АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

АППРОКСИМАЦИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность: 1202.01 - Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Чинара Ариф кызы Гаджиева**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку - 2021

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Бакинского Государственного Университета.

Научный руководитель: доктор математических наук, доцент
Рашид Авазага оглы Алиев

Официальные оппоненты:

доктор математических наук, профессор

Бахрам Али оглы Алиев

доктор математических наук, доцент

Вугар Эльман оглы Исмаилов

кандидат физико-математических наук, доцент

Эльнур Гасан оглы Халилов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

Мисир Джумаил оглы Марданов

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

Абдуррагим Фарман оглы Гулиев

Председатель научного семинара:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

Билал Тельман оглы Билалов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Актуальность темы и степень разработки. Активное развитие численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений представляет значительный интерес для современного численного анализа. Это связано с тем, что гиперсингулярные интегральные уравнения имеют многочисленные применения в акустике, аэродинамике, механике жидкости, электродинамике, теории упругости, механике разрушения, геофизике и т. д. Поэтому построение и обоснование численных схем для приближенных решений гиперсингулярных интегральных уравнений является актуальной проблемой. Разработка конструктивных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений невозможна без изучения свойств гиперсингулярных интегральных операторов, содержащихся в этих уравнениях, и связана с аппроксимацией таких операторов, что свидетельствует об актуальности тематики диссертационного исследования.

Гиперсингулярные интегралы введены Ж.Адамаром при решении задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Они возникают также при решении задачи Неймана для уравнения Лапласа, при решении интегральных уравнений линейной теории несущей поверхности, при обращении обобщенных риссовых потенциалов, при представлении некоторых классов псевдодифференциальных операторов и в других областях математики и механики.

Аппроксимациям гиперсингулярных интегралов и построению конструктивных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и с ядром Гильберта, теория которых хорошо изложена в монографиях И.В.Бойкова, Г.М.Вайникко, И.К.Лифанов, Л.Н.Полтавского, W.T.Ang, посвящены работы Р.Б.Бабаева, А.Ю.Анфиногенова, Б.В.Бойкова, K.Buhring, Z.Chen, Y.Zhou, D.Chien, K.Atkinson, M. De Bonis, D.Occorsio, X.Zhang, J.Huang, Z.Wang, R.Zhu, A.V.Kostenko, R.Kress, A.Sidi и других авторов. В 2006-ом году Р.А.Алиевым разработан новый конструктивный метод для решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, в котором сингулярный интегральный оператор аппроксимируется операторами, сохраняющими основные свойства сингулярного оператора, что дает возможность получать, в сравнении с ранее применявшимися методами, более точные оценки с точки зрения скорости сходимости и требует меньше вычислительных затрат, поскольку позволяет найти приближенные решения явным образом (а не в отдельных точках), при этом коэффициенты соответствующих систем линейных алгебраических уравнений легко вычисляются. В настоящей диссертации этот конструктивный метод разработан и обоснован для решения гиперсингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространстве квадратично интегрируемых и в пространстве непрерывных по Гельдеру функций.

Цель и задачи исследования. Целью работы является построение аппроксимаций гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши и ядром Гильберта, а также построение и обоснование конструктивного метода для решения гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и с ядром Гильберта.

Методы исследования. При обосновании полученных в диссертации результатов использованы методы теории функций действительного и комплексного переменного, теории сингулярных интегральных уравнений, функционального анализа, линейной алгебры и общей теории приближенных методов.

Основные положения, выносимые на защиту.

- оценки погрешности аппроксимаций гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространствах квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах;

- предложения и обоснования конструктивного метода решения гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространствах квадратично-суммируемых функций;
- применение предложенного конструктивного метода к задаче Неймана для уравнения Лапласа и с помощью численных экспериментов показать эффективность данного метода.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе

- получены оценки погрешности аппроксимаций гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространствах квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах;
- предложен и обоснован конструктивный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространствах квадратично-суммируемых функций;
- приведено применение предложенного конструктивного метода к задаче Неймана для уравнения Лапласа и даны результаты численных экспериментов, показывающие эффективность данного метода.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Диссертация носит, в основном, теоретический характер. Однако полученные результаты могут найти применение при дальнейшем развитии численных методов решения сингулярных интегральных уравнений и других задачах анализа. Они могут быть применены также при решении различных теоретических и прикладных задач, сводящихся к рассматриваемым в диссертации гиперсингулярных интегральных уравнений.

