdir.

İkinci fəsil ümumi çəkili triqonometrik (sinus, kosinus) sistemlərin bazislik (tamlıq, minimallıq, Şauder bazisliyi) xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu fəsil dörd paraqrafdan ibarətdir.

2.1-də cırlaşan sinus sistemlərinin tamlıq xassəsinin araşdırılması məsələsinə baxılmışdır.

Teorem 5. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *funksiyası* $(0,\pi)$ *aralığında təyin olunmuş hər hansı ölçülən funksiyadır, belə ki,*

1) $mes\{t:\omega(t)=0\}=0$

və

2) $\omega(t) sinnt \in L_p(0,\pi), \forall n \in N$.

Onda

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$$

sistemi $L_p(0,\pi)$ *fəzasında tam sistemdir.*

Qeyd edək ki, bu fakt və klassik eksponensial və kosinus sistemləri üçün yaxşı məlum olan analoji nəticə göstərir ki, $\{\varphi_n(t)\}$ sistemi eksponensial və ya triqonometrik sistemlər olduqda

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

və ixtiyari n üçün $\omega(t)\varphi_n(t)$ uyğun fəzaya daxil olarsa, onda $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ sistemi, uyğun olaraq, $L_p(-\pi,\pi)$ və ya $L_p(0,\pi)$ fəzasında tam sistem olar. Bu nəticə elə təəssurat yarada bilər ki, ixtiyari $\{\varphi_n(t)\}$ tam sistemi üçün

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

və ixtiyari n üçün

$$\omega(t)\varphi_n(t)\in L_p(a,b)$$

olmasından $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ sisteminin $L_p(a,b)$ fəzasında tamlığı alınır. Dissertasiyada göstərilmişdir ki, bu, ümumi halda, belə deyildir.

Teorem 6. $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam olan elə* $\{\varphi_n(t)\}$ *sistemi və ölçülən elə* $\omega(t)$ *funksiyası var ki,*

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

və ixtiyari n üçün

$$\omega(t)\varphi_n(t)\in L_p(-\pi,\pi),$$

lakin $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ *sistemi* $L_p(-\pi,\pi)$ *fəzasında tam sistem deyil.*

Bu teoremin isbatından və Şmidt ortoqonallaşdırma prosesindən istifadə edərək aşağdakı faktın doğru olduğunu göstərmək olar.

Teorem 7. *$L_2(-\pi,\pi)$ fəzasında tam olan elə $\{\varphi_n(t)\}$ ortonormal sistemi və ölçülən elə $\omega(t)$ funksiyası var ki,*

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

və ixtiyari n üçün

$$\omega(t)\varphi_n(t)\in L_2(-\pi,\pi),$$

lakin $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ sistemi $L_2(-\pi,\pi)$ fəzasında tam sistem deyil.

Bu nəticələrdən əlavə,

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$$

sisteminin $L_p(0,\pi)$ fəzasında tam sistem olmasını təmin edən $\omega(t)$ çəkilərinin ən geniş sinfinin təsvirləri verilmişdir:

Teorem 8. *$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$ sisteminin $L_p(0,\pi)$ fəzasında tam sistem olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$t(t-\pi)\omega(t)\in L_p(0,\pi)$$

və

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

münasibətlərinin ödənməsidir.

Teorem 9. *$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$ sisteminin $L_p(0,\pi)$ fəzasında tam sistem olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\omega(t)\sin t\in L_p(0,\pi)$$

və

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

münasibətlərinin ödənməsidir.

2.2-də

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$$

sisteminin elementlərindən biri kənarlaşdırıldıqdan sonra alınan sistemin $L_p(0,\pi)$, $1<p<\infty$, fəzasında tam və minimallığını təmin edən bütün $\omega(t)$ çəkilər sinfinin müəyyənləşdirilməsi məsələsinə baxılmışdır.

Sadəlik üçün

$$R_k = \{t : t \in [0, \pi],\ \cos kt = 0\}$$

işarələməsindən istifadə edəcəyik.

Teorem 10. *Tutaq ki,* $k_0 \in Z_+$ *hər hansı ədəddir.*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n \in Z_+ / \{k_0\}}$$

sisteminin $L_p(0,\pi),\ 1 < p < \infty,$ *fəzasında tam və minimal sistem olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\omega(t) \in L_p(0,\pi),$$

$$\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(0,\pi)$$

və əlavə olaraq aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənməsidir:

1) $\dfrac{t^2}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$,

və ya

2) $\dfrac{(t-\pi)^2}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$,

və ya

3) *elə (yeganə)* $t_0 \in (0,\pi)$ *nöqtəsi var ki,* $t_0 \notin R_{k_0}$ *və*

$$\frac{t - t_0}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi).$$

Təklif 1. *Tutaq ki,* $\omega(t) \in L_p(0,\pi)$ *və* $t_0 \in (0,\pi)$ *elə nöqtədir ki,*

$$\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(0,\pi)$$

və

$$\frac{t - t_0}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$$

şərtləri ödənir. Onda $t_0 \in R_{k_0}$ *olarsa,*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+/\{k_0\}}$$

sistemi $L_p(0,\pi)$ *fəzasında nə tam, nə də minimal sistem deyil.*

Bu faktların nəticəsi olaraq, aşağıdakı faktın doğru olduğunu alarıq:

