AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ELLİPTİK TİP OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMA MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

İxtisas: 1202.01 – Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Günel Mirbala qızı Qasımova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2023

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbəri: f-r.e.d., professor **Sabir Sultanağa oğlu Mirzəyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Əli Abbas oğlu Hüseynli

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Yaqub Nəcəf oğlu Əliyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:

AMEA–nın müxbir üzvü, f. –r.e.d., professor

Misir Cumail oğlu Mərdanov

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.–r.e.n., dosent

Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi seminarın sədri: AMEA–nın müxbir üzvü, f.–r.e.d., professor

Bilal Telman oğlu Bilalov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Məlumdur ki, operator-diferensial tənliklər üçün müxtəlif məsələlərin öyrənilməsi xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qarışıq məsələlərin, adi diferensial tənliklərin sonsuz sistemlərinin və digər məsələlərin araşdırılması üçün ən effektiv metodlardan biridir. Qeyd edək ki, E.Hille, K.İosida, T.Kato, S.Aqmon, L.Nirinberq və Z.İ.Xəlilovun işlərindən başlayaraq, bir çox riyaziyyatçılar sabit əmsallı xətti operator-diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həll olunma məsələlərini öyrənmişlər. Daha sonra, bu cür tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həll oluna biləcəyini araşdıran işlər ortaya çıxdı. Bu nəticələrin çoxu E.Hille və R.Fillipsin, S.G.Kreynin, J.-L.Lions və E.Majenesin, A.A.Dezinin, V.İ.Qorbaçuk və M.L.Qorbaçukun, S.Y.Yakubovun və başqalarının kitablarında öz əksini tapmışdır. Qeyd edilməlidir ki, birinci və ikinci tərtib ikihədli operator-diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həll olunma nəzəriyyəsi həm xarici, həm də Azərbaycan riyaziyyatçıları tərəfindən ətraflı tədqiq edilmişdir. Sonralar yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərlə də bağlı xeyli sayda işlər dərc olunmuşdur. Bu işlər arasına S.Aqmon və L.Nirinberqin, M.G.Qasımovun, A.G.Kostyuçenko və A.A.Şkalikovun, M.L.Qorbaçukun, A.A.Dezinin, Q.V.Radziyevskinin, S.Y.Yakubovun, M.Bayramoğlunun, S.S.Mirzəyevin, Ə.B.Əliyevin, H.D.Orucovun, H.İ.Aslanovun, V.V.Vlasovun və A.R.Əliyevin məqalələrini aid etmək olar. Qeyd edək ki, həmin məqalələrdə tədqiq olunan tənliklərdə və yaxud tənliklərin baş hissəsində iştirak edən əsas operator əmsal Hilbert fəzasında təsir edən öz-özünə qoşma operatordur. Bir çox praktiki məsələlər isə operator-diferensial tənliklərlə modelləşdiriləndə əsas operator əmsalın daha geniş sinifdən olmasını tələb edir. Digər praktiki məsələlərin operator-diferensial tənliklərin sərhəd məsələləri ilə modelləşdirilməsi zamanı sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorun iştirakı zərurəti meydana gəlir. Başqa praktiki məsələlərdə tənliklər kəsilən əmsallara malik olur. Bu baxımdan həm əvvəllər, həm də, xüsusən, son zamanlar hər üç səpgidə tədqiqatlar aparılmış və uyğun işlər dərc olunmuşdur. Bunlar arasında L. de Simon və J. Torellinin, A.A.Dezinin, A.A.Şkalikovun, V.V.Kornienkonun, S.Y.Yakubovun, S.S.Mirzəyevin, Ə.M.Əhmədovun, A.R.Əliyevin, B.Ə.Əliyevin və onların tələbələrinin işlərini qeyd etmək olar. Bu işlərin bir qismində tədqiqata təkan verən amil M.G.Qasımovun məqalələrindəki təklif olunan üsul olmuşdur. Gələcəkdə həmin üsul S.S.Mirzəyevin işlərində inkişaf etdirilmiş və davamını A.R.Əliyevin kəsilən əmsallı operator-diferensial tənliklərə həsr olunmuş işlərində tapmışdır.