Апробация и применения. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры “Математический анализ”

БГУ (рук. проф. С.С.Мирзоев), на семинарах кафедры “Теория функций и функционального анализа” БГУ (рук. проф. А.М.Ахмедов), на семинарах отдела “Теория функций” ИММ НАН Азербайджана (рук. д.м.н. В.Э.Исмаилов), на международной конференции по математики, посвященной 85-летию со дня рождения проф. Я.Мамедова, Баку, 2015, на международной конференции ”Актуальные проблемы теоретический и практический математики” посвященной 100-летию со дня рождения проф. М.Л.Расулова, Баку, 2016, на республиканской конференции ”Функциональный анализ и его применения” посвященной 100-летию со дня рождения проф. А.Габибзаде, Баку, 2016, на международной конференции по математики и механики, посвященной 80-летию со дня рождения действительного члена НАНА, проф. А.Д.Гаджиева, Баку, 2017, на первой международной научно-технический конференции, Баку, 2018, на международной конференции “Операторы, функции и системы математической физики”, Баку, 2019, на международной конференции OMTSA 2019, Турция, 2019.

Личный вклад автора. Все результаты, полученные в диссертации принадлежит автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики -6 (из них 2 WOS, 1 SCOPUS), материалы конференций -7 (из них 5 международная, 1 за рубежом).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический Анализ» Бакинского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения -36000 знаков, титульная страница-1706 , оглавление -570 знак, трех глав -172000 (I глава -64000, II глава -42000, III глава - 66000), заключения -1393 и списка используемой литературы, состоящий из 71 наименований. Общий объем диссертации составляет 211669 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключение и библиографии.

В первой главе приведены аппроксимации гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши в пространстве квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [1, 2, 3, 4,5, 10,11].

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau, \quad t \in \gamma_0 \ , \tag{1}$$

где функция $\varphi(t)$ интегрируема по Лебегу на единичной окружности $\gamma_0 = \{t \in C : |t| = 1\}$. Если определить интеграл (1) по аналогии с интегралом Коши, то даже при $\varphi \equiv 1$ получится расходящийся интеграл. Поэтому, используя идею Адамара о понятии интеграла в смысле конечной части, интеграл (1) определяется следующим образом.

Определение 1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + \frac{2i\varphi(t)}{\varepsilon \cdot t} \right),$$

где $\gamma_\varepsilon = \{\tau \in \gamma_0 : |\tau - t| > \varepsilon\}$, то этот предел называется гиперсингулярным интегралом функции $\frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2}$ на окружности γ_0 и обозначается $\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau \cdot$

В 1.1 исследуются гиперсингулярный интеграл (0.1), а также интегралы вида

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^m} d\tau \ , \ m \geq 3, m \in N \ , \ t \in \gamma_0 \ , \tag{2}$$

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{|\tau - t|^{m+\lambda}} d\tau , \; m \in N, \; \lambda \in [0,1), \; t \in \gamma_0 \; , \tag{3}$$

где функция $\varphi(t)$ интегрируема по Лебегу на единичной окружности γ_0.

Теорема 1. Для любого абсолютно непрерывного на окружности γ_0 функции φ гиперсингулярный интеграл (1) существует почти для всех точек $t \in \gamma_0$ и справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = \int_{\gamma_0} \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t} d\tau \; .$$

Теорема 2. Если функция φ имеет абсолютно непрерывную производную $(m-2)$-го порядка на γ_0 , то гиперсингулярный интеграл (2) существует почти для всех $t \in \gamma_0$ и имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^m} d\tau = \frac{1}{m-1} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi'(\tau)}{(\tau - t)^{m-1}} d\tau \cdot$$

Следствие 1. Если функция φ имеет абсолютно непрерывную производную $(m-2)$-го порядка на γ_0 , то имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^m} d\tau = \frac{1}{(m-1)!} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi^{(m-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau , \tag{4}$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Следствие 2. Если функция φ $(m-1)$-раз дифференцируема в точке t, то имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^m} d\tau = \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau) - \sum\limits_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} (\tau - t)^k}{(\tau - t)^m} d\tau ,$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Теорема 3. Если функция $\varphi(t)$ $(m-1)$-раз дифференцируема на окружности γ_0 и $(m-1)$-ая производная функции $\varphi(t)$ непрерывна по Гельдеру с показателем $\lambda < \alpha \leq 1$ на γ_0, то гиперсингулярный интеграл (3) существует во всех точках $t \in \gamma_0$.