Nəticə 2. $\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$ *sistemindən ixtiyari elementi kənarlaşdırmaqla alınan sistemin* $L_p(0,\pi)$, $1<p<\infty$, *fəzasında tam və minimal sistem olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\frac{1}{\omega(t)}\notin L_q(0,\pi)$$

və əlavə olaraq aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənməsidir:

1) $\dfrac{t^2}{\omega(t)}\in L_q(0,\pi)$;

2) $\dfrac{(t-\pi)^2}{\omega(t)}\in L_q(0,\pi)$;

3) *elə* $t_0\in(0,\pi)$ *nöqtəsi var ki,*

$$t_0\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k$$

və

$$\frac{t-t_0}{\omega(t)}\in L_q(0,\pi).$$

2.3-də artıqlığa malik ümumi çəkili cırlaşan triqonometrik sistemlərin Şauder bazisliyi məsələsinə baxılmışdır.

Bu paraqrafın birinci hissəsinin əsas nəticəsini isbat etmək üçün bəzi köməkçi faktlardan istifadə olunur. Belə faktlardan biri aşağıdakıdır:

Lemma 1. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *funksiyası* $L_p(0,\pi)$, $1\le p<\infty$, *fəzasından olan trivial olmayan hər hansı funksiyadır. Onda*

$$\inf_{n\in Z_+}\|\omega(t)\cos nt\|_{L_p}\neq 0.$$

Teorem 11. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *hər hansı ölçülən funksiya,* $k_0 \in Z_+$ *isə hər hansı mənfi olmayan tam ədəddir. Onda*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+/\{k_0\}}$$

ardıcıllığı $L_p(0,\pi)$, $1 < p < \infty$, *fəzasında Şauder bazisi deyil.*

2.3-ün ikinci hissəsi cırlaşan sinus sistemlərinin Şauder bazisliyinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Bu hissənin əsas nəticəsini isbat etmək üçün aşağıdakı köməkçi faktdan istifadə olunmuşdur:

Lemma 2. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *funksiyası* $[0,\pi]$ *aralığında təyin olunmuş və ixtiyari* $n \in N$ *üçün*

$$\omega(t)\sin nt \in L_p(0,\pi), 1 < p < \infty,$$

şərtlərini ödəyən trivial olmayan hər hansı funksiyadır. Onda

$$\inf_{n\in N}\|\omega(t)\sin nt\|_{L_p(0,\pi)} \neq 0.$$

Teorem 12. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *ixtiyari ölçülən funksiya,* k_0 *ixtiyari natural ədəddir. Onda*

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N/\{k_0\}}$$

ardıcıllığı $L_p(0,\pi)$ *fəzasında Şauder bazisi deyil.*

2.4-də elə $\omega(t) \in L_p(0,\pi)$ çəki funsiyaları göstərilmişdir ki, bu çəkilər üçün

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$$

tam sistemdir, lakin nə bu sistem, nə də bu sistemdən sonlu sayda element kənarlaşdırılmaqla alınan heç bir sistem $L_p(0,\pi)$ fəzsında tam və eyni zamanda minimal olan sistem deyil.

Teorem 13. *Tutaq ki,* $\omega(t)$ *funksiyası* $[0,\pi]$ *parçasında təyin olunmuş, sıfır nöqtəsində sonsuz diferensiallanan,*

$$\omega^{(n)}(0) = 0, \ \forall n \in Z_+,$$

və sanki hər yerdə $\omega(t) \neq 0$ *şərtlərini ödəyən kəsilməz funksiyadır. Onda*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$$

sistemi $L_p(0,\pi)$ *fəzasında tamdır, minimal deyil və bu sistemdən sonlu sayda element kənarlaşdırmaqla alınan heç bir sistem* $L_p(0,\pi)$ *fəzasında tam və eyni zamanda minimal sistem deyil.*

Məlumdur ki, $[0,\pi]$ parçasında təyin olunmuş, sıfır nöqtəsində sonsuz diferensiallanan,

$$\omega^{(n)}(0)=0,\ \forall n\in Z_+,$$

və sanki hər yerdə $\omega(t)\neq 0$ şərtlərini ödəyən kəsilməz funksiyalar çoxluğu boş çoxluq deyil. Məsələn,

$$\omega(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t\neq 0 \text{ olarsa;}\\ 0, & t=0 \text{ olarsa.}\end{cases}$$

funksiyası bütün bu şərtləri ödəyir.

Üçüncü fəsil

$$\{A(t)\varphi^n(t);B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n\geq 0},$$

şəkilli ikiqat sistemlərin,

$$\{\varphi^n(t)\sin nt\}_{n\in N},$$

$$\{\varphi^n(t)\cos nt\}_{n\in N\cup\{0\}},$$

şəkilli sistemlərin və

$$\{\varphi^n(t)\}_{n\in N},$$

şəkilli sistemlərin kəsilməz funksiyalar fəzalarında və $L_p=L_p(a,b)$ $1\leq p<\infty$, fəzalarında bazis və ayrılış xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu fəsil beş paraqrafdan ibarətdir.