Xüsusi qeyd edək ki, həm nəzəri, həm də tətbiq baxımından sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak edən və baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı operator-diferensial tənliklərin (yəni hər üç amil eyni zamanda iştirak etdikdə) həll olunması məsələləri böyük elmi maraq doğurur. Təqdim olunan dissertasiya işi də əsasən Hilbert fəzalarında bu cür elliptik tip operator-diferensial tənliklər üçün yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunma məsələlərinə həsr edilmişdir. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, burada biz məsələlərin öyrənilməsində əsasən S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin işlərində işlənib-hazırlanan üsullardan istifadə edirik.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin tədqiqat obyekti və predmeti sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak etdikdə baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci və ikinci sərhəd məsələləridir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəzifəsi sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci və ikinci sərhəd məsələlərinin həll olunma şərtlərini tapmaqdan, aralıq törəmə operatorlarının normalarını müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında qiymətləndirməkdən və onların həll olunma şərtləri ilə əlaqəsini təyin etməkdən ibarətdir.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində funksional analizin, xüsusən, öz-özünə qoşma olan və olmayan operatorların analitik nəzəriyyəsinin, Hilbert fəzasında xətti operatorlar nəzəriyyəsinin, operatorların yarımqruplar nəzəriyyəsinin və ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə olunmuşdur. Bundan əlavə işdə abstrakt fəzalarda diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin üsulları da tətbiq olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Müdafiəyə aşağıdakı əsas müddəalar çıxarılır:

1. Sərhəd şərtində məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin həll olunma şərtlərini tapmaq.

2. Sərhəd şərtində qeyri-məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunma şərtlərini tapmaq.

3. Normaları operator-diferensial ifadəsi ilə yazılan müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normalarını qiymətləndirmək və onların tədqiq olunan sərhəd məsələlərinin həll olunma şərtləri ilə əlaqəsini təyin etmək.

4. Yarımoxda kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin həllərinin xassələrini araşdırmaq.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

1. Sərhəd şərtində məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılıb.

2. Sərhəd şərtində qeyri-məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılıb.

3. Normaları operator-diferensial ifadəsi ilə yazılan müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilib.

4. Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi ilə tədqiq olunan sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi təyin edilib.

5. Operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins operator-diferensial tənliklərin yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunub.

6. Yarımoxda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi araşdırılıb.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işi əsasən nəzəri əhəmiyyət daşıyır. Lakin dissertasiyada alınan nəticələrdən riyazi fizikanın qeyri-bircins mühitdə baxılan bir sıra məsələlərində və mexanikada, məsələn, çoxlaylı cisimlər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin məsələlərində istifadə etmək olar.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasının seminarında (rəhbər prof. S.S.Mirzəyev), "Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz" kafedrasının seminarında (rəhbər prof. Ə.M.Əhmədov), "Tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının seminarında (rəhbər prof. H.D.Orucov), "Diferensial və inteqral tənliklər" kafedrasının seminarında (rəhbər prof. N.Ş.İsgəndərov), Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" şöbəsinin seminarında (rəhbər prof. H.İ.Aslanov), Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin "Ümumi və tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının seminarlarında (rəhbər prof. A.R. Əliyev) məruzə edilmişdir. Bundan əlavə dissertasiyada alınmış nəticələr aşağıdakı elmi konfranslarda da məruzə edilmişdir: Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda akad. A.X.Mirzəcanzadənin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş "Neftqaz sahəsində qeyri-Nyuton sistemlər" Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 21-22 noyabr 2013), Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda akad. M.G.Qasımovun 75 illik yubileyinə həsr olunmuş "Diferensial operatorlarının spektral nəzəriyyəsi" Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 8-10 dekabr 2014), BDU-nun Mexanka-riyaziyyat fakultəsində Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransında (Bakı, 20-21 May 2015), Sumqayıt Dövlət Universitetinin yaradılmasının 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Sumqayıt, 25-26 may 2017), Xəzər Universitetində prof. H.A.İsaxanlının 70 illiyinə həsr olunmuş "Operatorlar, funksiyalar və riyazi fizikada sistemlər" adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 21-24 may 2018), Başqırd Dövlət Universitetinin Sterlitamak filialında "Proseslərin və sistemlərin riyazi modelləşdirilməsi" adlı IX Beynəlxalq gənclər elmi və praktik konfransında (Sterlitamak, 30 oktyabr - 1 noyabr 2019).

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Alınmış bütün nəticə və təkliflər müəllifə aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Tədqiqat üzrə Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 5 məqalə (1-i Web of Science Core Collection bazasının SCIE siyahısına, 1-i SCOPUS, 2-si isə Zentralblatt MATH bazalarına daxildir), 1 konfrans materialı və 4 tezis (bütövlükdə 10 iş) nəşr olunmuşdur. Əsərlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetririldiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 167292 işarədir (titul səhifəsi – 354 işarə, mündəricat – 2264 işarə, giriş – 41212 işarə, birinci fəsil – 50000 işarə, ikinci fəsil – 36000 işarə, üçüncü fəsil – 36000 işarə, nəticə - 1462). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 73 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

Müəllif müəllimləri, professorlar Sabir Mirzəyevə və Araz Əliyevə məsələlərin qoyuluşuna, alınan nəticələrin müzakirəsinə və işə daimi diqqətlərinə görə dərin hörmətini və səmimi minnətdarlığını bildirir.

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya giriş, üç fəsil və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Dissertasiyanın girişində mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış və onun işlənmə dərəcəsi göstərilmiş, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri söylənilmiş, elmi yeniliyi verilmiş, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti qeyd olunmuş, həmçinin işin aprobasiyası barədə məlumat yer almışdır.