Обозначим через $L_2(\gamma_0)$ пространство квадратично-суммируемых на γ_0 функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} |\varphi(\tau)|^2 |d\tau| \right)^{\frac{1}{2}},$$

а через $W_2^m(\gamma_0)$ – пространство функций, имеющие абсолютно непрерывную производную $(m-1)$-го порядка на γ_0 и производные m-го порядка которых принадлежит на $L_2(\gamma_0)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^m(\gamma_0)} = \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} + \sum_{k=1}^{m} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_{L_2(\gamma_0)}.$$

Так как сингулярный интегральный оператор с ядром Коши ограниченно действует из пространства $L_2(\gamma_0)$, то из теоремы 1 и из следствия 1 следует, что гиперсингулярный интегральный оператор с ядром Коши

$$\left(H^{(m)}\varphi\right)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^m} d\tau, \quad t \in \gamma_0, \quad m = 2,3,...$$

(в случае $m = 2$ будем обозначать $H\varphi \equiv H^{(2)}\varphi$) ограниченно действуют из пространства $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ к пространству $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\left\|H^{(m)}\right\|_{W_2^{m-1}(\gamma_0) \to L_2(\gamma_0)} \leq \frac{1}{(m-1)!}.$$

В 1.2 даны аппроксимации в пространстве $L_2(\gamma_0)$ гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши $H^{(m)}$, показано, что эти аппроксимации сохраняют основные свойства гиперсингулярного интегрального оператора и получены соответственные оценки сходимости.

Рассмотрим последовательность операторов

$$(H_n\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\tau_{2k+1}^{(t)}\right) - \varphi(t)}{\left(\tau_{2k+1}^{(t)} - t\right)^2}\Delta\tau_{2k+1}^{(t)}, \; t \in \gamma_0, \; n = 1,2,..,$$

где

$$\tau_k^{(t)} = e^{k\theta i}\cdot t, \; \Delta\tau_k^{(t)} = \left(\tau_{k+1}^{(t)} - \tau_{k-1}^{(t)}\right)\frac{\theta}{\sin\theta} = 2ie^{k\theta i}\cdot t\cdot\theta, \; k = \overline{0,2n}, \; \theta = \frac{\pi}{n}\cdot$$

Теорема 4. Операторы H_n, $n = 1,2,...$ ограниченно действуют из пространства $W_2^1(\gamma_0)$ на пространство $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\|H_n\|_{W_2^1(\gamma_0)\to L_2(\gamma_0)} \le 1,$$

и для любого алгебраического полинома $q(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k t^k$ степени не выше $n-1$ имеет место равенство

$$(H_n q)(t) = (Hq)(t).$$

Пусть $E_n\left(\varphi; W_2^m\right) = \inf_{q\in T_n}\|\varphi(\cdot) - q_n(\cdot)\|_{W_2^m(\gamma_0)}$ – есть наилучшее приближение функции $\varphi \in W_2^m(\gamma_0)$ полиномами из T_n, где T_n – множество полиномов вида $\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k$, $\alpha_k \in C$.

Теорема 5. Последовательность операторов $\{H_n\}$ сильно сходится к оператору H, при этом для любого $\varphi \in W_2^1(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\|H\varphi - H_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \le 2E_n\left(\varphi; W_2^1\right).$$

Теперь рассмотрим последовательности операторов

$$\left(H_n^{(3)}\varphi\right)(t) = (H_n S_n H_n)\varphi(t),$$
$$\left(H_n^{(m+1)}\varphi\right)(t) = \left(H_n S_n H_n^{(m)}\right)\varphi(t), \quad m = 3,4,5,\ldots ,$$

где

$$(S_n\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\tau_{2k+1}^{(t)}\right)}{\tau_{2k+1}^{(t)} - t}\cdot\Delta\tau_{2k+1}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0, \; n = 1,2,..$$

Теорема 6. Операторы $H_n^{(m)}$, $n = 1,2,..$ ограниченно действуют из пространства $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ к пространству $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\left\|H_n^{(m)}\right\|_{W_2^{(m-1)}(\gamma_0)\to L_2(\gamma_0)} \le 1,$$

