АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ С НЕТОЧНО ЗАДАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Специальность: 1203.01 – Компьютерные науки

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Ашрафова Егана Рамиз кызы**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук

Баку – 2021

Диссертационная работа выполнена в лаборатории 3.1 Института Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана.

Научный консультант: член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., профессор
Камиль Раджаб оглы Айда-заде

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Элимхан Надир оглы Махмудов

доктор физико-математических наук, профессор
Андрей Леонидович Карчевский

доктор физико-математических наук, профессор
Гамлет Фарман оглы Кулиев

доктор физико-математических наук
Юсиф Солтан оглы Гасымов

Диссертационный совет ED 1.19 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

д.ф.-м.н., профессор
Галина Юриевна Мехтиева

Ученый секретарь диссертационного совета:

к.ф.-м.н., доцент
Эльхан Нариман оглы Сабзиев

Председатель научного семинара:

член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., профессор
Вагиф Рза оглы Ибрагимов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы. Математические модели многих процессов в биологии, экологии, химии, нефтехимии, трубопроводном транспорте газа и жидкости, являющиеся системами с распределенными во времени и пространстве параметрами, описываются дифференциальными уравнениями с частными производными. Классические математические постановки задач по расчету динамики этих процессов требуют задания начальных и краевых условий, соответствующих типу дифференциальных уравнений. Задание вида граничных условий и контроль над ними для одномерных нестационарных объектов связано с возможностями проведения замеров в граничных точках объекта и определения изменения его состояния в этих точках. Современные средства измерительной и вычислительной техники достаточно хорошо справляются с решением этой задачи. Намного сложнее обстоит дело с измерением, а тем более непосредственным управлением состоянием всех точек объекта, распределенного в фазовом пространстве. Поэтому задание начального состояния объекта, требуемого классическими постановками задач математической физики, в реальности практически неосуществимо, а, следовательно, приходится изучать состояние происходящих в нем процессов и динамику их изменения, пользуясь лишь информацией о краевых условиях без знания начальных. Такие задачи называют задачами распространения граничного режима. Их изучение было начато А. Н. Тихоновым и продолжено в работах Беляева В.Д., Бокало М., Вафодорова Г.О., Дрижа М., Кирилича В.М., Гусейнова Р.В., Лавренюка С.П., Лорензи А., Луптона Т., Моисеева Е.И., Олрайта Дж.С. Но исследованию и разработке численных методов решения этих задач пока уделено существенно меньше внимания.

Практический интерес исследования этих задач обусловлен тем, что при достаточно длительном функционировании какого-либо эволюционного процесса из-за наличия в нем внешних сил, в частности, трения (диссипации), присущих всякой реальной физической системе, влияние начальных условий на его протекание со временем ослабевает и управление процессом при отсутствии других управляющих воздействий наиболее существенно определяется граничными управлениями.

Основными объектами исследований настоящей диссертационной работы являются задачи оптимизации, оптимального управления, а также вычислительные и обратные задачи, описываемые большими системами разностных и дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными, и относительно длительно происходящих процессов с неточно заданными начальными и с нелокальными (неразделенными) граничными условиями. Такие задачи, как правило, возникают при математическом моделировании сложных объектов с использованием методов декомпозиции по пространственным и/или временной переменной. В частности, подобные задачи встречаются в проблемах, связанных с управлением процессами транспортировки нефти и газа по трубопроводным сетям сложной структуры. Аппроксимация рассматриваемых задач приводят, в общем случае, к двухточечным задачам относительно систем обыкновенных дифференциальных или дискретных уравнений большой размерности блочной структуры. Непосредственное использование методов прогонки краевых условий, предложенные в работах Абрамова А.А., Абдуллаева В.М., Годунова С.К., Николаева Е.С., Рябенького В.С., Самарского А.А., без учета специфики не эффективно, т. к. учет специфики структуры условий задач, как правило, позволяет существенно ускорить их решение. Отметим, что многие встречающиеся на практике математические модели сложных процессов получены с использованием их декомпозиции на более простые подобъекты с заранее известными математическими моделями или на подобъекты, для которых несложно их построить. Декомпозиция может проводиться по пространственной и/или временной переменным, причем декомпозиция сложного объекта проводится так, чтобы промежуточные (внутренние) состояния разных подобъектов не влияли друг на друга, а сами подобъекты были связаны с небольшим числом, но произвольными другими подобъектами.

Предлагаемый в настоящей диссертационной работе подход для расчета состояния таких объектов основан на идее переноса краевых условий, при этом в полученных формулах переноса значений начального или конечного вектора переменных какого-либо блока используется только матрица подсистемы данного блока. В отличие от подходов, предложенных в работах Абдуллаева В.М., Воеводина А. Ф., Годунова С.К., Рябенького В.С. учитывая специфику рассматриваемых систем, во-первых, в предлагаемых формулах не используется обращение матриц, во-вторых, эти формулы позволяют однозначно осуществлять поблочной перенос неразделенных между блоками условий, в-третьих, в силу предыдущей особенности процесс переноса условий в целом является одноэтапным. Предлагаемый подход развивает работы Акимова Е. Н., Быкова А.Н., Яненко Н.Н., в которых разработаны специальные алгоритмы распараллеливания для расчета состояния таких объектов, основанные, в основном, на разбиении блоков на отдельные подблоки, общее количество которых определяется числом процессоров (ядер) используемой вычислительной системы.

Магистральный трубопровод сложной закольцованной структуры большой протяженности можно рассматривать как пример сложной системы. Процесс движения жидкости в трубопроводной сети описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с неразделенными краевыми и неточно заданными начальными условиями. Для численного решения в работе использованы методы прямых и сеток и специальные схемы методов прогонки, отличные от предложенных Абдуллаевым В.М, Воеводиным А. Ф., Годуновым С.К., Николаевым Е.С., Рябеньким В.С., Самарским А.А.. Отметим, что разработанные схемы методов прогонки можно распараллеливать, аналогично схемам предложенным в работах Акимова Е. Н., Быкова А.Н., Бузало Н.С., Воеводина А. Ф., Рябенький В.С., Шугрина С.М., Яненко Н.Н., и др.

В общем, в исследовании задач с нелокальными условиями большую роль сыграли труды Алиева Ф.А., Асановой А.Т., Бицадзе А.В., Валле-Пуссена, Валикова Е.А., Джумабаева Д.С., Запсарбаева Л.К., Ильина В.А., Ионкина Н.И., Кабдракова С.С., Камынина Л.И., Нахушева А.М., Моисеева Е.И., Пиконе М., Стеклова В.А., Тамаркина Я.Д. и др.

Первые исследования нестационарного движения жидкости в трубах были проведены Громеки И.С., Жуковским Н.Е., Лейбензоном М.С., Чарным И.А.. В работах Айда-заде К.Р., Веригина А.Н., Гамзаева Х.М., Гусейнзаде М.А., Кадымова Я.Б., Кублановского Л.Б., Незамаева Н.А., Мусаева В.Г., Пашаева А.М., Смирнова М.Е., Юфина В.А., Adamkowski A., Herty M., Kim Ch., Nouri-Borujerdi A., Seaid M., Seok W.H., Töppel M., Wichowski R., и других авторов применялись различные методы расчета переходных процессов в линейных и сложных (разветвленных и неразветвленных) трубопроводах с учетом сопротивления и сил инерции.

Начиная с 60-70-х годов XX века исследованиями задач оптимального управления процессами, описываемых системами гиперболического типа, занимались такие ученые, как Бутковский А.Г., Васильев Ф.П., Егоров А.И., Крабс В., Куржанский М.А., Лионс Ж.-Л., Потапов М.М., Рассел Д.Л., Разгулина А.В., Сирин М., Сиразетдинов Т.К., Черноусько Ф.Л. К настоящему времени имеется много работ в области оптимального управления. Среди этих работ можно выделить труды таких ученых, как Айда-заде К.Р., Алиев Ф.А., Ахиев С.С., Ащепков Л.Т., Васильева О.О., Величенко В.В., Габасов Р., Гасанов К.Г., Евтушенко Ю.Г., Ибиев Ф.Т., Искендеров А.Д., Кириллова Ф.М., Кулиев Г.Ф., Махмудов Е.Н., Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К., Мизуками К., Моисеев

Н.Н., Муталлимов М.М., Поляк Б.Т., Тагиев Р.К., Федоренко Р.П., Шарифов Я.А., Ягубов М.Г. и др.

Работы многих ученых, как Вабищевич П.Н., Денисов А.М., Иванчов И.М., Кабанихин С.И., Камынин В.Л., Карчевский А.Л., Кожанов А.И., Лаврентьев М.М., Отелбаев М., Пулькина Л.С., Романов В.Г., Сабитов К.Б., Cannon J.R., Lesnic D., Yang F.L. и др., а в нашей республике – Айда-заде К.Р., Ахундов А.Я., Бахышев Ш.М., Гасанов А., Гасымов Ю.С., Денисова А.М., Искендеров А.Д., Искендеров Н.Ш., Исмаилов М.И., Мегралиев Я.Т., Намазов Г.К., Рагимов А.Б., Тагиев Р.К., Ягубов Г.Я. и др. посвящены изучению различных аспектов обратных задач относительно процессов, описываемых уравнениями с частными производными.

Если учесть высокий современный уровень развития и использования вычислительных, информационных, измерительных технологий в системах магистральной транспортировки углеводородного сырья, то применение разработанных в диссертационной работе численных методов, алгоритмов, программ решения в задач управления режимами транспортировки углеводородного сырья представляет практический интерес. Ключевым критерием эффективности оценки автоматизированных систем управления трубопроводами является возможность оперативного обнаружения утечек. Спектр этих средств очень широк: начиная с методов, используемых в быту, до аэрокосмического мониторинга. В этой области существует значительное количество работ таких авторов, как: Кутуков С.Е., Balogun H.A., Burn S., Chis T., Cobacho R., Colombo A.F., Dhammika De S., Donavan M., De Silva D., Geiger G., Hyun K., Junseok H., Karney B.W., Lin H. Y., Liu J. H., Lee G., Lee P., Mashford J., Ming Liu, Oyedeko K.F., Su H. G., Stewart B., Zhou Zhi-Jie и др. В работе Colombo A.F., Lee P. и Karney B.W. проведен обзор исследований посвященных методам обнаружения утечек при нестационарном режиме движения жидкости.

Несмотря на многочисленные научные успехи, исследования по получению адекватных математических моделей, численных методов расчета и оптимального управления, которые бы удовлетворяли современным требованиям практики актуальны и активно продолжаются.

Объект и предмет исследования.

Объектами исследований настоящей диссертационной работы являются краевые задачи и соответствующие обратные задачи и задачи оптимального управления эволюционными системами большой размерности, блочной структуры и с неточно заданными начальными условиями. Предметом исследования являются подходы, основанные на идее переноса краевых условий, для расчета состояния больших систем блочной структуры и методы решения задач оптимального управления такими объектами.