Birinci fəsil kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin həll olunmasının tədqiqinə həsr olunubdur. Tədqiq olunan operator-diferensial tənliklərin baş hissəsində müəyyən xassələrə malik olan normal operator, sərhəd şərtində isə məhdud operator iştirak edir. İkitərtibli Sobolev fəzasının müəyyən altfəzasında bu tənliklərin korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunur.

Tutaq ki, H separabel Hilbert fəzası, A operatoru $H-$da tərsi olan normal operatordur.

Aydındır ki, $D(A)=D(A^*)$, $A^*A=AA^*$ və A operatorunu $A=UC=CU$ şəklində göstərə bilərik, burada U unitar, C isə $H-$da öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur, belə ki, $D(C)=D(A)$ və

$$\|Ax\|=\|A^*x\|=\|Cx\|, \quad x\in D(A),$$

$$\|A^\gamma x\|=\|C^\gamma x\|, \quad x\in D(A^\gamma)=D(C^\gamma), \gamma\geq 0.$$

Məlumdur ki, C^γ $(\gamma\geq 0)$ operatorunun təyin oblastı skalyar hasilli H Hilbert fəzası olacaq:

$$H_\gamma=D(C^\gamma), (x,y)_\gamma=(C^\gamma x, C^\gamma y), \quad x,y\in H_\gamma.$$

Hesab edirik ki, $\gamma=0$ olduqda $H_0=H$ və

$$(x,y)_0=(x,y), \quad x,y\in H.$$

$L(X,Y)$ ilə X fəzasından Y fəzasına təsir edən xətti məhdud operatorlar fəzasını işarə edək.

Tutaq ki, $-\infty \le a < b < \infty$. $L_2((a,b);H)$ ilə $H-$qiymətli, güclü ölçülən və

$$\int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt < \infty$$

sonlu inteqralına malik olan bütün vektor funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Qeyd edək ki, $L_2((a,b);H)$ çoxluğu

$$(f,g)_{L_2((a,b);H)} = \int_a^b (f(t), g(t)) dt$$

skalyar hasilli və norması

$$\| f \|_{L_2((a,b);H)} = \left(\int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt \right)^{1/2}$$

olan Hilbert fəzasıdır.

Tutaq ki, $n \ge 1$, $u(t) \in L_2((a,b);H_n)$ vektor funksiyalar və $u^{(n)}(t) \in L_2((a,b);H)$ onların ümumiləşmiş törəmələridir. Onda aşağıdakı xətti çoxluq müəyyən etmək olar:

$$W_2^n((a,b);H) =$$
$$= \left\{ u(t) : C^n u(t) \in L_2((a,b);H),\ u^{(n)}(t) \in L_2((a,b);H) \right\}.$$

$W_2^n((a,b);H)$ xətti çoxluğunda skalyar hasili aşağıdakı kimi təyin edək:

$$(u, \vartheta)_{W_2^n((a,b);H)} = \left(u^{(n)}, \vartheta^{(n)} \right)_{L_2((a,b);H)} + \left(C^n u, C^n \vartheta \right)_{L_2((a,b);H)},$$

burada $u, \vartheta \in W_2^n((a,b);H)$. Biz $W_2^n((a,b);H)$ dolu Hilbert fəzasını alırıq. Aydındır ki,

$$\| u \|_{W_2^n((a,b);H)} = \left(\left\| u^{(n)} \right\|_{L_2((a,b);H)}^2 + \left\| C^n u \right\|_{L_2((a,b);H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Bu normanı aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\| u \|_{W_2^n((a,b);H)} = \left(\left\| u^{(n)} \right\|_{L_2((a,b);H)}^2 + \left\| A^n u \right\|_{L_2((a,b);H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Öncə $R_+ = [0,+\infty)$ müsbət yarımoxda tədqiq olunan kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliyin requlyar həllinin tərifi və bu tənlik üçün öyrənilən birinci sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasının tərifi verilir.

H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \rho(t)A^2u(t) + A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t) = f(t), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

$$u(0) = Tu'(0). \tag{2}$$

Burada $f(t), u(t)$ funksiyaları $R_+ -$də təyin olunmuş $H-$qiymətli vektor funksiyalar, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

1) A-nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

2) $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0,1), \\ \beta^2, & t \in (1,+\infty), \end{cases}$ $\alpha, \beta > 0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha \le \beta$);

3) $T \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$, yəni T operatoru $H_{1/2}$ fəzasından $H_{3/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

4) A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1 = A_1A^{-1}$, $B_2 = A_2A^{-2}$ operatorları $H-$da məhduddurlar.