3.1

$$\{A(t)\varphi^n(t);B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n\geq 0}$$

şəkilli ikiqat qüvvət sistemlərinin Lebeq fəzalarında bazis olması üçün zəruri şərtlərə həsr olunmuşdur.

Aşağıdakı kimi funksiyalar sisteminə baxaq:

$$\left\{A(t)\varphi^{n}(t);B(t)\overline{\varphi}^{n}(t)\right\}_{n\geq 0}. \qquad (2)$$

Tutaq ki, $A(t)$, $B(t)$ və $\varphi(t)$ funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

1) $|A(t)|, |B(t)|$ funksiyaları (a,b) aralığında təyin olunmuş elə ölçülən funksiyalardır ki,

$$\sup vrai\left\{|A(t)|^{\pm 1}, |B(t)|^{\pm 1}\right\} < \infty;$$

2) $\varphi(t)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır.

Teorem 14. *Tutaq ki,* $A(t), B(t)$ *və* $\varphi(t)$ *funksiyaları* 1) *və* 2) *şərtlərini ödəyirlər və* (2) *sistemi* L_p *fəzasında bazisdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında* $|\varphi(t)| \equiv const$.

Tutaq ki, I və J ilə boş və ya sonlu çoxluq işarə olunmuşdur və

$$A_1(t) = A(t)\prod_{i\in I}\left|t-\xi_i\right|^{\alpha_i},\ t\in[a,b],$$

$$B_1(t) = B(t)\prod_{j\in J}\left|t-\theta_j\right|^{\beta_j},\ t\in[a,b],$$

burada $A(t), B(t)$ funksiyaları üçün 1) şərti ödənir, $\xi_i\,(i\in I)$, $\theta_j\,(j\in J)$ - $[a,b]$ parçasından olan hər hansı ədədlərdir və $\alpha_i\,(i\in I)$, $\beta_j\,(j\in J)$ - hər hansı ədədlərdir.

Teorem 14-ün aşağıdakı ümumiləşməsi də doğrudur.

Teorem 15. *Əgər*

$$\left\{A_1(t)\varphi^{n}(t);B_1(t)\overline{\varphi}^{n}(t)\right\}_{n\geq 0},$$

sistemi L_p *fəzaında bazisdirsə, onda* $[a,b]$ *parçasında* $|\varphi(t)| \equiv const$.

Bu nəticələr çəkili $L_{p,\rho(t)}(a,b), 1 \le p < \infty,$ fəzaları üçün də analoji nəticələri almağa imkan verir. Növbəti teoremdə $\rho(t)$ funksiyası olaraq sonlu sayda cırlaşma nöqtəsinə malik

$$\rho(t) \equiv \prod_{i \in I} |t - \mu_i|^{\omega_i} ,$$

şəkilli funksiya götürülür, burada μ_i ədədləri $[a,b]$ parçasına daxil olan hər hansı nöqtələr, ω_i isə hər hansı sabitlərdir.

Teorem 16. *Tutaq ki,* (2) *sistemi* $L_{p,\rho(t)}(a,b)$ *fəzasında bazisdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında* $|\varphi(t)| \equiv const$.

Qeyd edək ki, 3.3-də istifadə olunan yanaşmadan görünür ki, 3.1-in nəticələri daha ümumi şərtlər daxilində də öz qüvvəsində qalır: 3.1-də $\varphi(t)$ funksiyaının kəsilməz funksiya olduğu fərz olunur, lakin bu paraqrafın bütün nəticələri $\varphi(t)$ funksiyasının ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan funksiya olduğu halda da doğrudur.

3.2

$$\left\{ e^{i\alpha nt} \sin nt \right\}_{n \in N} ,$$

Kostyuçenko sistemi və daha ümumi şəkilli

$$\left\{ \varphi^n(t) \sin nt \right\}_{n \in N} ,$$

sisteminin $L_p = L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty,$ fəzasında bazis olması üçün zəruri şərtlərin araşdırılmasına həsr olunmuşdur, burada $\varphi : [a,b] \to C$ ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan funksiyadır.

Teorem 17. *Tutaq ki,*

$$\left\{ \varphi^n(t) \sin nt \right\}_{n \in N}$$

sistemi L_p *fəzasında bazisdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında sanki hər yerdə* $|\varphi(t)| \equiv const$.

Bu teoremin isbatı üçün aşağıdakı köməkçi faktdan istifadə olunur.

Lemma 3. *Tutaq ki,* $E \subset [a,b]$ *- ölçülən çoxluqdur və natural ədədlərlərin elə* $\{n_k\}$ *alt ardıcıllığı və elə* p $(1 \le p < \infty)$ *ədədi var ki,* $k \to \infty$ *olduqda*

$$\int_E |\sin n_k t|^p \, dt \to 0.$$

Onda $mesE = 0.$

Qeyd edək ki, analoji lemma kosinuslar sistemi üçün də doğrudur.