и при $n \ge m-1$ для любого алгебраического полинома $q(t) = \sum_{k=-n+m-1}^{n-m+1} q_k t^k$ степени не выше $n-m+1$ имеет место равенство

$$\left(H_n^{(m)}q\right)(t) = \left(H^{(m)}q\right)(t).$$

Теорема 7. Последовательность операторов $\left\{H_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к оператору $H^{(m)}$, при этом для любого $\varphi \in W_2^{m-1}(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\left\|H^{(m)}\varphi - H_n^{(m)}\varphi\right\|_{L_2(\gamma_0)} \le 2E_{n-m+1}\left(\varphi; W_2^{m-1}\right).$$

Обозначим через $\Lambda_\alpha(\gamma_0)$, $0 < \alpha \le 1$ пространство функций, непрерывных по Гельдеру на γ_0 со степенью α, т.е. удовлетворяющих условию

$$\exists M > 0 \quad \forall t_1, t_2 \in \gamma_0: \; |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le M\cdot|t_1 - t_2|^{\alpha},$$

с нормой

$$\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + h(\varphi;\alpha),$$

где

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{t\in\gamma_0}|\varphi(t)|,$$

$$h(\varphi;\alpha) = \sup\left\{\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|} : t_1, t_2 \in \gamma_0,\, t_1 \neq t_2\right\}.$$

Если $\varphi \in \Lambda_\alpha(\gamma_0)$, то по теореме 3 гиперсингулярный интеграл (4) существует для любого $t \in \gamma_0$, где $\lambda < \alpha \le 1$.

В 1.3 даны аппроксимации в пространстве $\Lambda_\alpha(\gamma_0)$ гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши

$$\left(H^{(\lambda)}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{|\tau - t|^{1+\lambda}}d\tau,\ 0 \le \lambda < 1,$$

где $\varphi \in \Lambda_\alpha(\gamma_0)$, $\lambda < \alpha \le 1$, и получены соответственные оценки сходимости.

Во второй главе приведены аппроксимации гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Гильберта в пространствах квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [7,12, 13].

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi}\csc^2\frac{\tau - t}{2}\varphi(\tau)d\tau,\quad t \in T_0 = [0,2\pi], \tag{5}$$

где функция $\varphi(t)$ 2π -периодична и интегрируема по Лебегу на отрезке T_0.

Используя идею Адамара о понятии интеграла в смысле конечной части, интеграл (5) определяется следующим образом.

Определение 2. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{t-\pi}^{t-\varepsilon}\csc^2\frac{\tau - t}{2}\varphi(\tau)d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{t+\pi}\csc^2\frac{\tau - t}{2}\varphi(\tau)d\tau - \frac{8\varphi(t)}{\varepsilon}\right),$$

то этот предел называется гиперсингулярным интегралом функции $\csc^2 \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau)$ на отрезке T_0 и обозначается $\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau \cdot$

Если по определению вычислим гиперсингулярный интеграл $\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} d\tau$, где $t \in T_0$, то получим, что

$$\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} d\tau = 0 \cdot \qquad (6)$$

Из равенства (6) получим, что существование гиперсингулярного интеграла $\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau$ равносильно существованию в смысле главного значения по Коши интеграла $\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} [\varphi(\tau) - \varphi(t)] d\tau$ и при этом имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau = \int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} [\varphi(\tau) - \varphi(t)] d\tau,$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши.

В 2.1 исследуются гиперсингулярный интеграл (5), а также интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} \csc^m \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau, \quad m \geq 3, \quad m \in N, \quad t \in T_0, \qquad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \csc \frac{\tau - t}{2} \right|^{m+\lambda} \varphi(\tau) d\tau, \qquad m \in N, \ \lambda \in [0,1), \ t \in T_0, \qquad (8)$$

где функция $\varphi(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке T_0.

Теорема 8. Если 2π-периодическая функция $\varphi(t)$ абсолютно непрерывно на T_0, то гиперсингулярный интеграл (5) существует почти для всех точек $t \in T_0$ и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau = 2 \int_0^{2\pi} ctg \frac{\tau - t}{2} \varphi'(\tau) d\tau .$$

Обозначим через $L_2(T_0)$ пространство 2π-периодических квадратично-суммируемых на T_0 функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2(T_0)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2},$$

а через $W_2^m(T_0)$ – пространство 2π - периодических функций, имеющие абсолютно непрерывную производную $(m-1)$-го порядка и производная m-го порядка которых принадлежит на $L_2(T_0)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^m(T_0)} = \|\varphi\|_{L_2(T_0)} + \sum_{k=1}^{m} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_{L_2(T_0)} .$$