Tərif 1. $f(t) \in L_2(R_+;H)$ *olduqda* (1) *tənliyini* $R_+ -$*də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t) \in W_2^2(R_+;H)$ *vektor funksiyası vardırsa, ona* (1) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 2. *İxtiyari* $f(t) \in L_2(R_+;H)$ *üçün* (1) *tənliyinin*

$$\lim_{t\to+0}\|u(t) - Tu'(t)\|_{3/2} = 0$$

mənasında (2) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və onun üçün*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

$W_2^2(R_+;H)$ fəzasında bir altfəzaya baxaq:

$$W_{2,T}^2(R_+;H) = \{u : u \in W_2^2(R_+;H),\ u(0) = Tu'(0)\}.$$

(1), (2) sərhəd məsələsini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$P_T u = P_{0,T}u + P_{1,T}u = f, \tag{3}$$

burada $f(t) \in L_2(R_+;H)$ $u \in W_{2,T}^2(R_+;H)$,

$$P_{0,T}u = -\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u, \quad u \in W_{2,T}^2(R_+;H),$$

və

$$P_{1,T}u = A_1\frac{du}{dt} + A_2u, \quad u \in W_{2,T}^2(R_+;H).$$

Aşağıdakı hökmlər doğrudur.

Lemma 1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

Teorem 1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir və*

$$Q_{\alpha,\beta} = E - \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A} + \alpha AT\left(E + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

operatorunun $H_{1/2}$ *fəzasında məhdud tərsi vardır. Onda* $P_{0,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına təsir edən izomorfizmdir.*

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. $\|u\|_{W_{2,T}^2(R_+;H)}$ *və* $\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}$ *normaları* $W_{2,T}^2(R_+;H)$ *fəzasında ekvivalentdirlər.*

Nəticə 2.

$$N_1(T) = \sup_{0 \neq u \in W^2_{2,T}(R_+;H)} \|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \|P_{0,T}u\|^{-1}_{L_2(R_+;H)}$$

və

$$N_2(T) = \sup_{0 \neq u \in W^2_{2,T}(R_+;H)} \|A^2\|_{L_2(R_+;H)} \|P_{0,T}u\|^{-1}_{L_2(R_+;H)}$$

normaları sonludur.

Buradan aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi məsələsi meydana çıxır.

Teorem 2. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir və* $H_{1/2}$ *−də* $\mathrm{Re}\,UAT \geq 0$ *və* $\mathrm{Re}\,CT \geq 0$. *Onda ixtiyari* $u(t) \in W^2_{2,T}(R_+;H)$ *üçün aşağıdakı bərabərsizliklər ödənilir:*

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_1(\varepsilon)\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)},$$

$$\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_2(\varepsilon)\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)},$$

burada

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\cos\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2}, & 0 \leq \varepsilon \leq \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}\dfrac{1}{\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4} \leq \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bu teoremlə bağlı iki mühüm qeydi söyləmək olar.

Qeyd 1. *Asanlıqla göstərmək olar ki,* T *−ni müəyyən qayda ilə seçməklə teorem* 2*-nin şərtindəki hər iki dissipativlik şərtləri ödənilsin.*

Qeyd 2. *Hər iki* CT *və* UAT *operatorlarının dissipativlik şərtləri asılı olmayandır.*

Sonda (3) tənliyinin həll olunmasını öyrənirik.

Aşağıdakı hökm doğrudur.

Lemma 2. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,T}+P_{1,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^{2}(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

İndi isə yuxarıda alınan nəticələrdən istifadə edərək birinci fəslin əsas teoremini söyləyə bilərik.

Teorem 3. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir,* $Q_{\alpha,\beta}$ *operatorunun* $H_{1/2}-$*də məhdud tərs operatoru vardır və* $H_{1/2}-$*də* $\mathrm{Re}\,UAT\geq 0$ *və* $\mathrm{Re}\,CT\geq 0$. *Bundan əlavə,* B_1 *və* B_2 *operatorları üçün aşağıdakı şərt ödənir:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\|+c_2(\varepsilon)\|B_2\|<1,$$

burada $c_1(\varepsilon)$ *və* $c_2(\varepsilon)$ *teorem* 2-*də təyin olunurlar. Onda* (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Bu teoremdən alınan aşağıdakı iki nəticəni qeyd edək.

Nəticə 3. *Tutaq ki,* A *öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator,* $T=0$ *və* 2), 4) *şərtləri yerinə yetirilir. Onda*

$$2^{-1}\alpha^{-1}\|B_1\|+\alpha^{-2}\|B_2\|<1$$

şərti daxilində (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Nəticə 4. *Tutaq ki,* 1), 3), 4) *şərtləri yerinə yetirilir,* $\rho(t)\equiv 1$, $t\in R_+$, $H_{1/2}-$*də* $\mathrm{Re}\,UAT\geq 0$ *və* $\mathrm{Re}\,CT\geq 0$, *və bundan əlavə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:*