Цель и задачи исследования.

Основная цель диссертации заключается в разработке и применении эффективных численных методов решения краевых задач и задач управления эволюционными системами с неточно заданными начальными условиями, описываемых большими системами блочной структуры. В соответствии с этим были поставлены и решены следующие задачи.

1. Разработать численные схемы решения больших линейных систем обыкновенных дифференциальных (ОДУ) и дискретных уравнений блочной структуры, связанных лишь краевыми значениями.
2. Исследовать задачи оптимального управления большими системами ОДУ блочной структуры с блоками, связанными только краевыми условиями, и разработать численные методы их решения.
3. Исследовать длительность действия начальных условий на процессы, описываемые уравнениями параболического и гиперболического типов, в зависимости от значений параметров, участвующих в постановке задачи.

4. Исследовать постановки и методы решения задач оптимального управления эволюционными процессами при неточно заданных начальных условиях.
5. Разработать численные схемы расчета состояния волновых процессов, происходящих на объектах сложной структуры.
6. Исследовать постановки и разработать численные методы решения обратных задач по определению мест и мощностей сосредоточенных источников на объектах с распределенными параметрами сложной структуры.
7. Создать программное обеспечение для решения рассматриваемых задач с применением современных компьютерных технологий.
8. Применить полученные результаты для решения расчетных, оптимизационных и обратных задач по определению мест и мощностей сосредоточенных источников на примере нестационарного режима движения жидкости в гидравлических сетях сложной структуры.

Основными методами исследования являются: теории и численные методы решения дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными с нелокальными начально-краевыми условиями и соответствующих задач оптимального управления и обратных задач, конечномерной оптимизации, современные информационные технологии и средства программирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

- решение систем линейных ОДУ и дискретных уравнений большой размерности блочной структуры с нелокальными условиями;
- решение задач оптимального управления большими системами ОДУ блочной структуры с блоками со связанными краевыми условиями;
- анализ продолжительности времени влияния начальных условий на эволюционные процессы в зависимости от параметров процесса;

- решение задач оптимального управления эволюционными процессами при неточно заданных начальных условиях;
- расчет состояния, решение задач оптимального управления и идентификации мест и мощностей источников для волновых процессов;
- создание программного обеспечения для решения рассматриваемых задач с применением современных компьютерных технологий;
- применение полученных результатов для решения расчетных, оптимизационных и обратных задач на примере гидравлических сетей сложной структуры.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Разработаны численные методы решения систем линейных дифференциальных и дискретных уравнений большой размерности блочной структуры, подсистемы которых связаны между собой только неразделенными краевыми условиями.
2. Предложен алгоритм численного решения задачи оптимального управления большой системой ОДУ блочной структуры с блоками, связанными только краевыми условиями.
3. Для эволюционных процессов изучена продолжительность времени влияния начальных условий на состояние процесса в зависимости от различных параметров, участвующих в постановке задачи.
4. Приведены постановки и предложен численный метод решения задач оптимального управления эволюционными процессами с неточно заданными начальными условиями.
5. Разработаны численные схемы расчета состояния процессов, описываемых системой дифференциальных уравнений гиперболического типа большой размерности с неразделенными краевыми условиями.
6. Исследована постановка и предложен численный алгоритм решения задачи оптимального управления процессом,

описываемого системой дифференциальных уравнений гиперболического типа большой размерности с неразделенными краевыми условиями и неточно заданными начальными условиями.

7. Предложены постановки, формулы и алгоритмы решения обратных задач по определению мест и мощностей источников для волновых процессов.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты, полученные в работе, имеют как теоретическое, так и прикладное значение.

Теоретическое значение работы заключается в том, что исследован класс задач оптимального управления эволюционными процессами, описываемыми уравнениями с частными производными параболического и гиперболического типов, при неточно заданных начальных условиях. Системы дифференциальных уравнений, рассматриваемые в работе, имеют блочную структуру, большую размерность, а независимые подсистемы дифференциальных уравнений связаны между собой только нелокальными краевыми условиями. Получены и обоснованы расчетные формулы, необходимые для решения задач оптимального управления динамическими системами при неточно заданных начальных условиях.

Практическая ценность диссертационной работы состоит в том, что результаты исследований, проведенных в диссертационной работе, имеют важное значение для управления длительно функционирующими процессами, в частности, при эксплуатации нефтегазовых месторождений, трубопроводной транспортировке жидкости, газа, мониторинге экологического состояния регионов и другие.

Разработанные математические методы, алгоритмы, например, могут быть включены в системы диспетчерского оперативного управления режимами транспортировки нефти, газа в трубопроводных системах. Эти методы позволят диспетчерскому персоналу транспортной организации осуществлять эффективный оперативный контроль, прогноз состояния и управление транспортом углеводородного сырья по трубопроводным системам сложной структуры.

Апробация работы.

Основные результаты работы были доложены на следующих международных конференциях:
Intern. Conf. "Control and Optimization with Industrial Applications" - COIA-2013, 2015,2018 (Baku, Borovets(Bulgaria)); Intern. Conf. "Problems of Cybernetics and Informatics" PCI-2010, 2012 (Baku); 24th Mini Euro Conf. "Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector, (MEC EurOPT), 2010 (Турция, Измир), Межд. Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Россия, (Нальчик-Хабез 2010), (Российско-Казахский симпозиум-Нальчик 2011), (Российско-Абхазский симпозиум-Эльбрус, 2012); IV Межд. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик-Терскол, 2013,2018); (Российско-Казахский симпозиум - Нальчик, 2014); Межд. конф. «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления» (Казахстан, Алматы, 2009); Межд. конф. «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II» (Казахстан, Алматы, 2011); The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) (Baku, 2011); Intern. Conf. "Optimation Methods and Applications", OPTIMA-2012 (Costa Da Caparica, Portugal, 2012), OPTIMA-2013, 2014, 2015, 2017, 2018, 2019 (Petrovac, Montenegro); Пятая межд. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование» (МПМО-2014) Россия, Иркутск, 2014), VI Межд. конф. (МПМО-2017) Улан-Удэ, 2017; Межд. научно-практ. конф. «Инновационные технологии в нефтегазовой отрасли» Россия Ставрополь, 2015,2018), Межд. конф. "Прикладная математика и фундаментальная информатика" Омск, 2016, 2017, 2018, 2019; Межд. научная конф. «Информатика и прикладная математика»

посв. 25-летию Независимости Респуб. Казахстан и 25-летию Института информационных и вычислительных технологий, Казахстан, г. Алматы, 2016; V Всероссийская научно-практ. конф. «Математическое моделирование процессов и систем», Башкирия, 2016; Межд. Конф. «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки, Я. Дж. Мамедова 2010, 85-летию 2015, Баку; «Нефть-газ, нефтепереработка и нефтехимия», посв. 90-летию АГНА, 2010; Межд. конф. «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященная 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева (Баку, 2013); Межд. конф. «Неньютоновские системы в нефтегазовой отрасли», посв. 85-летнему юбилею акад. А.Х. Мирзаджанзаде (Баку, 2013). I Межд. науч. конф. «Роль мультидисциплинарного подхода в решении актуальных проблем фундаментальных и прикладных наук» Баку, 2014, Intern. Workshop on "Non-Harmonic Analysis and Differential Operators" 2016, Baku, Azerbaijan; XI Межд. Четаевская науч. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, 2017; Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Кабардино-Балкарская Республика, Приэльбрусье, 2017; IFAC Conferences & Symposia: TECIS-2018, Baku-2018.

- **на научных семинарах** Института Систем Управления, Института Математики и механики НАН Азербайджана, Научно-исследовательского Института Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, кафедры Прикладной Математики Азербайджанской Государственной Нефтяной Академии (Нефтяного и Промышленного Университета), кафедры «Уравнения математической физики» Бакинского Государственного Университета, факультетов Компьютерные науки Университета Эге и Университета Докуз Эйлул в г. Измир, Турция.

Применение работы.

Основные научные результаты диссертации использованы в работах, в проводимых в рамках тем следующих двух проектов, поддержанных Фондом Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики:

- “Математическое моделирование и оптимизация сложных систем, разработка программного обеспечения и численных методов решения этих задач, и их применение” (Грант № EIF-2010-1(1)-40/11 – ответственный исполнитель проекта), (2011-2012);
- «Численное решение краевых, коэффициентно-обратных и оптимизационных задач относительно дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми с заданными и незаданными начальными условиями» (Грант - № EİF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1 руководитель проекта) (2014-2015).

В 2014, 2015, 2018, 2019 годах результаты, связанные с расчетами и оптимальным управлением эволюционными процессами при отсутствии начальных условий и динамическими объектами большой размерности и блочной структуры были включены в Важнейшие Научные Результаты Национальной Академии Наук Азербайджана.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 51 научных работ, из них 26 – статьи, 20 из которых опубликованы в зарубежных странах, в том числе 13 из них входят в Scopus, 8 – в международную базу данных Web of Science^{TM} Core Collection агентства Clarivate Analytics, 25 статей опубликованы в материалах и тезисах международных конференций.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена в Институте Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана.

Структура и объем диссертации:

Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, списка литературы из 224 наименований и Приложений. Общий объем диссертации составляет 336 страниц машинописного текста, основной объем-275 страниц (550000 знаков), включая 27 таблиц, 27 рисунков. В частности, первая глава состоит из-

170000, вторая-92000, третья-80000, четвертая-28000, пятая-84000 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава, состоящая из восьми параграфов, посвящена разработке численных методов решения краевых задач, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений и систем линейных дискретных уравнений блочной структуры большой размерности.

В 1.1 приведен сравнительный анализ результатов исследований решения больших динамических систем с нелокальными условиями.

В 1.2 исследуется решение системы большой размерности и блочной структуры, состоящей из L независимых подсистем линейных неавтономных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}^k(x) = A^k(x)u^k(x) + B^k(x), \quad x \in [0, l^k], \qquad (1)$$
$$u^k(\cdot) \in R^{n_k}, \quad k = 1,...,L.$$

Здесь $A^k(x)$, $B^k(x)$ – известные непрерывные n_k – мерные соответственно квадратные матричные и векторные функции, причем $A^k(x) \neq const$, $x \in (0, l^k)$; неизвестные n_k – мерные вектор-функции $u^k(x)$ – непрерывно-дифференцируемы при $x \in [0, l^k]$; $l^k > 0$ – заданы; $k = 1,...,L.$ Подсистемы (1) связаны между собой лишь краевыми условиями:

$$\sum_{j=1}^{L} G^{sj^*} u^j(0) + \sum_{j=1}^{L} Q^{sj^*} u^j(l^j) = r^s, \quad s = 1,...,n, \qquad (2)$$
$$G^{sj} = (g_1^{sj},...,g_{n_j}^{sj})^*, \quad Q^{sj} = (q_1^{sj},...,q_{n_j}^{sj})^*,$$

которые можно записать в матричном виде :

$$Gu(0) + Qu(l) = r, \qquad (3)$$

где G, Q – заданные квадратные матрицы размерности $n \times n$, $n = \sum_{k=1}^{L} n_k$, причем ранг расширенной матрицы (G, Q): $\mathrm{rank}(G, Q) = n$;

$r=(r^1,...,r^n)^*$ – заданный n- мерный вектор, *– знак транспонирования.