Так как сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта ограниченно действует в пространстве $L_2(T_0)$, то из теоремы 8 получим, что гиперсингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта

$$(\widetilde{H}\varphi)(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau , \; t \in T_0$$

ограниченно действует из пространства $W_2^1(T_0)$ к пространству $L_2(T_0)$, при этом

$$\left\|\widetilde{H}\right\|_{W_2^1(T_0) \to L_2(T_0)} \le 1 .$$

В 2.2 даны аппроксимации в пространстве $L_2(T_0)$ гиперсингулярного интегрального оператора с ядром Гильберта $\widetilde{H}$, показано, что эти аппроксимации сохраняют основные свойства гиперсингулярного интегрального оператора и получены соответственные оценки сходимости.

Рассмотрим последовательность операторов

$$\left(\widetilde{H}_n\varphi\right)(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\csc^2\frac{\pi(2k+1)}{2n}\left(\varphi\left(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\right)-\varphi(t)\right),\quad t\in T_0,\quad n=1,2,...$$

Теорема 9. Операторы $\widetilde{H}_n,\ n=1,2,...$ ограниченно действуют из пространство $W_2^1(T_0)$ на пространство $L_2(T_0)$, при этом

$$\left\|\widetilde{H}_n\right\|_{W_2^1(T_0)\to L_2(T_0)}\le 1,$$

и для любого тригонометрического полинома $q(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}q_k e^{ikt}$ степени не выше n имеет место равенство

$$\left(\widetilde{H}_n q\right)(t)=\left(\widetilde{H}q\right)(t).$$

Пусть $E_n\left(\varphi;W_2^1\right)=\inf\limits_{q\in T_n}\left\|\varphi(\cdot)-q_n(\cdot)\right\|_{W_2^1(T_0)}$ – есть наилучшее приближение функции $\varphi\in W_2^1(T_0)$ полиномами из T_n, где T_n– множество тригонометрических полиномов вида $\sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikt}$, $\alpha_k\in C$.

Теорема 10. Последовательность операторов $\left\{\widetilde{H}_n\right\}$ сильно сходится к оператору $\widetilde{H}$, при этом для любого $\varphi\in W_2^1(T_0)$ справедлива оценка

$$\left\|\widetilde{H}\varphi-\widetilde{H}_n\varphi\right\|_{L_2(T_0)}\le 2E_n\left(\varphi;W_2^1\right).$$

Обозначим через $\Lambda_\alpha(T_0),0<\alpha\le 1$ пространство 2π-периодических функций, непрерывных по Гельдеру со степенью α на действительной оси. Отметим, что если $\varphi\in\Lambda_\alpha(T_0)$,

$0 \leq \lambda < \alpha \leq 1$, то гиперсингулярный интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \left| \csc \frac{\tau - t}{2} \right|^{\lambda+1} \varphi(\tau) d\tau$ существует для всех точек $t \in T_0$.

В 2.3 даны аппроксимации в пространстве $\Lambda_\alpha(T_0)$ гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши

$$\left(\widetilde{H}^{(\lambda)}\varphi\right)(t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \csc \frac{\tau - t}{2} \right|^{1+\lambda} \varphi(\tau) d\tau, \; 0 \leq \lambda < 1,$$

где $\varphi \in \Lambda_\alpha(T_0)$, $\lambda < \alpha \leq 1$, и получены соответственные оценки сходимости.

Третья глава посвящена конструктивному решению гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространствах квадратично-интегрируемых функций. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [6, 8, 9, 12].

В 3.1 дано конструктивное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Сначала рассматривается простое гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши

$$(H\varphi)(t) = f(t), \;\; t \in \gamma_0, \tag{9}$$

где $f \in L_2(\gamma_0)$. Из теоремы 1 следует, что уравнение (9) разрешимо только при условии

$$\int\limits_{\gamma_0} f(\tau) d\tau = 0 \cdot \tag{10}$$

Если условие (11) удовлетворяется, то уравнения (10) имеет бесконечно много решений в общей форме

$$\varphi^*(t) = d_0 - \sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{c_k(f)}{k+1} t^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k(f)}{k+1} t^{k+1} \in W_2^1(\gamma_0), \tag{11}$$

где $c_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \tau^{-k-1} f(\tau) d\tau$ -коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(\gamma_0)$ и d_0-некоторая константа.