Lemma 4. *Tutaq ki,* $E \subset [a,b]$ *- ölçülən çoxluqdur və natural ədədlərin elə* $\{n_k\}$ *alt ardıcıllığı var ki,* $k \to \infty$ *olduqda*

$$\int_E |\cos n_k t|^p \, dt \to 0.$$

Onda $mesE = 0.$

Lemma 3 əvəzinə Lemma 4-ü istifadə edərək analoji nəticənin

$$\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n \in N \cup \{0\}}$$

sistemi üçün də doğru olduğunu alarıq.

Teorem 18. *Tutaq ki,*

$$\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n \in N \cup \{0\}}$$

sistemi L_p *fəzasında bazisdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında sanki hər yerdə* $|\varphi(t)| \equiv const.$

Bu nəticələrdən, xüsusi halda, S_α^+ və

$$C_\alpha^+ = \left\{e^{i\alpha nt}\cos nt\right\}_{n \in N \cup \{0\}}$$

sistemləri üçün bütün L_p fəzalarını əhatə edən aşağıdakı faktın doğruluğu alınır.

Nəticə 3. *Tutaq ki,* $\mathrm{Im}\alpha \ne 0.$ *Onda* S_α^+ *və* C_α^+ *sistemləri* L_p *fəzasında bazis deyil.*

3.3-də

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

qüvvət sistemlərinin L_p fəzalarında bazisliyi məsələsinə baxılır.

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 19. *Ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan heç bir $\varphi(t)$ funksiya üçün*

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

ardıcıllığı L_p fəzasında bazis ola bilməz.

Qeyd edək ki, 3.3-də istifadə olunan yanaşmadan görünür ki, 3.1-in nəticələri daha ümumi şərtlər daxilində də öz qüvvəsində qalır: 3.1-də $\varphi(t)$ funksiyaının kəsilməz funksiya olduğu fərz olunur, lakin bu paraqrafın bütün nəticələri $\varphi(t)$ funksiyasının ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan funksiya olduğu halda da doğrudur.

3.4-də

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli sistemlərin $C[a,b]$ kəsilməz funksiyalar fəzasında bazis olması məsələsinə baxılmışdır.

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı kimidir:

Teorem 20. $[a,b]$ *parçasında təyin olunmuş heç bir* $\varphi(t)$ *kəsilməz funksiyası üçün*

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

ardıcıllığı $C[a,b]$ *kəsilməz funksiyalar fəzasında bazis ola bilməz.*

3.5 $\varphi(t)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş ixtiyari kəsilməz funksiya olduğu halda

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

sisteminin $C[a,b]$ fəzasında hətta psevdo-bazis olmamasının göstərilməsinə həsr olunmuşdur.

Teorem 21. $[a,b]$ *parçasında təyin olunmuş heç bir* $\varphi(t)$ *kəsilməz funksiyası üçün*

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

ardıcıllığı $C[a,b]$ *fəzasında psevdo-bazis ola bilməz.*

Dördüncü fəsil

$$T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t), \ f \in L_2(a,b),$$

vurma operatorunun iterasiyalarından ibarət sistemlərin freymlik xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu fəsil iki paraqrafdan ibarətdir.

4.1-in əsas məqsədi heç bir ölçülən $\varphi(t)$ doğuran funksiyası və heç bir $f \in L_2(a,b)$ funksiyası üçün

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^\infty$$

orbitinin $L_2(a,b)$ fəzasında freym ola bilmədiyini göstərməkdir.

Aşağıdakı faktlar bu paraqrafın əsas nəticəsinin isbatında həlledici rol oynayır.

Lemma 5. *Tutaq ki,* φ *və* f *hər hansı ölçülən funksiyalardır və*

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^\infty$$

ardıcıllığı $L_p(a,b), \ 1 \le p < \infty,$ *fəzasında psevdo-bazisdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında sanki hər yerdə* $|\varphi(t)| \equiv const.$

Lemma 6. *Tutaq ki,* φ *və* f *hər hansı ölçülən funksiyalardır və*

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^\infty$$

sistemi $L_2(a,b)$ *fəzasında freymdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında sanki hər yerdə* $|\varphi(t)| \equiv 1.$

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakıdır:

Teorem 22. *Tutaq ki,* φ *və* f *hər hansı ölçülən funksiyalardır. Onda*

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^\infty$$

sistemi $L_2(a,b)$ *fəzasında freym ola bilməz.*

Xüsusi halda bu teoremdən alınır ki,

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli sistem $L_2(a,b)$ fəzasında freym ola bilməz. Klassik eksponensial sistemdən göründüyü kimi

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

sistemi əvəzinə

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

şəkilli sistemə baxıldqda vəziyyət tamamilə dəyişilir.