Задача (1), (2) характеризуется следующими специфическими особенностями: 1) подсистемы дифференциальных уравнений системы (1) взаимно не зависимы, 2) решения подсистем $u^k(x),\ k=1,...,L,$ связывают неразделенные краевые условия, характеризуемые слабо, но произвольно заполненными матрицами связей G,Q; 3) большим числом подсистем (L), а следовательно, большим порядком n системы (1) в целом; 4) в реальных задачах имеет место соотношение $n>>n_k,\ k=1,...,L$. Для численного решения разработана и обоснована схема метода переноса краевых условий, позволившая производить перенос условий поблочно, а не для всей системы одновременно. Это существенно повышает эффективность решения задачи в сравнении с использованием известных схем метода переноса.

Пусть в S-м условии из (2) первым отличным от нуля коэффициентом при левых значениях решений всех подсистем, т.е. при $x=0$, является G^{sk}, т.е., $G^{sk}\neq 0_{n_k}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что n_k –мерная вектор–функция $\alpha^{sk}(x)$ и функция $\beta^{sk}(x)$ такие, что

$$\alpha^{sk}(0)=G^{sk},\quad \beta^{sk}(0)=r^s, \tag{4}$$

осуществляют перенос левого граничного значения решения k-й подсистемы (1) в s-м условии из (2) вправо, если для произвольного решения $u^k(x)$ k-й подсистемы (1) для всех $x\in[0,l^k]$ имеет место равенство

$$\alpha^{sk^*}(x)u^k(x)+\left[\sum_{j=k+1}^{L}G^{sj^*}u^j(0)+\sum_{j=1}^{L}Q^{sj^*}u^j(l^j)\right]=\beta^{sk}(x). \tag{5}$$

Ясно, что условие (5), учитывая (4), при $x=0$ совпадает с s-м условием (2). Функции $\alpha^{sk}(x)$, $\beta^{sk}(x)$ будем называть прогоночными. Подставляя значения функций $\alpha^{sk}(x)$, $\beta^{sk}(x)$ при $x = l^k$ в (5), получим равенство, эквивалентное s-му условию из (2)

$$\sum_{j=k+1}^{L} G^{sj^*} u^j(0) + \sum_{j=1}^{L} \tilde{Q}^{sj^*} u^j(l^j) = \tilde{r}^s,$$

где обозначено $\tilde{Q}^{sk} = Q^{sk} + \alpha^{sk}(l^k)$, $\tilde{r}^s = \beta^{sk}(l^k)$, $\tilde{Q}^{sj} = Q^{sj}$, $j = 1,\dots,L,\ j \neq k$. Прогоночные функции $\alpha^{sk}(x)$, $\beta^{sk}(x)$, используемые для переноса с одного конца в другой граничных значений решений подсистем, участвующих в краевых условиях (3), не единственны. В частности, конструктивное их построение предложено в следующей теореме.

Теорема 1.1. Если $G^{sk} \neq 0_{n_k}$ и n_k- мерная вектор-функция $\alpha^{sk}(x)$ и функция $\beta^{sk}(x)$ при $x \in (0, l^k]$ являются решением следующих задач Коши:

$$\dot{\alpha}^{sk}(x) = -A^{k^*}(x)\alpha^{sk}(x), \qquad \alpha^{sk}(0) = G^{sk}, \tag{6}$$

$$\dot{\beta}^{sk}(x) = B^{k^*}(x)\alpha^{sk}(x), \qquad \beta^{sk}(0) = r^s,$$

тогда эти функции являются прогоночными коэффициентами для левого граничного значения произвольного решения k-й подсистемы (1) в s-м условии, а, следовательно, удовлетворяют условию (5) при $x \in [0, l^k]$.

Важно отметить, что, как следует из определения 1.1 и теоремы 1.1 прогонка левого значения решения k-й подсистемы в s-м условии осуществляется только в случае, если соответствующий коэффициент в этом условии отличен от нуля.

Аналогично правой прогонке, приведен метод прогонки влево.

Пусть в s-м условии из (2) первым отличным от нуля коэффициентом при правых значениях решений всех подсистем является Q^{sk}, т.е., $Q^{sk} \neq 0_{n_k}$.

Определение 1.2. Будем говорить, что n_k - мерная вектор-функция $\alpha^{sk}(x)$ и функция $\beta^{sk}(x)$ такие, что

$$\alpha^{sk}(l^k) = Q^{sk}, \quad \beta^{sk}(l^k) = r^s, \tag{7}$$

осуществляют перенос правого граничного значения решения k -й подсистемы (1) в s-м условии из (2) влево, если для произвольного решения $u^k(x)$ k-й подсистемы (1) для всех $x \in [0, l^k]$ имеет место равенство:

$$\alpha^{sk^*}(x)u^k(x) + \left[\sum_{j=1}^{L} G^{sj^*} u^j(0) + \sum_{j=k+1}^{L} Q^{sj^*} u^j(l^j)\right] = \beta^{sk}(x). \tag{8}$$

Ясно, что условие (8) при $x = l^k$, учитывая (7), совпадает с s-м условием из (2). Если такие прогоночные функции будут известны, то равенство (8) при $x = 0$ примет вид:

$$\sum_{j=1}^{L} \tilde{G}^{sj^*} u^j(0) + \sum_{j=k+1}^{L} Q^{sj^*} u^j(l^j) = \tilde{r}^s, \tag{9}$$

где $\tilde{G}^{sk} = G^{sk} + \alpha^{sk}(0),\ \tilde{G}^{sj} = G^{sj},\ \tilde{r}^s = \beta^{sj}(0),\ j = 1,...,L,\ j \neq k$. В условии (9), эквивалентном s-му условию (2), участвует на одну n_k - мерную переменную, заданную в правом конце, меньше, чем до переноса.

Аналогичная теореме 1.1 имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. Если $Q^{sk} \neq 0_{n_k}$ и n_k-мерная вектор-функция $\alpha^{sk}(x)$ и функция $\beta^{sk}(x)$ при $x \in [0, l^k]$ являются решением следующих задач Коши:

$$\dot{\alpha}^{sk}(x) = -A^{k^*}(x)\alpha^{sk}(x), \quad \alpha^{sk}(l^k) = Q^{sk},$$

$$\dot{\beta}^{sk}(x) = B^{k^*}(x)\alpha^{sk}(x), \quad \beta^{sk}(l^k) = r^s, \tag{10}$$

тогда эти функции являются прогоночными коэффициентами для правого граничного значения произвольного решения k-й подсистемы (1) в s-м условии (2), а следовательно они удовлетворяют условию переноса (8).

Отметим, что преимущество метода переноса, требующего решения вспомогательных векторных задач Коши, по сравнении с известным подходом с использованием фундаментальной матрицы, требующего решения матричной задачи Коши размерности ($n \times n$) заключается в том, что в реальных задачах из имеющихся n условий, как правило, только несколько могут являтся нелокальными, остальные бывают заданы в одном из концов.

Преимущество предлагаемого подхода в сравнении с непосредственным использованием методов переноса в общем виде очевидно, т.к. здесь перенос осуществляется только относительно тех переменных, коэффициенты которых в краевых условиях отличны от нуля, при этом перенос осуществляется с применением только той подсистемы дифференциальных уравнений, в которой участвует переносимая переменная.

К математической постановке (1), (2) приводится, например, задача расчета искусственных динамических нейронных сетей, имеющие сложную структуру и большую размерность, задача расчета неустановившихся процессов движения жидкости, газа в трубопроводных сетях сложной структуры и др.

В 1.3 исследуется численный подход к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, связанных лишь неразделенными граничными условиями. К такой задаче приводит, например, применение метода прямых к расчету колебательных процессов и процессов теплопередачи в многозвенных связанных структурах, описываемых гиперболическими и параболическими уравнениями второго порядка. Спецификой рассматриваемой системы уравнений является то, что сами уравнения предполагаются независимыми друг от друга, т.е. участвующие в них функции связаны только краевыми условиями. Математическая постановка рассматриваемой задачи представляется в общем случае как двухточечная задача относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Для численного решения задачи, вообще говоря, возможно использование различных известных схем метода прогонки. Для эффективного численного решения задачи предложен подход, основанный на идее переноса условий, но существенно использующий специфические особенности задачи. Это позволило осуществлять перенос краевого условия для каждого уравнения системы отдельно, независимо от других уравнений системы. В результате задача сводится к решению алгебраической системы уравнений того порядка, что и исходная система дифференциальных уравнений. Существенно то, что предполагаемый подход легко распараллеливается. Приводятся полученные формулы, схемы решения. Рассматриваемая в диссертации иллюстративная тестовая задача получена в результате применения метода прямых для расчета режимов движения жидкости на примере фрагмента сложной трубопроводной транспортной сети.

В 1.4 предложен декомпозиционный подход к решению линейных дискретных блочно трехдиагональных систем с неразделенными между блоками краевыми условиями.

Математические модели многих больших объектов сложной структуры характеризуются следующими особенностями:

1) большим числом подобъектов L;
2) большой размерностью вектора состояния подобъектов или большой длительностью функционирования n_k, $k=1,...,L$;
3) слабыми и произвольными взаимосвязями между подобъектами.

Особенности 1), 2) для реальных объектов приводят к тому, что порядок алгебраической системы, может превышать несколько тысяч и даже десятки тысяч. Особенность 3) приводит к неразделенным краевым условиям, что вызывает необходимость использовать методы переноса краевых условий.

Рассмотрим блочно трехдиагональную систему уравнений:

$$A_i^k y_{i+1}^k - C_i^k y_i^k + B_i^k y_{i-1}^k = -F_i^k, \quad i=1,...,n_k-1, \quad k=1,...,L. \qquad (11)$$

Здесь $y^k = \left(y_0^k, ..., y_{n_k}^k\right)^* - (n_k + 1)$-мерный вектор, определяющий состояние $k-$го процесса (подсистемы); A_i^k, B_i^k, C_i^k и F_i^k – заданы; n_k – длительность $k-$го процесса, $k = 1,...,L$.

Введем обозначения

$$n = \sum_{k=1}^{L} n_k - L\,, \quad m = 2L, \quad M = n + m\,,$$

$$(y_0, y_1) = ((y_0^1, ..., y_0^L)^*, (y_1^1, ..., y_1^L)^*) \in R^m, \qquad r = \left(r^1, ..., r^m\right)^*,$$

$$(y_{n-1}, y_n) = ((y_{n_1-1}^1, ..., y_{n_L-1}^L)^*, (y_{n_1}^1, ..., y_{n_L}^L)^*) \in R^m.$$

Здесь $M-$число неизвестных в системе (11), состоящей из L подсистем (блоков), с общим числом n уравнений, y_0, y_1 и y_n, y_{n-1} – соответственно состояния всех подпроцессов в начальные и конечные (индивидуальный для каждого подпроцесса) моменты времени.