Из-за вышеуказанных рассуждений следует, что уравнение

$$(H\varphi)(t) = f(t) - \frac{1}{2\pi i t}\int_{\gamma_0} f(\tau)d\tau\,,\ t \in \gamma_0\,, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau = d_0 \tag{13}$$

однозначно разрешимо для любого $(f;d_0) \in L_2(\gamma_0)\times C$ и решением уравнения (12)-(13) является функция $\varphi^*(t)$, определенный равенством (11).

Приближенное решение уравнения (12)-(13) будем искать в виде $\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}(t)f\left(\tau_k^{(t)}\right)$, где $\alpha_k^{(n)}(t)$, $k=\overline{0,2n-1}$ - непрерывные функции, $n \in N$. С этой целью рассмотрим уравнение

$$(H_n\varphi)(t) = f(t)\ ,\ t \in \gamma_0\,, \tag{14}$$

где $f \in L_2(\gamma_0)$. Для любого $t \in \gamma_0$ в силу равенства

$$\sum_{p=0}^{2n-1}(H_n\varphi)(\tau_p^{(t)})\cdot\tau_p^{(t)} = 0$$

получим, что уравнение (14) разрешимо только при условии

$$\sum_{p=0}^{2n-1} f(\tau_p^{(t)})\cdot\tau_p^{(t)} = 0\,. \tag{15}$$

Если условие (15) удовлетворяется, то уравнение (14) имеет бесконечно много решений в общей форме

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k t^{2kn} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k(f)}{\mu_{k+1}^{(n)}}t^{k+1} \in L_2(\gamma_0) \tag{16}$$

Из-за вышеуказанных рассуждений следует, что уравнение

$$(H_n\varphi)(t) = f(t) - \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}e^{p\theta i}f\left(\tau_p^{(t)}\right)\quad,\ t \in \gamma_0 \tag{17}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}\varphi\left(\tau_p^{(t)}\right) = d_0 \tag{18}$$

однозначно разрешимо для любого $(f;d_0)\in L_2(\gamma_0)\times C$ и решением уравнений (17)-(18) является функция $\varphi_n^*(t)$, определённая равенством

$$\varphi_n^*(t)=d_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq -1(\operatorname{mod}2n)}}^{+\infty}\frac{c_k\left(f^*\right)}{\mu_{k+1}^{(n)}}t^{k+1}\in L_2(\gamma_0)\ .$$

Теорема 11. Для любого $(f;d_0)\in L_2(\gamma_0)\times C$ уравнение (17)-(18) однозначно разрешима, решение этой системы $\varphi_n^*(t)$ сходиться к решению $\varphi^*(t)$ уравнений (12)-(13) в норме пространства $L_2(\gamma_0)$, при этом имеет место оценка

$$\left\|\varphi_n^*-\varphi^*\right\|_{L_2(\gamma_0)}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)E_n(f;L_2).$$

Теперь рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши

$$(R\varphi)(t)=(H\varphi)(t)+(\mathcal{K}\varphi)(t)=f(t)\ ,\ \ t\in\gamma_0 \tag{19}$$

где $(\mathcal{K}\varphi)(t)=\int\limits_{\gamma_0}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$, и $K(t,\tau)=\dfrac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)$- непрерывная функция. Так как для любого $\varphi\in W_2^1(\gamma_0)$ имеют места равенств

$$\int\limits_{\gamma_0}(H\varphi)(\tau)d\tau=0,\quad \int\limits_{\gamma_0}(\mathcal{K}\varphi)(\tau)d\tau=0,$$

то получим, что уравнение (19) разрешимо только при условии (10). Поэтому будем рассматривать уравнение

$$(R\varphi)(t)=f(t)-\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\gamma_0}f(\tau)d\tau,\ t\in\gamma_0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau=d_0. \tag{21}$$

Теорема 12. Если для любого $(f;d_0)\in L_2(\gamma_0)\times C$ уравнение (20)-(21) однозначно разрешимо, то при больших значениях n уравнение

$$(H_n\varphi)(t)+(\mathrm{K_n}\varphi)(t)-\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}e^{p\theta i}\sum_{k=0}^{2n-1}K(\tau_p^{(t)},\tau_k^{(t)})\,\varphi(\tau_k^{(t)})\left(\frac{1}{2}\Delta\tau_k^{(t)}\right)=$$

$$=f(t)-\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}e^{p\theta i}f(\tau_p^{(t)}) \tag{22}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}\varphi(\tau_k^{(t)})=d_0, \tag{23}$$