4.2

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

şəkilli freymlərin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu paraqrafın əsas nəticələrindən biri aşağıdakıdır:

Teorem 23. *Tutaq ki,* $\varphi(t)$ - $[a,b]$ *parçasında ölçülən funksiyadır və*

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

sistemi $L_2(a,b)$ *fəzasında freymdir. Onda* $[a,b]$ *parçasında sanki hər yerdə* $|\varphi(t)|=1$, *yəni* $\varphi(t)$ *funksiyası*

$$\varphi(t)=e^{i\alpha(t)}$$

şəkilli funksiyadır, burada $\alpha(t)$ *həqiqi qiymətli funksiyadır.*

Bu faktdan görünür ki, $L_2(a,b)$ fəzasında

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

şəkilli freymlərin öyrənilməsi məsələsi

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

şəkilli sistemlərin $L_2(a,b)$ fəzasında freym olmasını təmin edən həqiqiqiymətli $\alpha(t)$ funksiyalar sinfinin təyini məsələsinə ekvivalentdir.

Bu paraqrafda $\alpha(t)$ funksiyası üzərinə

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

sisteminin $L_2(a,b)$ fəzasında freym olmasını təmin edən kafi şərtlər verməklə, bu məsələyə qismən cavab verilmişdir.

Teorem 24. *Tutaq ki,* $[a,b]$ *parçasında təyin olunmuş* $\alpha(t)$ *funksiyası tərsi olan funksiyadır və bu funksiyanın* $\xi:[p,q]\to[a,b]$ *tərs funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:*

1) $\xi(t)$ *funksiyası* $[p,q]$ *parçasında ciddi artan mütləq kəsilməz funksiyadır,* $\xi(p)=a$ *və* $\xi(q)=b$ *;*

2) *elə* $A,B>0$ *sabitləri var ki,* $[p,q]$ *parçasında sanki hər yerdə* $A\le\xi'(t)\le B$*;*

3) $|p-q|\le 2\pi$ *;*

Onda

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

sistemi $L_2(a,b)$ *fəzasında freymdir.*

Misal 1. Tutaq ki, $a=0,\ b=2\pi$ və $\alpha(t)=\sqrt{t+1}$. Onda, asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\alpha(t)$ funksiyası üzərinə qoyulan bütün şərtlər ödənir. Deməli,

$$\left\{e^{in\sqrt{t+1}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

sistemi $L_2(0,2\pi)$ fəzaında freymdir.

Aşağıdakı misal Teorem 24-də 2) şərtinin əhəmiyyətini göstərir:

Misal 2. Teorem 24-dəki 2) şərtini ödəməyən

$$\left\{e^{in\sqrt{t}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

sistemi $L_2(0,2\pi)$ fəzasında freym deyil.

Aşağıdakı misal Teorem 24-də 3) şərtinin əhəmiyyətini göstərir:

Misal 3. Teorem 24-dəki 3) şərtini ödəməyən

$$\left\{e^{in(2t+1)}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

sistemi $L_2(0,2\pi)$ fəzasnda tam və deməli, həm də freym deyil.

Beşinci fəsil ortonormal tip müəyyən sistemlərin bazislik və ayrılış xassələrinin öyrənilməsinə və kompakt operatorların ortonormal ardıcıllıqlar vasitəsilə xarakterizasiyasına həsr olunmuşdur.

Bu fəsil üç paraqrafdan ibarətdir.

5.1 Hilbert fəzasının elementlərindən təşkil olunmuş və ixtiyari iki elementi arasındakı bucaq sıfırdan fərqli eyni bir ədədə bərabər olan ardıcıllıqların bazislik xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Bu paraqrafda T.E. Xmıleva və İ.P. Buxtina tərəfindən isbat ounmuş bir faktın ifadəsinin müəyyən dəqiqləşdirilməsi və bu faktın ümumiləşməsini əldə etməyə imkan verən qısa və sadə isbatı verilmişdir.

Əvvəlcə öz-özlüyündə də müəyyən maraq kəsb edən bəzi faktları qeyd edək.

Təklif 2. *Tutaq ki, H Hilbert fəzasının elementlərindən təşkil olunmuş $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı üçün aşağıdakı şərtlər ödənir:*

a) *İxtiyari $n \in N$ üçün*

$$\|x_n\| = 1;$$

b) *İxtiyari $n, m \in N, n \neq m$ üçün*

$$(x_n, x_m) = a,$$

burada $a \neq 1$ hər hansı ədəddir.

Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi ω - xətti asılı olmayan sistemdir.

Təklif 3. *Tutaq ki, H Hilbert fəzasının elementlərindən təşkil olunmuş $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı üçün aşağıdakı şərtlər ödənir:*

a) İxtiyari $n \in N$ üçün

$$\|x_n\| = 1;$$

b) İxtiyari $n, m \in N, n \neq m$ üçün

$$(x_n, x_m) = a.$$

Onda a *mənfi olmayan ədəddir.*

Teorem 25. *Tutaq ki,* H *Hilbert fəzasının elementlərindən təşkil olunmuş* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığı üçün aşağıdakı şərtlər ödənir:*

1) *İxtiyari* $n \in N$ *üçün*

$$\|x_n\| = 1;$$

2) *İxtiyari* $n, m \in N, n \neq m$ *üçün*

$$(x_n, x_m) = a,$$

burada a *sıfırdan fərqli sabit ədəddir.*

Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığı* H *fəzasında bazis ardıcıllıq deyil.*

Bu teoremin dissertasiyada təqdim olunan isbatı aşağıdakı daha ümumi faktın da doğru olduğunu göstərir.