Рассматриваемые подпроцессы связаны между собой посредством m начальных и конечных состояний в виде неразделенных между блоками краевых условий, заданных в виде:

$$\sum_{j=1}^{L}\left[g_l^{sj} y_{n_j}^j + q_l^{sj} y_{n_j-1}^j\right] + \sum_{j=1}^{L}\left[g_0^{sj} y_1^j + q_0^{sj} y_0^j\right] = r^s, \quad s = \overline{1,m}\,. \qquad (12)$$

Учитывая специфику структуры системы, получены формулы для переноса значений начальных и конечных переменных в краевых условиях, который осуществляется поблочно независимо друг от друга. В результате получается алгебраическая система, размерность которой определяется числом подсистем, а неизвестными являются только значения начальных или конечных переменных всех подсистем.

Определение 1.5. Будем говорить, что параметры α_i^{sk}, β_i^{sk}, γ_i^{sk}, $i = 1,...,n_k$, осуществляют перенос вправо левого значения решения k-й подсистемы (11) в s-м условии, если для любого решения k-й подсистемы (11) имеют место равенства

$$\alpha_i^{sk} y_i^k + \beta_i^{sk} y_{i+1}^k + \sum_{j=k+1}^{L} g_0^{sj} y_1^j + \sum_{j=k+1}^{L} q_0^{sj} y_0^j + \sum_{j=1}^{L} g_l^{sj} y_{n_j}^j + \sum_{j=1}^{L} q_l^{sj} y_{n_j-1}^j = \gamma_i^{sk}, \quad (13)$$

$$\alpha_0^{sk} = q_0^{sk}, \quad \beta_0^{sk} = g_0^{sk}, \quad \gamma_0^{sk} = r^s. \quad (14)$$

Теорема 1.6. Если g_0^{sk} и q_0^{sk} одновременно не равны нулю, тогда определенные из рекуррентных соотношений переменные $\alpha_i^{sk}, \beta_i^{sk}, \gamma_i^{sk}$:

$$\alpha_i^{sk} = \beta_{i-1}^{sk} + \alpha_{i-1}^{sk} \frac{C_i^k}{B_i^k}, \ \alpha_0^{sk} = q_0^{sk},$$

$$\beta_i^{sk} = (\beta_{i-1}^{sk} - \alpha_i^{sk}) \frac{A_i^v}{C_i^v}, \beta_0^{sk} = g_0^{sk},$$

$$\gamma_i^{sk} = \gamma_{i-1}^{sk} + (\alpha_i^{sk} - \beta_{i-1}^{sk}) \frac{F_i^k}{C_i^k}, \gamma_0^{s1} = r^s, \quad i = 1, \dots, n_k, \quad (15)$$

$$\gamma_0^{sk+1} = \gamma_{n_k}^{sk},$$

являются прогоночными коэффициентами левого значения в s-м условии (12) относительно решения k-й подсистем уравнений системы (11). Аналогично выведены формулы и доказана теорема для прогонки влево.

В 1.5. исследуется решение линейных дискретных двухшаговых блочно-диагональных систем уравнений большой размерности с подсистемами, связанными лишь граничными условиями между блоками. Учитывая специфику структуры системы, получены формулы для переноса значений начальных и конечных переменных в краевых условиях, который осуществляется поблочно независимо друг от друга. В результате получается алгебраическая система, размерность которой определяется числом блоков, а неизвестными являются только значения начальных или конечных переменных всех блоков.

В 1.6 исследуется численное решение системы независимых гиперболических уравнений, связанных лишь неразделенными краевыми условиями. Аппроксимируя систему дифференциальных уравнений, начальные и краевые условия, получена система трехдиагональных алгебраических уравнений, для решения которой использован метод прогонки, приведенный в 1.4.

В 1.7 исследуется численное решение задачи оптимального управления сложным объектом, описываемым системой ОДУ большой размерности блочной структуры с блоками, связанными только краевыми условиями. Получены необходимые условия оптимальности, в которых сопряженная задача имеет такую же специфику, что и прямая задача. Для решения задачи оптимального управления предлагается применить численные методы оптимизации первого порядка, использующие формулы градиента функционала, участвующие в необходимых условиях оптимальности. Для решения прямой и сопряженной начально-краевых задач, имеющих блочную структуру и неразделенные нелокальные краевые условия со слабо заполненной матрицей Якоби, использованы предложенные выше специальные схемы метода прогонки, учитывающие специфику систем дифференциальных уравнений и краевых условий, позволяющие производить перенос краевых условий для каждого блока в отдельности.

В 1.8 приводятся результаты численных экспериментов, проведенных на примерах решения тестовых задач соответствующих задачам, рассмотренных в первой главе.

Вторая глава, состоящая из пяти параграфов, посвящена исследованию длительности времени влияния начальных условий на состояние эволюционного процесса с применением численных методов на примере конкретных краевых задач и соответствующих задач оптимального управления эволюционными процессами с неточно заданными начальными условиями.

В 2.1 исследуется решение краевых задач относительно эволюционных процессов, описываемых параболическими уравнениями при неточно заданных начальных условиях.

Рассматривается начально-краевая задача относительно процесса нагрева ограниченного по длине стержня:

$$u_t = au_{xx} + f(x,t), \quad t_0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \tag{16}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{17}$$

Предполагается, что начальное состояние процесса точно неизвестно, но кусочно-непрерывные функции

$$u(x,t_0) = u_0(x) = u_0(x;\gamma), \qquad x \in [0,l], \tag{18}$$

которые могли бы быть начальными для процесса, зависят от $r-$мерного вектора параметров $\gamma \in R^r$, значения которых принадлежат некоторому заданному допустимому множеству D:

$$D = \{\gamma \in R^r : \underline{\gamma_i} \le \gamma_i \le \bar{\gamma}_i,\ i = 1,...,r\}. \tag{19}$$

При этом предполагается заданной функция $\rho_D(\gamma)$ плотности распределения параметров γ начального состояния на множестве D. Здесь $\underline{\gamma_i}, \bar{\gamma}_i -$ заданные числа; $a > 0 -$ коэффициент температуропроводности; $u(x,t) -$ температура стержня в точке $x \in [0,l]$ в момент времени $t \in [t_0, T]$; $f(x,t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ - заданные непрерывные функции.

Классическое решение задачи (16)-(18) предполагается непрерывным всюду в замкнутой области, в частности, требует согласования начальных и краевых условий. Условие непрерывности начальных функций является весьма ограничительным для практических приложений. Для рассматриваемых в (18) начальных функций с параметрами из D выполнение условий сопряжения (начальных условий с краевыми) не предполагается.

Действительно, если рассмотреть простейшую задачу об остывании равномерно нагретого стержня при нулевой температуре на краях и $u_0(x) \ne 0$, то решение задачи непрерывное в замкнутой области должно быть разрывным в точках $(0,t_0)$ и (l,t_0). Этот пример показывает, что условие непрерывности начального значения и условия сопряжения его с граничными значениями исключают из рассмотрения практически важные случаи. Пользуясь функцией, являющейся фундаментальным решением уравнения теплопроводности, построенной Тихоновым А.Н.[1], можно однозначно определить решение задачи для случая, когда начальная функция $u_0(x,\gamma)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных функций. Ясно, что для всех начальных функций с параметрами из D удовлетворяются условия существования и единственности решения соответствующей начально-краевой задачи. Из вида и свойства фундаментального решения следует, что, если интересующий нас момент достаточно удален от начального, то с течением времени влияние начальных условий на распространение температуры по стержню ослабевает и температура стержня практически определяется лишь значениями граничных условий.

В 2.2 численными экспериментами подтвержден известный факт, что при достаточно больших значениях времени протекания процесса влияние начальных условий на текущее его состояние уменьшается. Проведен качественный анализ длительности времени влияния начальных условий в зависимости от значений параметров и функций, участвующих в математической модели исследуемого процесса, а также диапазона изменения возможных значений начальных и краевых условий.

Численными экспериментами было установлено, что текущее состояние процесса после некоторого момента времени τ в основном зависит от краевых условий, действующих мощностей внутренних или внешних источников и мало зависит от множества возможных начальных состояний с параметрами из D.

---

[1] Тихонов, А.Н., Самарский, А.А. Уравнения математической физики. М. «Наука», –1977, стр. 736.

В 2.3 получено аналитическое представление решения начально-краевой задачи, описывающей по И.А. Чарному[2] нестационарное движение жидкости на линейном участке трубопровода:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\rho}{S}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + 2a\dfrac{\rho}{S}Q(x,t), \\ -\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} = c^2\dfrac{\rho}{S}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \quad (x,t) \in \Omega = (0,l)\times(0,T]. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь $P(x,t)$, $Q(x,t)$ – давление и расход жидкости в точке $x \in (0,l)$ трубопровода в момент времени $t > 0$; l –длина рассматриваемой линейной части трубопровода; $a = 16\nu/d^2$, d – внутренний диаметр трубопровода, S –площадь поперечного сечения участка трубопровода, ρ –плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, который для капельной жидкости можно считать, что он не зависит от давления, а следовательно $a = const$; c – скорость звука в исследуемой жидкости; T – заданная длительность времени исследования режимов функционирования процесса.

Из-за очень сложного вида полученного аналитического представления решения проводить какой-либо качественный анализ его поведения, исследовать зависимость длительности времени влияния начальных условий от факторов и параметров, участвующих в постановке, невозможно даже в случае лишь одного линейного участка, не говоря уже о случае сложной закольцованной структуры трубопроводной сети.

В 2.4 численными методами проведен анализ длительности времени влияния начальных условий на нестационарный режим движения жидкости на линейном участке трубопровода при заданных граничных условиях (режимах) и зависимости этой длительности от значений самих начальных условий, от геометрических размеров трубопровода, свойства

[2] Чарный, И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1981, с. 232.

перекачиваемой жидкости, а также граничных режимов. Длительность времени влияния начальных условий на процесс практически слабо зависит от самих значений начальных режимов (условий). При увеличении коэффициента трения, длительность времени влияния начальных условий растет, причем скорость роста времени влияния одинакова с ростом величины a.

Выявленные закономерности имеют важное значение при расчетах, прогнозировании, оптимизации переходных режимов, возникающих по различным техническим и технологическим причинам при транспортировке углеводородного сырья по магистральным трубопроводам.

В 2.5 проведено исследование постановок задач оптимального управления краевыми условиями эволюционных процессов, функционирующими длительное время, в связи с чем отсутствует точная информация о их начальном состоянии (начальных условиях). В этой связи важную роль играют лишь управляющие краевые условия.

В 2.5.1 исследуются задачи оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями параболического типа при отсутствии точной информации о начальных значениях состояния процесса. В качестве иллюстрации рассматривается процесс теплопроводности (16).