$$\tilde{c}_1(\varepsilon)\|B_1\|+\tilde{c}_2(\varepsilon)\|B_2\|<1,$$

burada

$$\tilde{c}_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\cos\varepsilon},\quad 0\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{c}_2(\varepsilon)=\begin{cases}1, & 0\leq\varepsilon\leq\dfrac{\pi}{4},\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\leq\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Onda (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Qeyd edək ki, $\varepsilon = 0,\ \rho(t) = 1$ və $T = 0$ olduqda (1), (2) sərhəd məsələsi M.G.Qasımovun[12] işlərində araşdırılmışdır. Bu işlərdə alınan bəzi nəticələr $T \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$ şərti daxilində M.G.Qasımov və S.S.Mirzəyevin[3] işində ümumiləşdirilmişdir. $\varepsilon = 0,\ T = 0$ və $\rho(t) \neq 1$ olduqda 2) şərtini ödəyən (1), (2) məsələsi S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin[4] işində öyrənilmişdir. Yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklər üçün isə bu halın analoqu A.R.Əliyev[5], S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin[6] işlərində araşdırılmışdır. Daha sonra $\varepsilon = 0,\ \rho(t) \neq 1$ və $T \neq 0$ olduqda (1), (2) sərhəd məsələsi S.S.Mirzəyev, A.R.Əliyev və L.A.Rüstəmovanın[7] işində baxılmışdır.

Qeyd edək ki, birinci fəsildə $\varepsilon \neq 0, T \neq 0$ və $\rho(t) \neq 1$ və bu məsələ hətta $\rho(t) = 1$ olduqda da araşdırılmamışdır. Ona görə alınan nəticələr $\rho(t) = 1$ halında da yenidir.

---

[1] Гасымов, М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // Известия АН Армянской ССР, серия матем. -1971, т.6, №2-3, с.131-147.

[2] Gasymov, M.G. On the theory of polynomial operator pencils // Soviet Mathematics Doklady, -1972, v.12, -p.1143-1147.

[3] Gasymov, M.G., Mirzoev, S.S. Solvability of boundary value problems for second order operator-differential equations of elliptic type // Differential Equations, -1992. v.28, №4, -p.528-536.

[4] Мирзоев, С.С., Алиев, А.Р. Об одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом // -Баку: Труды ИММ АН Азерб. -1997. Т.6(14), -с. 117-121.

[5] Aliev, A.R. Boundary value problems for a class of operator-differential equations of high order with variable coefficients // Mathematical Notes, -2003. v.74, №5-6, -p.761-771.

[6] Aliev, A.R., Mirzoev, S.S. On boundary value problem solvability theory for a class of high order operator-differential equations // Functional analysis and its applic., -2010. v.44, №3, -p.209-211

[7] Mirzoev, S.S., Aliev, A.R., Rustamova, L.A. On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator-differential equation of second order with discontinuous coefficients // Journal of Mathematical Physics, Analysis Geometry. -2013. v.9, №2, -p.207-226.

İkinci fəsil kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunmasının öyrənilməsinə həsr olunubdur. Burada da operator-diferensial tənliklərin baş hissəsində iştirak edən operator müəyyən xassələrə malik olan normal operatordur, sərhəd şərtində isə qeyri-məhdud operator iştirak edir. Əsas nəticələr ikitərtibli Sobolev fəzasının müəyyən altfəzasında bu tənliklərin korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlərin alınmasından ibarətdir.

Bu fəsildə (1) şəkilli operator-diferensial tənlik

$$u'(0) = Ku(0) \tag{4}$$

sərhəd şərti ilə öyrənilir. Burada birinci fəsildəki kimi, $f(t)$ və $u(t)$ funksiyaları $R_+ -$də təyin olunmuş $H-$ qiymətli vektor funksiyalar, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$1^*)$ A-nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : \left| \arg \lambda \right| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2} \right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

$2^*)$ $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0,1), \\ \beta^2, & t \in (1,+\infty), \end{cases}$ $\alpha, \beta > 0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha \le \beta$);

$3^*)$ $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$, yəni K operatoru $H_{3/2}$ fəzasından $H_{1/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

$4^*)$ A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1 = A_1 A^{-1}$ və $B_2 = A_2 A^{-2}$ operatorları $H-$ da məhduddurlar.

Tərif 3. *İxtiyari* $f(t) \in L_2(R_+; H)$ *üçün* (1) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \left\| u'(t) - Ku(t) \right\|_{1/2} = 0$$

mənasında (4) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const \|f\|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (1), (4) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İndi $P_{0,K}$ ilə $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasından $L_2(R_+;H)$ fəzasına aşağıdakı kimi təsir edən operatoru işarə edək:

$$P_{0,K}u(t)=-\frac{d^2u}{dt^2}+\rho(t)A^2u(t),\quad u(t)\in W_{2,K}^2(R_+;H).$$

Qeyd edək ki, burada $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzası $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının altfəzasıdır:

$$W_{2,K}^2(R_+;H)=\{u:u\in W_2^2(R_+;H),u'(0)=Ku(0)\}.$$

Aşağıdakı hökmlər doğrudur.