Teorem 26. *Tutaq ki,* H *Hilbert fəzasının elementlərindən təşkil olunmuş* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığı üçün aşağıdakı şərtlər ödənir:*

1) *İxtiyari* $n \in N$ *üçün*

$$\|x_n\| = 1;$$

2) *İxtiyari* $n, m \in N, n \neq m$ *üçün*

$$(x_n, x_m) = a,$$

burada a *sıfırdan fərqli sabit ədəddir.*

Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığı bu ardıcıllığın elementlərinin doğurduğu alt fəzada (və deməli, həm də* H *fəzasında) psevdo-bazis deyil.*

5.2 ixtiyari $k, m \in N, k \neq m$ üçün

$$\left|(x_{n_k}, x_{n_m})\right| = a > 0$$

şərtini ödəyən $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt ardıcıllığına malik $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllıqlarının bazislik xassəsinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 27. *Tutaq ki, H Hilbert fəzasının elementlərindən təşkil olunmuş məhdud $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığının elementləri ixtiyari $k,m \in N, k \neq m$ üçün*

$$\left|(x_n, x_m)\right| = a > 0$$

şərtlərini ödəyir. Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı bazis ardcıllıq (və deməli, həm də H fəzasında Şauder bazisi) deyil.

Teorem 27-nin isbatından aşağıdakı daha ümumi faktın da doğru olduğu alınır.

Teorem 28. *Tutaq ki, H Hilbert fəzasının elementlərindən ibarət $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığının ixtiyari $k,m \in N, k \neq m$ üçün*

$$\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$$

şərtini ödəyən $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ alt ardıcıllığı vardır. Onda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı bazis ardcıllıq (və deməli, həm də H fəzasında Şauder bazisi) deyil.

Qeyd edək ki, bundan əvvəlki paraqrafın analoji faktından fərqli olaraq, ixtiyari $k,m \in N, k \neq m$ üçün

$$\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$$

şərtini ödəyən $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ alt ardıcıllığına malik $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı öz elementlərinin doğurduğu alt fəzada (və deməli, həm də H fəzasında) psevdo-bazis ola bilər.

5.3 kompakt operatorların ortonormal ardıcıllıqlar vasitəsilə xarakterizasiyasına həsr olunmuşdur.

Hilbert fəzasında təsir edən kompakt operatorların məşhur Rinqrouz xarakteristikası göstərir ki, H Hilbert fəzasında təsir edən A xətti operatorunun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt H fəzasının elementlərindən ibarət ixtiyari $\{e_n\}$ ortonormal ardıcıllığı üçün

$$\|Ae_n\| \to 0$$

olmasıdır.

Qeyd edək ki, bu teoremin bizə məlum olan isbatları Hilbert fəzasından Hilbert fəzası olmayan Banax fəzalarına da təsir edən operatorlar üçün oxşar hökmün doğru olub-olmamasını müəyyən etməyə imkan vermir.

Bu paraqrafda kompakt operatorların Rinqrouz xarakterizasiyasının qısa və sadə isbatı verilir. Qeyd edək ki, dissertasiyada təqdim olunan isbat bu teoremin hökmünün Hilbert fəzasından ixtiyari (ümumiyyətlə desək, Hilbert olmayan) Banax fəzasına təsir edən operatorlar halında da doğru qaldığını göstərir.

Teorem 29. *H Hilbert fəzasından B Banax fəzasına təsir edən xətti (ümumiyyətlə desək, məhdud olmaya da bilən) A operatorunun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt H fəzasında ixtiyari ortonormal $\{e_n\}$ ardıcıllığı üçn*

$$\|Ae_n\| \to 0$$

şərtinin ödənməsidir.

Müəllif, dəyərli məsləhətlərinə, işə daimi diqqətinə və dissertasiya işinin həyata keçirilməsində hərtərəfli dəstəyə görə, dissertasiya işi üzrə elmi məsləhətçi – AMEA-nın müxbir üzvü, professor B.T.Bilalova səmimi təşəkkürünü bildirməyi özünə borc bilir.

NƏTİCƏLƏR

Dissertasiya işinin əsas məqsədi Lebeq fəzalarında eksponensial və triqonometrik sistemlərin bazislik xassələri ilə bağlı çəkilərin xarakterizə olunması, Lebeq fəzalarında Kostyuçenko tipli sistemlərin bazisliyi üçün zəruri şərtin tapılması, vurma operatorunun iterasiyalarından alınan sistemlərin freymlik xassələrinin araşdırılması, ortonormal və ortonormal tipli sistemlərlə bağlı bəzi məsələlərin araşdırılmasıdır.