Проведено численное решение задачи, в которой, управляя температурами $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ t \in (0,T]$, определяющих краевые условия, к заданному моменту $T > 0$ распределение температуры в стержне необходимо привести как можно ближе к заданному распределению $U(x),\ 0 \le x \le l$, т.е. функционал, заданный, например, в виде:

$$J(\mu) = \int_D I(\mu,\gamma)\rho_D(\gamma)d\gamma \to \min, \qquad (21)$$

$$I(\mu,\gamma) = \int_0^l (u(x,T;\mu,\gamma) - U(x))^2 dx + \alpha \|\mu(t)\|^2_{L_2[0,T]}$$

принял минимальное значение. Здесь $u(x,T;\mu,\gamma)$ решение задачи (16) – (19) при заданных параметре $\gamma \in D$ в начальном условии $u(x,0)=\varphi(x;\gamma)$ и допустимом управлении $\mu(t) \in L_2[0,T]$. На основании численных экспериментов проведен анализ зависимости поведения полученных оптимальных краевых условий от изменения множества возможных начальных условий.

В 2.5.2 исследуется задача оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями гиперболического типа при отсутствии точной информации о начальных значениях состояния процесса. В качестве иллюстрации рассматривается волновой процесс.

Для соответствующих задач оптимального управления, рассмотренных в 2.5.1 и 2.5.2, получены аналитические формулы для градиентов соответствующих целевых функционалов. Эти формулы позволяют для решения задач использовать эффективные численные методы оптимизации первого порядка. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях, связанных с управлением многими длительно функционирующими процессами с распределенными параметрами, описываемые системами уравнений с частными производными.

В 2.5.3 приводятся результаты численных экспериментов, проведенных на примерах решения модельных задач.

Третья глава, состоящая из пяти параграфов, посвящена моделированию и расчету переходных процессов, возникающих при транспортировке жидкости в трубопроводных сетях сложной структуры.

В 3.1 приведен сравнительный анализ результатов исследований по численному моделированию режимов неустановившегося движения жидкостей в трубопроводах.

В 3.2 рассматривается постановка задачи расчета режимов переходных процессов в нефтепроводах сложной закольцованной структуры. Движение жидкости на каждом линейном участке по Чарному И.А. достаточно адекватно может быть описано системой двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа. В точках соединения участков имеются неразделенные краевые условия, определяемые аналогом первого закона Кирхгофа.

Рассматривается неустановившийся режим течения жидкости для достаточно общего случая сложной закольцованной гидравлической сети, содержащей M участков и N вершин. Введем следующие обозначения: I – множество вершин; $J = \{(k,s): k,s \in I\}$ – множество участков; I_k^+ – множество номеров вершин, от которых ведут участки к k-й вершине; I_k^- – множество номеров вершин, к которым ведут участки из k-й вершины; $I_k = I_k^+ \bigcup I_k^-$ – множество вершин, смежных с k-й вершиной.

Неустановившееся изотермическое движение капельной жидкости при ламинарном режиме с постоянной плотностью ρ на (k,s)-м линейном участке нефтепроводной сети длиной l^{ks} диаметра d^{ks} достаточно адекватно можно описать следующей линеаризованной по Чарному И.А. гиперболической системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P^{ks}(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\rho}{S^{ks}} \dfrac{\partial Q^{ks}(x,t)}{\partial t} + 2a^{ks} \dfrac{\rho}{S^{ks}} Q^{ks}(x,t), \\ -\dfrac{\partial P^{ks}(x,t)}{\partial t} = c^2 \dfrac{\rho}{S^{ks}} \dfrac{\partial Q^{ks}(x,t)}{\partial x}, x \in (0,l^{ks}), t \in (0,T], \end{cases} \quad s \in I_k^+, \ k \in I. \quad (22)$$

Здесь: $t \in (t_0,T]$; $s \in I_k^+$, $k \in I$; $P^{ks}(x,t)$, $Q^{ks}(x,t)$ – давление и расход жидкости в момент времени t в точке $x \in (0,l^{ks})$ (k,s)-го участка трубопроводной сети; c –скорость звука в среде; S^{ks} – площадь внутреннего сечения (k,s)-го участка трубопровода; a^{ks} – коэффициент сопротивления на (k,s)-м участке (в случае ламинарного режима можно считать, что коэффициент кинематической вязкости ν не зависит от давления, и тогда имеет место $2a^{ks} = 32\nu / (d^{ks})^2 = const$).

Для системы (22) должны быть заданы $2M$ краевых условий. Для множества I^{int} внутренних вершин сети используем условия материального баланса

$$\sum_{s \in I_k^+} Q^{ks}(l^{ks}, t) - \sum_{s \in I_k^-} Q^{ks}(0, t) = \tilde{q}^k(t), \;\; k \in I^{\text{int}}, \quad t \in [t_0, T], \tag{23}$$

и непрерывности потока:

$$P^{\hat{k}k}(l^{\hat{k}k}, t) = P^{k\breve{k}}(0, t), \;\; \hat{k} \in I_k^+, \;\; \breve{k} \in I_k^-, \;\; k \in I^{\text{int}}, \;\; t \in [t_0, T], \tag{24}$$

где $\tilde{q}^k(t) -$заданный внешний приток $(\tilde{q}^k(t) > 0)$ или отток $(\tilde{q}^k(t) < 0)$ для k-й внутренней вершины.

В каждой вершине из $I^f = I \setminus I^{\text{int}}$, не являющейся внутренней вершиной сети, зададим величину давления (множество таких вершин обозначим через $I_p^f \subset I^f$) или расхода (множество $I_q^f \subset I^f$). Тогда к условиям (23), (24) добавятся следующие условия:

$$\begin{cases} P^{ns}(0, t) = \tilde{P}^n(t), & s \in I_n^+, \; если \, I_n^- = \varnothing, \\ P^{sn}(l^{sn}, t) = \tilde{P}^n(t), & s \in I_n^-, \; если \, I_n^+ = \varnothing, \end{cases} \quad n \in I_p^f, \; t \in [t_0, T], \tag{25}$$

$$\begin{cases} Q^{ms}(0, t) = \tilde{Q}^m(t), & s \in I_m^+, \; если \, I_m^- = \varnothing, \\ Q^{sm}(l^{sm}, t) = \tilde{Q}^m(t), & s \in I_m^-, \; если \, I_m^+ = \varnothing, \end{cases} \quad m \in I_q^f, \;\; t \in [t_0, T], \tag{26}$$

причем важно, чтобы соблюдались условия: $I^f = I_q^f \bigcup I_p^f$, $I_q^f \bigcap I_p^f = \varnothing, \;\; I_p^f \neq \varnothing$.

В 3.3 исследованы численные схемы расчета неустановившихся режимов движения жидкости в трубопроводных сетях.

В 3.3.1 предложена схема численного расчета режимов движения жидкости по трубопроводу, основанная на применении метода прямых и сведении задачи к краевой задаче относительно систем ОДУ с неразделенными краевыми условиями, для решения которой в первой главе предложена схема метода переноса краевых условий.

В 3.3.2 предложена схема численного расчета режимов движения жидкости по трубопроводу, основанная на применении метода сеток. Были исследованы схемы применения метода сеток в двух вариантах уравнения движения жидкости. В первом варианте система двух дифференциальных уравнений на каждом участке приведена к уравнению второго порядка. Аппроксимируя краевую задачу вместе с начальными и граничными условиями, получена система блочно-трехдиагональных алгебраических уравнений с неразделенными краевыми условиями, для решения которой использована схема переноса краевых условий, предложенная в первой главе.

Во втором варианте использована конечно-разностная аппроксимация непосредственно системы (22). Предложена схема численного расчета режимов движения жидкости по трубопроводу, основанная на применении неявных методов сеток, разработаны алгоритмы, основанные на полученных формулах, определяющие функциональные зависимости значений искомых функций в текущих точках от краевых значений на левых или на правых концах соответствующих участков.

На множестве $[0,l^{ks}]\times[0,T]$, $(k,s)\in J$ введем равномерные сеточные области:

$$\begin{gathered}\omega^{ks}=\{(x_i,t_j):\ x_i=ih,\ t_j=j\tau,\ i=\overline{0,n_{ks}},\ j=\overline{0,n_t}\},\\ n_{ks}=[l^{ks}/h],\quad n_t=[T/\tau],\end{gathered}\tag{27}$$

где h,τ – заданные положительные числа, определяющие шаги сетки; [a] –целая часть числа a. Используя следующие обозначения:

$$\lambda^{ks}=(\frac{h}{\tau}+2a^{ks}h),\qquad \mu=\frac{h}{\tau},\qquad \eta=\frac{h}{\tau c^2},\qquad P_{ij}^{ks}=P^{ks}(x_i,t_j),$$

$Q_{ij}^{ks}=\dfrac{\rho}{S^{ks}}Q^{ks}(x_i,t_j)$, $\tilde q_j^k=\tilde q^k(t_j)$, и применяя устойчивую неявную метода сеток для аппроксимации системы (22) на шаблоне $(i, j-1), (i, j), (i-1, j)$ или на $(i, j-1), (i, j), (i+1, j)$, после несложных преобразований получим:

$$\begin{cases} P_{i-1j}^{ks} = P_{ij}^{ks} + \lambda^{ks} Q_{ij}^{ks} - \mu Q_{ij-1}^{ks}, \\ Q_{i-1j}^{ks} = Q_{ij}^{ks} + \eta P_{ij}^{ks} - \eta P_{ij-1}^{ks}, \quad i = \overline{n_{ks}, 1}, \quad s \in I_k^+, \ k \in I, \end{cases} \tag{28}$$

или

$$\begin{cases} P_{i+1j}^{ks} = P_{ij}^{ks} - \lambda^{ks} Q_{ij}^{ks} + \mu Q_{ij-1}^{ks}, \\ Q_{i+1j}^{ks} = Q_{ij}^{ks} - \eta P_{ij}^{ks} + \eta P_{ij-1}^{ks}, \quad i = \overline{0, n_{ks}-1}, \quad s \in I_k^+, \ k \in I. \end{cases} \tag{29}$$

Для прогонки условий (23)-(27) с левого конца в правый на каждом j-м временном слое для (k,s)-го участка получены функциональные зависимости:

$$P_{0j}^{ks} = R(P_{n_{ks}j}^{ks}, Q_{n_{ks}j}^{ks}), \quad Q_{0j}^{ks} = G(P_{n_{ks}j}^{ks}, Q_{n_{ks}j}^{ks}), \quad (k,s) \in J, \tag{30}$$

которые названы формулами правой прогонки, а для прогонки условий с правого конца в левый получены зависимости:

$$P_{n_{ks}j}^{ks} = R(P_{0j}^{ks}, Q_{0j}^{ks}), \quad Q_{n_{ks}j}^{ks} = G(P_{0j}^{ks}, Q_{0j}^{ks}), \quad (k,s) \in J, \tag{31}$$

названные формулами левой прогонки.