Lemma 3. 1*)-3*) *şərtləri daxilində* $P_{0,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

Teorem 4. *Tutaq ki,* 1*)-3*) *şərtləri ödənilir və*

$$R_{\alpha,\beta}=E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\frac{1}{\alpha}A^{-1}K\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

operatoru $H_{3/2}$ *fəzasında məhdud tərsə malikdir. Onda* $P_{0,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *və* $L_2(R_+;H)$ *fəzaları arasında izomorfizmdir.*

Birinci fəsildəki nəticə 1 və nəticə 2 kimi teorem 4-dən də uyğun nəticələr alınır. Bu səbəbdən ikinci fəsildə də aşağıdakı kəmiyyətlərin qiymətləndirilməsi ilə məşğul olmaq məsələsi meydana çıxır:

$$N_1(K)=\sup_{0\neq u\in W_{2,K}^2(R_+;H)}\|Au'\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1},$$

$$N_2(K)=\sup_{0\neq u\in W_{2,K}^2(R_+;H)}\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1}.$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. *Tutaq ki,* 1*)-3*) *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}-$*də məhdud tərsə malikdir və* $H_{3/2}-$*də* $\mathrm{Re}U^{-1}A^{-1}K\geq 0,$ $\mathrm{Re}\,C^{-1}K\geq 0$. *Onda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:*

$$N_1(K)\leq\frac{2}{2\alpha\cos\varepsilon},\quad 0\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$N_2(K)\leq\frac{1}{\alpha^2}\begin{cases}1, & 0\leq\varepsilon\leq\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\leq\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Nəhayət, (1), (4) sərhəd məsələsinin $A_j\neq 0,\quad j=1,2,$ olduqda requlyar həll olunması haqqında teoremin alınmasına keçək.

Lemma 4. *Fərz edək ki,* $\left.1^*\right)-\left.4^*\right)$ *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,K}+P_{1,K}$ *operatoru* $W^2_{2,K}(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

Teorem 6. *Tutaq ki,* $\left.1^*\right)-\left.4^*\right)$ *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}-$*də məhdud tərsə malikdir,* $H_{3/2}-$*də* $\mathrm{Re}U^{-1}A^{-1}K\geq 0,$ $\mathrm{Re}\,C^{-1}K\geq 0$ *və* B_1,B_2 *operatorlarının normaları üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:*

$$N_1(K)\|B_1\|+N_2(K)\|B_2\|<1,$$

burada $N_1(K), N_2(K)-$*lar teorem* 5-*də qiymətləndiriliblər. Onda* (1), (4) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Tətbiqi məsələlərdə həm birinci fəsildəki hökmlərdə iştirak edən $Q_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{1/2}-$ də məhdud tərs operatora malik olması şərti, həm də ikinci fəsildəki hökmlərdə iştirak edən $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{3/2}-$də məhdud tərs operatora malik olması şərtinin yoxlanılması çətinlik törədir. Qeyd edək ki, məsələn, $\mathrm{Re}\,A^{-1}K\geq 0$ şərtinin $H_{3/2}-$də ödənilməsi $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{3/2}-$də tərsə malik olmasını təmin edir. Ona görə də ikinci fəslin hökmlərində $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun tərsə malik olması əvəzinə $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ şərtinin $H_{3/2}-$ də ödənilməsini tələb etmək olar. Bu şərt öz növbəsində tətbiqi məsələlərdə $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun tərsə malik olması şərtinə nisbətən daha asan yoxlanılandır.

İkinci fəsil ilə bağlı sonda teorem 6-dan alınan aşağıdakı iki nəticəni də qeyd edək.

Nəticə 5. *Tutaq ki,* A *operatoru* H *Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur,* $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$ *və* $H_{3/2}-$ *də* $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$. *Onda*

$$\frac{1}{2\alpha}\|B_1\| + \frac{1}{\alpha^2}\|B_2\| < 1$$

şərti ödənildikdə (1), (4) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Nəticə 6. *Tutaq ki,* A*-nın tərsi* A^{-1} *tamam kəsilməz operator olub, spektri isə* S_ε *bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur, həm də* $H_{3/2}-$*də* $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$, $\operatorname{Re} C^{-1}K \geq 0$, $\operatorname{Re} U^{-1}A^{-1}K \geq 0$ *və aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\| + c_2(\varepsilon)\|B_2\| < 1,$$

burada

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\cos\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4} \leq \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Onda (1), (4) *sərhəd məsələsi* $\rho(t) = 1,\ t \in R_+$, *olduqda requlyar həll olunandır.*

Fikrimizcə, birinci fəsildə olduğu kimi, bu fəsildəki sonuncu nəticə də $\rho(t) = 1,\ t \in R_+$, olduqda da yenidir.