Dissertasiya işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

1. α_j dərəcələrindən ikisi Makenhoupt şərtini ödəmədiyi halda

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left|t - t_j\right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$$

şəkilli sistemlərin L_p fəzalarında tamlıq və minimallığı tam araşdırılmışdır;

2. $\{\omega(t)e^{int}\}_Z$ $\left(\{\omega(t)\cos nt\}_{n=0}^{\infty}\right)$ sistemindən element kənarlaşdırıldıqdan sonra alınan sistemin uyğun L_p fəzalarında tam və minimal olmasını təmin edən bütün $\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ $\left(\omega(t) \in L_p(0, \pi)\right)$ funksiyalar sinfi müəyyən olunmuşdur;

3. Göstərilmişdir ki, $\{\varphi_n(t)\}$ sistemi klassik sinus sistemi olduqda, təbii

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0$$

şərti daxilində, ixtiyari n üçün

$$\omega(t)\varphi_n(t) \in L_p$$

olmasından $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ sisteminin L_p fəzasında tam sistem olması alınır. Bundan əlavə, isbat olunmuşdur ki, klassik ekponensial və kosinus sistemləri üçün də analoqlarının doğruluğu yaxşı məlum olan bu fakt ümumi halda, ixtiyari tam və ya ixtiyari tam ortonormal sistemlər üçün, doğru deyildir;

4. Elə $\omega(t) \in L_p(0,\pi)$ çəki funsiyaları tapılmışdır ki, bu çəkilər üçün $\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$ sistemi $L_p(0,\pi)$ fəzasında tam sistemdir, lakin nə bu sistem, nə də bu sistemdən sonlu sayda element kənarlaşdırılmaqla alınan heç bir sistem $L_p(0,\pi)$ fəzsında tam və eyni zamanda minimal olan sistem deyil;

5. Kostyuçenko sistemi şəkilli

$$\left\{\varphi^n(t)\sin nt\right\}_{n\in N},$$
$$\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n\in N\cup\{0\}}$$

sistemlərinin L_p $(1 \le p < +\infty)$ fəzalarında bazisliyi üçün zəruri şərt tapılmışdır; bu şərtdən, xüsusi halda,

$$\{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\in \mathrm{N}}$$

Kostyuçenko sisteminin L_p fəzalarında bazisliyi üçün zəruri şərt alınır;

6. Ölçülən və sanki hər yerdə sonlu qiymətlər alan ixtiyari $\varphi(t)$ funksiyası üçün

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli sistemlərin $L_p[a,b]$ fəzalarında Şauder bazisi olmadığı isbat olunmuşdur;

7. Həqiqi və ya kompleks qiymətli ixtiyari $\varphi(t)$ kəsilməz funksiyası üçün

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli ardıcıllığın $C[a,b]$ fəzasında Şauder bazisi olmaması göstərilmişdir;

8. İxtiyari $\varphi(t)$ kəsilməz funksiyası üçün

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

şəkilli ardıcıllığın $C[a,b]$ fəzasında psevdo-bazis olmaması göstərilmişdir;

9. $L_2(a,b)$ fəzasında

$$T_{\varphi} f(t) = \varphi(t) f(t), \ f \in L_2(a,b)$$

vurma operatorunun

$$\left\{T_{\varphi}^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

və

$$\left\{T_{\varphi}^n f\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

iterasiyalarının freymlik xassələri araşdırılmışdır; Göstərilmişdir ki, heç bir ölçülən $\varphi(t)$ doğuran funksiyası və $f \in L_2(a,b)$ üçün T_{φ} vurma operatorunun

$$\left\{T_{\varphi}^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

orbiti $L_2(a,b)$ fəzasında freym təşkil edə bilməz. T_{φ} vurma operatorunun iterasiyalarından ibarət

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

şəkilli freymlərin xarakterizasiyası verilmişdir. Göstərilmişdir ki, bu məsələ aşağıdakı məsələnin həllinə gətirilə bilər:

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

sisteminin $L_2(a,b)$ *fəzasında freym olmasını təmin edən həqiqiqiymətli bütün* $\alpha(t)$ *funksiyalarını tapın (və ya bu şərti ödəyən* $\alpha(t)$ *funksiyalar sinfini təsvir edin).*

Bu məsələyə qismən cavab verilmişdir;

10. Hilbert fəzasında ixtiyari iki elemeni arasındakı bucaq sıfırdan fərqli eyni bir ədədə bərabər olan ardıcıllıqların və ixtiyari $k, m \in N, k \neq m$ üçün

$$\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$$

şərtini ödəyən məhdud $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt ardıcıllığına malik $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllıqlarının bazislik və ayrılış xassələri öyrənilmişdir;

11. Kompakt operatorların ortonormal ardıcıllıqlar vasitəsilə Rinqrouz xarakterizasiyasının qısa və sadə isbatı verilmişdir. Dissertasiyda təqdim olunan isbat bu teoremin hökmünün Hilbert fəzasından ixtiyari (ümumiyyətlə desək Hilbert olmayan) Banax fəzasına təsir edən operatorlar halında da doğru qaldığını göstərir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc edilmişdir:

1. Shukurov, A.Sh. Necessary condition of basicity of a system of powers in Lebesgue spaces // - Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, - 2009. 29(4), - p.173-178.
2. Shukurov, A. Sh. Necessary condition for Kostyuchenko type systems to be a basis in Lebesgue spaces // - Warsaw: Colloquium Mathematicum, - 2012. 127(1), - p.105-109.
3. Shukurov, A. Sh. Addendum to "Necessary condition for Kostyuchenko type systems to be a basis in Lebesgue spaces" // - Warsaw: Colloquium Mathematicum, - 2014. 137(2), - p.297-298.
4. Shukurov, A. Sh. The power system is never a basis in the space of continuous functions //- Philadelphia: American Mathematical Monthly, - 2015. 122(2), - p.137-137.
5. Shukurov, A.Sh. Simpler proof of the Ringrose's characterization of compact operators // - Bethesda: European Journal of Pure and Applied Mathematics, - 2015. 8(4), - p.499-501.
6. Shukurov, A. Sh. On a paper by Khmyleva and Bukhtina // - Tomsk: Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta-Matematika i Mekhanika, - 2015. 6(38), - p.56–59.
7. Shukurov, A. Sh. About one type of sequences that are not a Schauder basis in Hilbert space // - Izhevsk: Vestnik Udmurtskogo Universiteta - Matematika Mekhanika Kompyuternye Nauki, - 2015. 25(2), - p.244–247.

8. Shukurov, A.Sh. Impossibility of power series expansion for continuous functions // - Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, - 2016. 6(1), - p.122-125.
9. Shukurov, A.Sh. On the completeness and minimality of the exponential system with degenerate coefficients // -Baku: Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, 2016, Vol 4, No. 1, p.74-80.
10. Shukurov, A.Sh. A note on the completeness and minimality of weighted trigonometric systems // - Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, - 2016. 42(2), - p.249-256.
11. Shukurov, A. Sh. Comment on "On the frame properties of degenerate system of sines" // - London: Journal of Function Spaces, - 2017, Art. ID 9257076, 4 pp.
12. Shukurov, A. Sh. On basicity of the degenerate trigonometric system with excess // - Tartu: Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, - 2017. 21(2), - p.249-257.
13. Shukurov A.Sh., Bilalov B.T. On the completeness and minimality of the exponential system with degenerate coefficients // The Reports of NAS of Azerbaijan, 2017, Vol. LXXIII, No. 1, pp.16-19.
14. Shukurov, A. Sh. On basis properties of weighted exponential systems with excess // - Samara: Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, - 2018. 24(1), - p.14-19.
15. Shukurov, A. Sh., Kasumov, Z.A. On frame properties of iterates of a multiplication operator // - Basel: Results in Mathematics, - 2019. 74(2), - p.74-84.
16. Shukurov, A.Sh. On the uniform minimality of the Kostyuchenko type systems // Proceedings of the International conference "Functions theory and problems of harmonic analysis" devoted to the 100-th annivesary of academician I.I.Ibrahimov, - Baku: - Februrary 28 – March 01, - 2012, - p.269-270.
17. Shukurov, A.Sh., Huseynli, A.A. On the basicity of the weighted trigonometric systems // International workshop on “Non-harmonic analysis and differential operators” – Baku: May 25-27, - 2016, - p.103-104.

18. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. О некоторых свойствах систем типа системы А.Г.Костюченко // International conference "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics conference", on the occasion of professor Hamlet Isakhanli's 70-th birthday, - Baku: - May 21 – 24,- 2018.
19. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frame properties of iterates of a multiplication operator // International conference dedicated to the 90-th anniversary of academician Azad Mirzajanzade, - Baku: - December 13-14, - 2018.
20. Shukurov, A.Sh., Gadirova, Kh.M. On frames of the form $\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ // International conference dedicated to the 90th anniversary of academician Azad Mirzajanzade, - Baku: -December 13-14, - 2018.
21. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frame properties of iterates of a multiplication operator // International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, - Baku: - October 23-25, - 2019, - p.465-466.
22. Shukurov A.Sh., Jabrailova A.N. On frames that are iterates of a multiplication operator / International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, - Baku: - October 23-25, - 2019, - p. 285-287.
23. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frame properties of iterates of a multiplication operator // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference. Khazar University, - Baku: - June 10-14, - 2019, - p.113-115.
24. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z., On frame properties of iterates of a multiplication operator // 2-nd International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2019), - Yildiz Technical University, - İstanbul, Turkey: - May 3-5, - 2019.
25. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z., On frame properties of iterates of a multiplication operator // 3rd İnternational E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2020), Yildiz Technical University, -Turkey: - June 24-27, - 2020.

26. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On the completeness and minimality of the exponential system with degenerate coefficients // 3rd İnternational E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2020), - Istanbul: - June 24-27, - 2020.
27. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frames of the form $\left\{\varphi^{n}(t)\right\}$ // 4th International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2021), - Istanbul: - May 26-29, - 2021, - p.53.

Dissertasiyanın müdafiəsi **28 oktyabr 2022-ci il** tarixində saat **14^{00}** Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **23 sentyabr 2022-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 15.04.2022

Kağızın formatı: 60x84 1/16

Həcm: 77195

Tiraj: 30