Для этой цели для правой прогонки построены зависимости в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{0j} &= \alpha_i^p P_{ij} + \beta_i^p Q_{ij} + \theta_i^p, \\ Q_{0j} &= \alpha_i^q Q_{ij} + \beta_i^q P_{ij} + \theta_i^q, \end{aligned} \qquad i = \overline{1, n}, \tag{32}$$

где $\alpha_i^p, \ \beta_i^p, \ \theta_i^p, \quad \alpha_i^q, \ \beta_i^q, \ \theta_i^q$ – прогоночные коэффициенты, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} \alpha_p^{ks(r+1)} = \alpha_p^{ks(r)} + \eta \beta_p^{ks(r)}, & \alpha_p^{ks(1)} = 1, \\ \beta_p^{ks(r+1)} = \alpha_p^{ks(r)} \lambda^{ks} + \beta_p^{ks(r)}, & \beta_p^{ks(1)} = \lambda^{ks}, \\ \theta_p^{ks(r+1)} = \theta_p^{ks(r)} - \alpha_p^{ks(r)} \mu Q_{r+1j-1}^{ks} - \beta_p^{ks(r)} \eta P_{r+1j-1}^{ks}, & \theta_p^{ks(1)} = -\mu Q_{1j-1}^{ks}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_q^{ks(r+1)} = \alpha_q^{ks(r)} + \lambda^{ks}\beta_q^{ks(r)}, & \alpha_q^{ks(1)} = 1, \\ \beta_q^{ks(r+1)} = \beta_q^{ks(r)} + \eta\alpha_q^{ks(r)}, & \beta_q^{ks(1)} = \eta, \\ \theta_q^{ks(r+1)} = \theta_q^{ks(r)} - \alpha_q^{ks(r)}\eta P_{r+1j-1}^{ks} - \beta_q^{ks(r)}\mu Q_{r+1j-1}^{ks}, & \theta_q^{ks(1)} = -\eta P_{1j-1}^{ks}, \end{cases} \quad (33)$$

$r = \overline{1, n_{ks} - 1},\ s \in I_k^+, k \in I.$

В результате, согласно формулам (32), получены следующие выражения для $r = n_{ks}$ в случае правой прогонки:

$$\begin{aligned} P_{0j}^{ks} &= \alpha_p^{ks(n_{ks})} P_{n_{ks}j}^{ks} + \beta_p^{ks(n_{ks})} Q_{n_{ks}j}^{ks} + \theta_p^{ks(n_{ks})}, \\ Q_{0j}^{ks} &= \alpha_q^{ks(n_{ks})} Q_{n_{ks}j}^{ks} + \beta_q^{ks(n_{ks})} P_{n_{ks}j}^{ks} + \theta_q^{ks(n_{ks})}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичные формулам (32), (33), (34) строятся формулы для варианта левой прогонки. В формулах (33) значения искомых функций на левом конце выражены с помощью их значений на правом конце $(k,s)-$того участка. Проводя операцию переноса условий для всех участков $(k,s) \in J$ в один конец: правый (или левый), подставляя полученные выражения (34) в (23)-(26), для всех участков получим все $2M$ условий только на одних левых (правых) концах интервалов $(0, l_{ks})$, $(k,s) \in J$:

$$\alpha_q^{ks(0)} Q_{0j}^{ks} + \beta_q^{ks(0)} P_{0j}^{ks} + \theta_q^{ks(0)} = \tilde{Q}_s(t_j), \quad s \in I_k^+, \quad k \in I_q^f,$$

$$\alpha_p^{ks(0)} P_{0j}^{ks} + \beta_p^{ks(0)} Q_{0j}^{ks} + \theta_p^{ks(0)} = \tilde{P}_s(t_j), \quad s \in I_k^+, \quad k \in I_p^f,$$

$$\alpha_p^{\hat{k}k(0)} P_{0j}^{\hat{k}k} + \beta_p^{\hat{k}k(0)} Q_{0j}^{\hat{k}k} + \theta_p^{\hat{k}k(0)} = P_{0j}^{k\breve{k}}, \quad \forall \hat{k} \in I_k^+, \ \breve{k} \in I_k^-, \ k \in I,$$

$$\sum_{s \in I_k^+} \alpha_q^{ks(0)} Q_{0j}^{sk} + \beta_q^{ks(0)} P_{0j}^{ks} + \theta_q^{ks(0)} - \sum_{s \in I_k^-} Q_{0j}^{ks} = \tilde{q}_k(t_j), \qquad k \in I.$$

Эти условия можно записать в компактной форме в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений порядка $2M$:

$$AX = B, \quad (35)$$

где $X = (x_1, ..., x_{2M})^*$ $(x_s = P_{n_{r_s}}^{r_s}$, $s = 1,..,M$, $x_s = Q_{n_{r_s}}^{r_s}$, $s = M+1,..,2M$ в случае левой или $x_s = P_{0r_s}^{r_s}$, $s = 1,..,M$, $x_s = Q_{0r_s}^{r_s}$ $s = M+1,..,2M$ в случае правой прогонки), A-матрица размерности $2M \times 2M$, B-

вектор размерности $2M$. Решая систему (35) каким-либо численным методом, находятся значения давления и расхода на правых (или левых) концах соответствующих интервалов (участков) $(0,l^{ks}),\ (ks)\in J$. Таким образом, задача (22)-(26) с неразделенными краевыми условиями приведена к задаче со всеми условиями на одном конце, для решения которой с использованием формул (32) можно найти значения давления и расхода во всех точках интервалов $(0,l^{ks}),\ (ks)\in J$.

В 3.4 приведено описание численной схемы расчета режимов течения жидкости для конкретной трубопроводной сети.

В 3.5 проведены численные эксперименты на примере решения модельных задач с применением предложенных подходов, приведен анализ полученных результатов.

Четвертая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена численному решению задачи оптимального управления переходными процессами в сложных гидравлических сетях.

В 4.1 исследуется постановка задачи оптимального управления переходным процессом в трубопроводной сети сложной структуры. Она заключается в управлении краевыми условиями (насосными станциями, установленными в начале и конце участка) для перевода режима движения на участках сети из начального стационарного состояния в требуемое конечное стационарное состояние, оптимизируя заданный критерий.

В качестве критериев управления переходными режимами на трубопроводной сети могут выступать различные показатели. Нами принято суммарное значение двух показателей: продолжительность времени переходного процесса (быстродействие) и интегральная величина отклонения значений функции состояния от заранее заданных режимов:

$$J(\upsilon,T)=T+r_1\sum_{k\in I}\sum_{s\in I_k^+}\int_0^{l^{ks}}(Q^{ks}(x,T;\upsilon)-Q_T^{*ks})^2\,dx+r_2\sum_{k\in I}\sum_{s\in I_k^+}\int_0^{l^{ks}}(P^{ks}(x,T;\upsilon)-P_T^{*ks}(x))^2\,dx.$$

Здесь r_1,r_2 – заданные весовые коэффициенты, значения которых определяются условиями желаемого установления.

В 4.2 рассмотрена задача оптимального быстродействия управлением переходным процессом за счет краевых условий. Для ее решения возможно использовать два метода. В первом методе для оптимизации T используются методы одномерной минимизацции, а при каждом текущем значении T при одномерной минимизации решается задача

$$J_T^{\,opt} = J(\upsilon_T^{opt}, T) = \min_{\upsilon} J(\upsilon, T),$$

для чего используются численные методы оптимального управления с фиксированным временем окончания процесса. В другом методе, считая время T оптимизируемым параметром, по нему получена находится формула для производной функционала. Далее используются методы оптимизации первого порядка для одновременной совместной оптимизации T и $\upsilon(t)$.

Для численного решения этих задач приводятся расчетные формулы, алгоритмы и рекомендации по их применению.

В 4.3 приводятся результаты численных экспериментов на примере решения модельных задач с применением полученных в 4.2 формул и приведен анализ полученных численных результатов.

Пятая глава, состоящая из семи параграфов, посвящена постановке и численному решению обратной задачи, связанной с локализацией мест утечек жидкости в трубопроводной сети.

В 5.1 проведен анализ исследований и применяемых способов, средств и методов для обнаружения утечек в трубопроводах.

В 5.2 исследуются постановки задачи определения мест и объема утечки сырья на линейном участке трубопровода при нестационарном режиме движения жидкости. Задача идентификации рассматривается в рамках класса задач оптимального управления.

В 5.3 получены аналитические формулы для градиента функционала, соответствующей исследуемой задаче в 5.2. Эти формулы позволяют для решения задачи применять эффективные градиентные методы минимизации.

В 5.4 приведены результаты компьютерных экспериментов, полученных при решении модельных задач с применением формул из 5.3, проведен анализ результатов.

В 5.5 исследуется постановка одной обратной задачи на гидравлической сети сложной закольцованной структуры. Задача заключается в определении мест и объемов утечек сырья при наличии в каких-либо точках трубопровода результатов дополнительных наблюдений за режимами неустановившегося движения жидкости. Особенности рассматриваемой задачи заключаются в отсутствии классических начальных условий и задании граничных условий в виде неразделенных соотношений между состояниями процесса на концах смежных участков трубопроводной сети.

Пусть в точке $\xi^{k_{i_s},k_{j_s}} \in (0; l^{k_{i_s},k_{j_s}})$ (k_{i_s},k_{j_s})-го участка сети имеется утечка сырья, объем которой определяется функцией $q^{k_{i_s},k_{j_s}}(t)$. Множество таких участков в сети в количестве Z обозначим через $J^{loss} = \{(k_{i_1},k_{j_1}),...,\ (k_{i_Z},k_{j_Z})\} \subset J$.

Процесс неустановившегося изотермического ламинарного движения капельной жидкости постоянной плотности ρ на (k,s)-м линейном участке нефтепроводной сети можно описать следующими двумя линейными дифференциальными уравнениями гиперболического типа:

$$-\frac{\partial P^{ks}(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho}{S^{ks}}\frac{\partial Q^{ks}(x,t)}{\partial t} + 2a^{ks}\frac{\rho}{S^{ks}}Q^{ks}(x,t),$$

$$-\frac{\partial P^{ks}(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} c^2\dfrac{\rho}{S^{ks}}\left(\dfrac{\partial Q^{ks}(x,t)}{\partial x} + q^{ks}(t)\delta(x-\xi^{ks})\right),\ x\in(0,l^{ks}),\ (k,s)\in J^{loss}, \\ c^2\dfrac{\rho}{S^{ks}}\dfrac{\partial Q^{ks}(x,t)}{\partial x}, \quad x\in(0,l^{ks}), \quad (k,s)\notin J^{loss}. \end{cases} \tag{36}$$

Как указывалось в главе 2, если процесс (36) действует достаточно долго, то из-за наличия трения, определяемого вторыми слагаемыми в первых уравнениях подсистем (36), влияние значений начальных условий на режимы движения сырья в трубопроводе с течением времени ослабевает. Поэтому при длительном слежении за процессом существует такое τ, $\tau > t_0$, что при $t > \tau$ на режим движения существенно влияют лишь значения краевых условий на временном интервале $[t_0, T]$, где величина τ определяется параметрами жидкости и геометрическими размерами трубопроводной сети.