Qeyd edək ki, M.G.Qasımov və S.S.Mirzəyev[3], S.S.Mirzəyev və X.V.Yaqubovanın[8] işlərində (1), (4) sərhəd məsələsi A operatoru öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator və $\alpha = \beta = 1$ olduqda tədqiq edilmişdir. Bundan əlavə, $K = 0$ və A normal operator olduqda (1), (4) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasına S.S.Mirzəyev və L.A.Rüstəmovanın[9] işində baxılmışdır. S.S.Mirzəyev, A.R.Əliyev və L.A.Rüstəmovanın[10] işində isə A operatoru öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator və $A_2 = 0$ olan halda araşdırılmışdır.

Üçüncü fəsildə kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins operator-diferensial tənliyin operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində requlyar həll olunması tədqiq olunur. Bundan əlavə, verilmiş tənliyin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi öyrənilir.

Bu fəsildə H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \equiv -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \rho(t)A^2u(t) + $$

$$+ A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t) = 0, \quad t \in R_+, \tag{5}$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi, \tag{6}$$

burada $u(t)$ funksiyası $R_+ -$də təyin olunmuş $H -$qiymətli vektor funksiya, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə birinci fəsildəki 1)-4) şərtlərini ödəyirlər.

---

[8] Мирзоев, С.С., Ягубова, Х.В. О разрешимости краевых задач с операторами в краевых условиях для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // -Баку: Доклады АН Азерб. -2001. т.57, №1-3, -с. 12-17.

[9] Mirzoev, S.S., Rustamova, L.A. On a regular solvability of one boundary value problem for the second order operator-differential equations // Erciyes University Journal of Institute of Science and Technology, -2009. v.25, №1-2, -p.354-373.

[10] Mirzoev, S.S., Aliev, A.R., Rustamova, L.A. Solvability conditions for boundary value problems for elliptic operator-differential equations with discontinuous coefficient // Mathematical Notes, -2012. v.92, №5-6, -p.722-726.

Tərif 4. (5) *tənliyini* $R_+ -$ *də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$ *vektor funksiyası varsa, ona* (5) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 5. *İxtiyari* $\varphi \in H_{3/2}$ *üçün* (5) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \left\| u(t) - Tu'(t) - \varphi \right\|_{3/2} = 0$$

mənasında (6) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və onun üçün*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \leq const \|\varphi\|_{3/2}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (5), (6) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Birinci fəsildə alınan nəticələrdən istifadə edərək, (5), (6) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teorem isbat olunur.

Teorem 7. *Tutaq ki, teorem* 3*-ün bütün şərtləri ödənilir. Onda* (5), (6) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Analoji olaraq H separabel Hilbert fəzasında əmsalları 1), 2) və 4) şərtlərini ödəyən bircins (5) operator-diferensial tənliyinə qeyri-bircins

$$u'(0) - Ku(0) = \psi \tag{7}$$

sərhəd şərti ilə baxmaq olar. Burada $\psi \in H_{1/2}$, K operatoru isə 3*) şərtini ödəyir.

Tərif 6. *İxtiyari* $\psi \in H_{1/2}$ *üçün* (5) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \left\| u'(t) - Ku(t) - \psi \right\|_{1/2} = 0$$

mənasında (7) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və onun üçün*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \leq const \|\psi\|_{1/2}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (5), (7) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İndi isə ikinci fəsildə alınan nəticələrdən istifadə edərək (5), (7) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teoremi söyləyə bilərik.

Teorem 8. *Tutaq ki, teorem* 6*-nın bütün şərtləri ödənilir. Onda* (5), (7) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır*.

$Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ ilə (5) tənliyin $W_2^2(R_+;H)$ fəzasından olan həllər çoxluğunu işarə edək:

$$Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)=\left\{u(t):P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=0,\ u(t)\in W_2^2(R_+;H)\right\}.$$

Başqa sözlə, $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ (5) tənliyinin requlyar həllər fəzasıdır.

Aydındır ki, $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ çoxluğu $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının qapalı altfəzasıdır.

$\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ ilə $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ fəzasının $W_2^1(R_+;H)$ fəzasının normasına nəzərən qapanmasını işarə edək.

Bu fəslin sonunda $\|u\|_{W_2^1(R_+;H)}$ normasına nəzərən $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi müəyyən olunur.