Поэтому будем предполагать, что в начальный момент времени t_0 начальные условия для процесса (36) точно не известны, а заданы некоторые множества возможных значений начальных режимов, определяемых в данном случае параметрическим множеством $D \subset R^{M+n}$ возможных значений расходов по участкам при установившихся режимах движения:

$$\begin{aligned} &\hat{Q}_{\gamma}^{ks}(x) = Q^{ks}(x,t_0;\gamma) = \gamma_q^{ks} = const, \\ &\hat{P}_{\gamma}^{ks}(x) = P^{ks}(x,t_0;\gamma) = \gamma_p^{ks} - 2ax\gamma_q^{ks}, \end{aligned} \quad x \in (0, l^{ks}),\ (k,s) \in J, \quad (37)$$

$$\gamma = (\gamma_p, \gamma_q) = (\gamma_p^{ks}, \gamma_q^{ks})_{\substack{ks \in J \\ k \in I}} \in D \subset R^{M+n}.$$

Здесь γ_q^{ks} – возможные значение расходов на (k,s)-м участке $ks \in J$, γ_p^{ks} – возможные значения давления в вершинах $k \in I$ при установившихся режимах движения, заданы соответствующие функции плотности, которые в векторном виде запишем как $\mu_{\mathrm{D}}(\gamma)$.

Множество возможных начальных состояний может быть определено как конечным множеством их значений, так и множеством параметрически заданных функций:

$$\begin{aligned} &\{\hat{Q}_{\gamma_1}^{ks}(x), \hat{Q}_{\gamma_2}^{ks}(x), \ldots, \hat{Q}_{\gamma_N}^{ks}(x)\}, \\ &\{\hat{P}_{\gamma_1}^{ks}(x), \hat{P}_{\gamma_2}^{ks}(x), \ldots, \hat{P}_{\gamma_N}^{ks}(x)\}, \end{aligned} \quad x \in (0, l^{ks}),\ (k,s) \in J.$$

Исходя из смысла задачи имеются ограничения на идентифицируемые функции и параметры:

$$0 \le \xi^{ks} \le l^{ks},\ \underline{q} \le q^{ks}(t) \le \overline{q}, \quad t \in [t_0, T],\ (k,s) \in J^{loss}. \quad (38)$$

Для определения неизвестных мест и объемов утечек $(\xi^{ks}, q^{ks}(t)),\ (k,s) \in J^{loss}$ будем предполагать, что в определенных точках различных участков сети, количество которых должно превышать $2Z$ –число идентифицируемых параметров, имеются результаты наблюдения за значениями давления и/ или расхода. Пусть точками дополнительных замеров являются снова вершины входа и выхода трубопроводной сети, т.е. из I^f. Причем, если в краевых условиях (23), (24) для вершин множества I_p^f использованы замеры по давлению, а для вершин I_q^f –замеры по расходу, то дополнительной информацией будут являться результаты замеров давления в некоторых вершинах подмножества I_{qp}^f множества I_q^f, т.е. $I_{qp}^f \subset I_q^f$, и замеров расхода в вершинах некоторого подмножества I_{pq}^f множества I_p^f, т.е. $I_{pq}^f \subset I_p^f$:

$$\begin{cases} P^{ns}(0,t) = P_{mes}^n(t), \quad s \in I_n^+,\ если\, I_n^- = \varnothing, \\ P^{sn}(l^{sn},t) = P_{mes}^n(t),\ s \in I_n^-,\ если\, I_n^+ = \varnothing, \end{cases} \qquad n \in I_{qp}^f \subset I_q^f, \tag{39}$$

$$\begin{cases} Q^{ms}(0,t) = Q_{mes}^m(t), \quad s \in I_m^+,\ если\, I_m^- = \varnothing, \\ Q^{sm}(l^{sm},t) = Q_{mes}^m(t),\ s \in I_m^-,\ если\, I_m^+ = \varnothing, \end{cases} \qquad m \in I_{pq}^f \subset I_p^f. \tag{40}$$

В 5.6, поставленная в 5.5 обратная задача на гидравлической сети сложной закольцованной структуры, приводится к задаче параметрического оптимального управления с неточно заданными начальными условиями и с неразделенными краевыми условиями.

Для формирования целевого функционала задачи, не умаляя общности, будем предполагать, что в условиях (39) множества I_{qp}^f и I_q^f совпадают:

$$\Im(\xi,q) = \int_D \left[\Phi(\xi,q;\gamma) + \Re(\xi,q)\right]\mu_D(\gamma)d\gamma \to \min, \tag{41}$$

$$\Phi(\xi,q;\gamma)=\sum_{m\in\tilde{I}_q^f}\int_{\tau}^{T}[Q^m(t;\xi,q(t),\gamma)-Q_{mes}^m(t)]^2\,dt,$$

$$\Re(\xi,q)=\varepsilon_1\left\|q(t)\text{-}\hat{q}\right\|^2_{L_2^Z[t_0,T]}+\varepsilon_2\left\|\xi\text{ - }\hat{\xi}\right\|^2_{R^Z},$$

где $Q^m(t;\xi,q(t),\gamma),\ m\in\tilde{I}_q^f$ являются вычисленными значениями расхода в наблюдаемых точках в результате решения краевой задачи при каких-либо возможных начальных условиях $\hat{Q}_\gamma=\{\hat{Q}_\gamma^{ks}(x)\}_{(k,s)\in J}$, $\hat{P}_\gamma=\{\hat{P}_\gamma^{ks}(x)\}_{(k,s)\in J}$ и заданных допустимых местах и объемах утечек $(\xi,q(t))$; $[\tau,T]$– интервал времени слежения за процессом, режимы которого уже не зависят от начальных условий; $\hat{\xi},\hat{q}\in R^m,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – параметры регуляризации.

Так как начальные условия, определенные в момент времени t_0, на процесс в интервале $[\tau,T]$ уже не влияют, точное знание начального значения t_0 и начальных функций $Q^{ks}(x,t_0;\gamma)$, $P^{ks}(x,t_0;\gamma),(k,s)\in J,\ \gamma\in D$ на значение функционала (41) не имеет принципиального значения.

Доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. В задаче (36)-(41) компоненты градиента функционала (41) относительно допустимых мест и объемов утечек $(\xi^{\bar{k}\bar{s}},q^{\bar{k}\bar{s}}(t)),\ (\bar{k},\bar{s})\in J^{loss}$ определяются формулами:

$$grad_{\xi^{\bar{k}\bar{s}}}\Im(\xi,q)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}c^2\,\frac{\rho}{S^{\bar{k}\bar{s}}}\int_{t_0}^{T}q^{\bar{k}\bar{s}}(t)(\psi^{\bar{k}\bar{s}}(x,t;\gamma))'_x\,|_{x=\xi^{\bar{k}\bar{s}}}\ dt+2\varepsilon_2(\xi^{\bar{k}\bar{s}}-\hat{\xi}^{\bar{k}\bar{s}}),$$

$$grad_{q^{\bar{k}\bar{s}}}\Im(\xi,q)=\int_D\left\{c^2\,\frac{\rho}{S^{\bar{k}\bar{s}}}\psi^{\bar{k}\bar{s}}(\xi^{\bar{k}\bar{s}},t;\gamma)+2\varepsilon(q^{\bar{k}\bar{s}}(t)-\tilde{q}^{\bar{k}\bar{s}}(t))\right\}\mu_D(\gamma)d\gamma\ .$$

Здесь функция $\psi^{ks}(x,t)=\psi^{ks}(x,t;\gamma)$, $(k,s)\in J$, являются решением сопряженной начально-краевой задачи с нелокальными краевыми условиями соответствующей прямой задаче (36), (37).

В 5.7 приводятся результаты проведенных численных экспериментов на примере решения модельных задач с применением полученных в 5.6 формул, приведен анализ полученных результатов.

В Приложении приводятся описание, структура и листинги основных модулей разработанного автором программного обеспечения для численного решения задач оптимального управления, краевых задач относительно систем дифференциальных уравнений с независимыми подсистемами, связанными лишь краевыми условиями.

Автор выражает благодарность научному консультанту, член корр. НАН Азербайджана, д.ф.-м.н., проф. Айда-заде К.Р. за постоянное внимание к работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертационной работе получены следующие результаты.

1. Разработан численный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений большой размерности блочной структуры, подсистемы которой связаны в произвольном порядке только неразделенными краевыми условиями.
2. Разработан численный метод решения систем линейных дискретных уравнений большой размерности блочной структуры, блоки которых в произвольном порядке связаны лишь начальными и конечными переменными.
3. Предложен численный алгоритм решения задачи оптимального управления большой системой ОДУ блочной структуры.
4. Для процессов, описываемых как параболическими, так и гиперболическими дифференциальными уравнениями с частными производными изучена продолжительность времени влияния начальных условий на их состояние в зависимости от значений параметров, участвующих в постановке задачи.
5. Предложены постановка и формулы для численного решения задач оптимального управления эволюционными процессами при неточно заданных начальных условиях.
6. Для решения системы дифференциальных уравнений гиперболического типа большой размерности с неразделенными краевыми условиями разработаны численные методы, основанные на методах сеток и прямых и предложенных схемах переноса краевых условий.
7. Исследована постановка и предложены формулы для численного решения задачи оптимального управления процессом, описываемого системой дифференциальных уравнений гиперболического типа большой размерности с неразделенными краевыми условиями и неточно заданными начальными условиями.

8. Предложены постановка, формулы и алгоритм численного решения обратной задачи по определению мест и мощностей источников для процессов, описываемых системой дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа большой размерности с неразделенными краевыми и неточно заданными начальными условиями.
9. Исследованы постановки задач оптимального управления переходными процессами в сложных гидравлических сетях, предложены формулы и алгоритмы для их численного решения.
10. Предложены постановки и алгоритмы численного решения обратных задач по определению участков, мест на них и объемов утечек сырья в сетях сложной закольцованной структуры при нестационарном режиме движения жидкости.
11. Для решения рассмотренных в работе задач создано программное обеспечение с использованием современных программных технологий.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Control of Systems with Concentrated Parameters in a Class of Special Control Functions // Automatic Control and Computer Sciences, Springer, 2009, v. 43, no 3, pp. 148-155.
2. Ашрафова Е.Р. О задаче оптимизации границы области и длительности процесса нагрева //Известия НАНА, сер. «Информатика и проблемы управления», Баку, 2010, т. XXX, № 3. с. 13-18.
3. Ashrafova Y.R., Rahimov A.B. Optimal Control For Systems On Some Classes Of Control Functions //Selected Papers of Proceedings of 24th Mini Euro Conference "Continuous Optimization and Information- Based Technologies in the Financial Sector, (MEC EurOPT), Izmir, Turkey, 2010, pp. 141-147.
4. Ашрафова Е.Р., Рагимов А.Б. Оптимизация мест размещения сосредоточенных источников и управление ими в распределенных системах / Матер. Межд. Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик-Хабез, 2010, с.42-44.
5. Ashrafova Y.R. Optimal impulsive control in distributed systems / Abstracts of The Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics", v. III, Baku, Azerbaijan, 2010,p.112-115.
6. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal control problems of sources in Distributed systems on the classes of Impulsive, Piecewise constant and Heaviside Functions // J. of Automation and Information Sciences, New York: Begel House, 2011,v.43, No 5, pp. 64-82.
7. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Определение мест и объема утечек углеводородного сырья в трубопроводе при нестационарном режиме / Материалы Второй межд. Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного

типа, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2011, с.16-18.
8. Ashrafova Y.R. Optimal control by boundary of a domain varying in time and by completion time of control processes / Abstracts of the IV Congress of Turkic World Mathematical Society (TWMS), Baku, Azerbaijan, 2011, p.366.
9. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Определение места разрыва и объема утечки в магистральном нефтепроводе при нестационарном режиме //Труды РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина, 2012, № 2/ 267, с. 78-84.
10. Ашрафова Е.Р. Задача локализации места утечки в магистральном трубопроводе //Известия НАНА, сер. «Информатика и проблемы управления», 2012, т. 32, № 3, с.118-125.
11. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Localization of points of leakage in main oil pipelines under nonsteady state // Journal of Engineering Physics and Thermo-physics, New York: Springer, 2012, v.85, no 2, pp. 1148-1156.
12. Ashrafova Y.R. Optimal control of lumped sources in distributed-parameter systems on classes of impulse and Heaviside functions //Cybernetics and Systems analysis, New York: Springer, 2012, v.48 no 5, pp. 798-806.
13. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Problem of determination of leakages in oil pipeline networks //Selected Papers of IV International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics”, v.4, IEEE Xplore, Baku,Azerbaijan,2012, p.32-34.
14. Ashrafova Y.R. A problem of optimal control of the processes with unknown initial conditions //Selected papers of IV International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics”, v.4, IEEE Xplore, Baku,Azerbaijan,2012, p.35-37.
15. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal control problems without initial conditions / Proceedengs of III Internatioanl Conference «Optimization and applications», Koshta-da-Kaparika, Protuqie, 2012, p.21-24.

16. Ашрафова Е.Р., Мамедов В.М. Численное исследование состояния эволюционных процессов при незаданных начальных условиях //Известия НАНА, сер. «Информатика и проблемы управления», 2013, т. XXXIII, № 6, с. 30-38.
17. Ашрафова Е.Р. Метод расчета неустановившихся режимов транспортировки жидкости в трубопроводных сетях сложной структуры / Материалы IV межд. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик-Терскол, 2013, С. 59-62.
18. Ашрафова Е.Р. Исследование схем метода прямых высокого порядка точности / Тезисы Межд. конф., посв. 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, Азербайджан, 2013, с.255-256.
19. Ashrafova Y.R. Calculation and optimization of regimes of fluid flow in oil pipeline networks of complicated structure/ Abstracts of IV International Conference on Optimization Methods and Applications “Optimization and applications”, Montenegro, 2013, pp. 29-30.
20. Ashrafova Y.R. Numerical investigation of problems of control by evolutional processes without initial conditions / Extended Abstracts of 4th Conference on Control and Optimization with Industrial Application, Borovets, Bulgaria, COIA-2013,p.96-97.
21. Ashrafova Y.R. Optimal control by the systems of evolutional equations with unseparated boundary conditions without initial conditions / Extended Abstracts of 4th Conference on Control and Optimization with Industrial Application. Borovets, Bulgaria, COIA 2013, p.95.
22. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal control of sources on some classes of functions // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, England: Taylor & Francis, 2014, v.63, no 7, pp. 1135-1152.
23. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Численное исследование свойств решения краевых задач без начальных условий

//Прикладная математика и фундаментальная информатика, Омск, 2014, №1, с. 20-23.
24. Ашрафова Е.Р. Численная схема расчета режимов течения жидкости в трубопроводных сетях сложной структуры //Известия НАНА, сер. «Информатика и проблемы управления», Баку, 2014, т. 34, №3, с. 153-163.
25. Ашрафова Е.Р. Численное решение системы независимых уравнений второго порядка при неразделенных граничных условиях //Известия НАНА, сер. «Информатика и проблемы управления», 2014, т.34, №6, с. 11-19.
26. Ашрафова Е.Р. Оптимальное управление переходными процессами в нефтепроводах сложной структуры с незаданными начальными условиями / Матер. Пятой Межд. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование» (МПМО)2014.с.34-36.
27. Ашрафова Е.Р. Локализация мест утечек в трубопроводах сложной структуры / Третий Межд. Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики», Россия, Нальчик, 2014, с.36-38.
28. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Расчет переходных режимов движения жидкости в трубопроводных сетях //Сибирский журнал индустриальной математики, 2015, т. XVIII, № 2, с. 12-23.
29. Ашрафова Е.Р. Анализ длительности зависимости режима движения жидкости в трубопроводе от начальных режимов //Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук, 2015, № 2, с. 9-16.
30. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Solving Systems of Differential Equations of Block Structure with Nonseparated Boundary Conditions //Journal of Applied and Industrial Mathematics, Springer, 2015, v. 9. No 1, pp. 1-10.
31. Ashrafova E.R. Numerical investigation of the duration of the effect exerted by initial regimes on the process of liquid motion

in a pipeline //Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Springer, 2015, v.88, no 5, pp. 1-9.
32. Ashrafova Y.R. Numerical calculation of processes, described by block-diagonal system with nonseparated initial-boundary conditions between blocks / Book of Abstracts of the 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, Azerbaijan, COIA-2015, pp. 252-253.
33. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Localization of Leakage Points in Pipelines of Complex Structure / Abstracts of VI International Conference on Optimization Methods and Applications Optimization and applications (OPTIMA-2015), Petrovac, Montenegro, 2015, pp.24-25.
34. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Calculation of the state of a system of discrete linear processes connected by nonseparated boundary conditions // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2016, v. 10 no 4, pp. 1-13.
35. Ашрафова Е.Р. Нахождение мест утечек сырья в гидравлических сетьях //“Прикладная математика и фундаментальная информатика”, Омск, 2016, № 1, с. 77-81.
36. Ашрафова Е.Р. Оптимальное управление эволюционными процессами при отсутствии точной информации об их начальных условиях //Известия НАНА, сер. «Информатика и проблемы управления», Баку, 2016, Т.36, №3, с. 24-34.
37. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal control of wave process without accurate information about initial conditions / Материалы V Всероссийской науч. практ. конф. Математическое моделирование процессов и систем, г. Стерлитамак, Башкортостан, 2016, с.5-10.
38. Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Leak Detection in a Pipeline Network of Complex Structure with Unsteady Flow //Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, Vol. 57, No. 12, pp. 1919–1934.
39. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Исследование задач оптимального управления пучками эволюционных

процессов //Информационный бюллетень Омского научно-образовательного центра ОмГТУ и ИМ СО РАН в области математики и информатики, Изд-во ОмГТУ, 2017. – Т. 1, № 1. с. 12-16.
40. Ашрафова Е.Р. Определение участков трубопровода сложной структуры, содержащих утечки сырья //Информационный бюллетень Омского научно-образовательного центра ОмГТУ и ИМ СО РАН в области математики и информатики, Изд-во ОмГТУ, 2017. – Т. 1, № 1. с. 98-101.
41. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Investigation of optimal control problem without initial conditions // CEUR Workshop Proceedings (VIII Intern. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, 2017, Vol. 1987, p. c.24-30.
42. Ашрафова Е.Р. Численный метод определения мест утечек сырья в сложных трубопроводных системах транспорта / Материалы XI Межд. Четаевской науч. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань 14-18 июня 2017 г., с.25-28.
43. Ашрафова Е.Р. Поблочный перенос условий для системы дискретных процессов, связанных лишь краевыми условиями //Прикладная математика и фундаментальная информатика, Изд-во ОмГТУ, 2018 – Т.5, № 2. с.34-42.
44. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Numerical solution of inverse problem on determination of leakage for unsteady flow in a pipeline network //IFAC PapersOnLine 51-30 (2018) pp. 21–26.
45. Aida-zade K.R. Ashrafova Y.R. Numerical solution to optimal control problem with the set of initial conditions / Abstracts of the 6th Intern. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, (COIA-2018), July 11-13, 2018, pp.110-112.
46. Ашрафова Е.Р. Задача расчета состояния сложных дискретных процессов со связанными краевыми условиями / Материалы V межд. Науч.конф. «Нелокадьные краевые

задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» к 80-летию А.М. Нахушева, 4-7 декабря 2018 г. Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, с.41.

47. Ашрафова Е.Р. Решение задач оптимального управления для систем ОДУ блочной структуры с неразделенными граничными условиями между блоками /Материалы IV-ой Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики» Россия, г. Нальчик-Эльбрус, 22 – 26 мая 2018 г., с. 50.
48. Aida-zade K.R. Ashrafova Y.R. Optimal control by the system of differential equations with blocks, related by boundary conditions /Abstracts of IX Intern. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2018), Petrovac, Montenegro, 2018, pp.26.
49. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Numerical method for solving the problem of optimal by system ODE of a block structure /Abstracts of X Intern. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2019), Petrovac, Montenegro, 2019, pp.20.
50. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Numerical solution to an inverse problem on a determination of places and capacities of Sources in the hyperbolic systems //Journal of industrial and management optimization, 2020, V.16, No.6 pp.3011-3033.
51. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Investigation of the problem of optimal control by a system ODE of block structure with blocks connected only by boundary conditions //Optimization and Applications, Part of the Communications in Computer and Information Science book series (CCIS, volume 1145), 2020, Springer, Vol. 1145, p.367-378.

Личный вклад автора в совместно выполненные работы:

- В работах [16,23,27,28,30,34] автор участвовал в обсуждении формулировки постановки задачи, предложил численный метод решения задачи, разработал программное обеспечение и провел численные эксперименты.

- В работах [1,3,4,6,7,9,11,12,15,22,33,37-39,41,44,45,48-51] автор участвовал в обсуждении формулировки постановки задачи, получил необходимые условия оптимальности, предложил численный метод решения задачи, разработал программное обеспечение и провел численные эксперименты.

Защита диссертации состоится 26 мая 2021 года в 14^{00} на заседании Диссертационного совета ED 1.19, действующего на базе Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, Б.Вахабзаде, 68

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Электронные версии диссертации и автореферата размещены на официальном сайте Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 23 апреля 2021 года.

Подписано в печать: 15.04.2021
Формат бумаги: 60х84 1/16
Объём: 78000
Тираж: 70