Tərif 7. *Fərz edək ki,*

$$0\le a<a'<b'<b<+\infty$$

və $M>0$ *istənilən ədəddir. Əgər*

$$W_M=\left\{u(t):u(t)\in\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right),\ \|u\|_{W_2^1((a,b);H)}\le M\right\}$$

çoxluğu $W_2^1((a',b');H)$ *fəzasının normasına nəzərən kompakt çoxluqdursa, onda deyilir ki,* $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ *fəzası* $W_2^1(R_+;H)$ *fəzasının normasına nəzərən daxili kompakt fəzadır.*

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 9. *Tutaq ki,* 1), 2), 4) *şərtləri ödənilir və* $\dot{W}_2^2(R_+;H)$ *fəzasından olan* $u(t)$ *vektor funksiyası üçün*

$$\left\|P\left(\frac{d}{dt}\right)u\right\|_{L_2(R_+;H)} \geq const\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ *fəzası daxili kompakt fəzadır və elə* $\chi_0>0$ *ədədi var ki, istənilən* $u(t)\in\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ *üçün*

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\chi_0 t}\left(\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H^2+\|Cu(t)\|_H^2\right)dt<+\infty$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Burada $\dot{W}_2^2(R_+;H)\subset W_2^2(R_+;H)$ və bu fəza aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\dot{W}_2^2(R_+;H)=\{u(t):u(t)\in W_2^2(R_+;H),\ u(0)=u'(0)=0\}.$$

Xatırladaq ki, C isə $H-$da öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur.

Qeyd edək ki, ilk dəfə P.D.Laks sonsuz aralıqda bəzi həllər fəzaları üçün daxili kompaktlığın tərifini vermiş və onun elliptik tənliklərin həlləri üçün Fraqmen-Lindelöf prinsipi ilə sıx əlaqəsini göstərmişdir.

Nəticə

Dissertasiya işi sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak edən və baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı elliptik tip operator-diferensial tənliklərin yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunma məsələlərinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Sərhəd şərtində məhdud operator iştirak etdiyi halda baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılmışdır.
2. Sərhəd şərtində qeyri-məhdud operator iştirak etdiyi halda baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılmışdır.
3. Normaları operator-diferensial ifadəsi ilə yazılan müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmişdir.
4. Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi ilə tədqiq olunan sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi təyin edilmişdir.
5. Operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.
6. Yarımoxda baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlığı xassəsi araşdırılmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Гасымова, Г.М. О краевой задаче для операторно-дифференциального уравнения второго порядка с оператором в краевом условии // Материалы Международной научной конференции “Неньютоновские системы в нефтегазовой отрасли”, посвященной 85-летнему юбилею академика Азада Халил оглы Мирзаджанзаде, – Баку: – 21–22 ноября, – 2013, – с. 73–74.
2. Gasimova, G.M. On solvability conditions of a boundary value problem with an operator in the boundary condition for a second order elliptic operator-differential equation // – Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, – 2014. vol. 40, Special Issue, – p. 172–177. (**Zentralblatt MATH bazası**)
3. Гасымова, Г.М. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения второго порядка с операторными коэффициентами // – Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, – 2014. № 4, – с. 29–35.
4. Gasimova, G.M. On well-defined solvability of a boundary value problem for an elliptic differential equation in Hilbert space // – Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, – 2015. vol. 35, no. 1, – p. 31–36. (**SCOPUS bazası**)
5. Qasımova, G.M. Operator əmsallı elliptik tip operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsi haqqında // Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı Dövlət Universiteti, Mexanka-riyaziyyat fakultəsi, – Bakı: – 20–21 may, – 2015, – s. 66–68.
6. Мирзоев, С.С., Алиев, А.Р., Гасымова, Г.М. Условия разрешимости одной краевой задачи с операторными

коэффициентами и связанные с ними оценки норм операторов промежуточных производных // – Москва: Доклады Российской Академии Наук, – 2016. т. 470, № 5, – с. 511–513. (**Web of Science Core Collection bazasının SCIE siyahısı**)
7. Гасымова, Г.М. О регулярной разрешимости одной краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения // Материалы Международной научной конференции по теоретическим и прикладным проблемам математики, – Сумгаит: – 25–26 мая, – 2017, – с. 70–71.
8. Gasimova, G.M. On a boundary-value problem for an equation with operator coefficients in a Hilbert space // Proceedings of an International conference "Operators, Functions and Systems of Mathematical Physics" dedicated to 70th anniversary of prof. Hamlet Isakhanli, Khazar University, – Baku: – 21–24 May, – 2018, – p. 87–88.
9. Гасымова, Г.М., Разрешимость краевых задач для одного класса эллиптических операторно-дифференциальных уравнений // Материалы IX Международной молодежной научно-практической конференции "Математическое моделирование процессов и систем", Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, – Стерлитамак: – 30 октября – 1 ноября, – 2019, – с. 128–132.
10. Gasimova, G.M. On the internal compactness of the space of regular solutions of one class of second order operator-differential equations with a discontinuous coefficient // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2021. vol. 11, no 1, – p. 90–96. (**Zentralblatt MATH bazası**).

Dissertasiyanın müdafiəsi **23 iyun 2023-cü il** tarixində **14^{00}**-da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç, 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **19 may 2023-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 03.05.2023
Kağızın formatı: 60x841/16
Həcm: 40000
Tiraj: 100