где $(\mathrm{K_n}\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}K(t,\tau_k^{(t)})\,\varphi(\tau_k^{(t)})\left(\frac{1}{2}\Delta\tau_k^{(t)}\right)$, также однозначно разрешимо для любого $(f;d_0)\in L_2(\gamma_0)\times C$; решение $\varphi_n^*(t)$ уравнения (22)-(23) сходиться к решению $\varphi^*(t)$ уравнению (20)-(21) в норме пространства $L_2(\gamma_0)$, при этом имеет место оценка

$$\left\|\varphi_n^*-\varphi^*\right\|_{L_2(\gamma_0)}\le$$
$$\le const\cdot\Big\{E_n(f;L_2)+E_n\left(K\varphi^*;L_2\right)+4\pi\|K\|_\infty E_{n-1}\left(\varphi^*;L_2\right)+$$
$$+4\pi E_{n-1}(K)\left[E_{n-1}\left(\varphi^*;L_2\right)+\left\|\varphi^*\right\|_{L_2(\gamma_0)}\right]\Big\}.$$

В 3.2 дано конструктивное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. Сначала рассмотривается простое гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта

$$(\widetilde{H}\varphi)(t)=f(t),\quad t\in T_0=[0,2\pi], \tag{24}$$

где $f\in L_2(T_0)$. Из теоремы 8 следует, что уравнение (24) разрешимо только при условии

$$\int_0^{2\pi}f(\tau)d\tau=0\cdot \tag{25}$$

Если условие (25) удовлетворяется, то уравнения (24) имеет бесконечно много решений в общей форме

$$\varphi^*(t)=d_0-\sum_{k\in z\setminus\{0\}}\frac{c_k(f)}{|k|}e^{ikt}\in W_2^1(T_0), \tag{26}$$

где $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\tau} f(\tau)d\tau$ -коэффициенты Фурье функции $f\in L_2(T_0)$ и d_0 -некоторая константа.

Из-за вышеуказанных рассуждений следует, что уравнение

$$\left(\widetilde{H}\varphi\right)(t)=f(t)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)d\tau\ ,\ t\in T_0\ , \tag{27}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\tau)d\tau=d_0 \tag{28}$$

однозначно разрешимо для любого $(f;d_0)\in L_2(T_0)\times C$ и решением уравнения (27)-(28) является функция $\varphi^*(t)$, определенный равенством (26).

Приближенное решение уравнения (27)-(28) будем искать в виде $\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}(t)f\left(t+\frac{\pi k}{n}\right)$, где $\alpha_k^{(n)}(t)$, $k=\overline{0,2n-1}$ - непрерывные функции, $n\in N$. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\left(\widetilde{H}_n\varphi\right)(t)=f(t)\ ,\ t\in T_0\ , \tag{29}$$

где $f\in L_2(T_0)$. Для любого $t\in T_0$ в силу равенства

$$\sum_{p=0}^{2n-1}\left(\widetilde{H}_n\varphi\right)(t+\frac{\pi k}{n})=0$$

получим, что уравнение (29) разрешимо только при условии

$$\sum_{p=0}^{2n-1} f\left(t+\frac{\pi p}{n}\right)=0\,. \tag{30}$$

Если условие (30) удовлетворяется, то уравнение (29) имеет бесконечно много решений в общей форме

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{2knit}+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0(\mathrm{mod}\,2n)}}^{+\infty}\frac{c_k(f)}{\widetilde{\mu}_k^{(n)}}e^{ikt}\in L_2(T_0) \tag{31}$$

Из-за вышеуказанных рассуждений следует, что уравнение

$$\left(\widetilde{H}_n\varphi\right)(t)=f(t)-\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}f\left(t+\frac{\pi p}{n}\right), \tag{32}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right)=d_0 \tag{33}$$

однозначно разрешимо для любого $(f;d_0)\in L_2(T_0)\times C$ и решением уравнения (32)-(33) является функция $\varphi_n^*(t)$, определённая равенством

$$\varphi_n^*(t)=d_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0(\mathrm{mod}\,2n)}}^{+\infty}\frac{c_k(f)}{\widetilde{\mu}_k^{(n)}}e^{ikt}\in L_2(T_0)\ .$$

Теорема 13. Для любого $(f;d_0)\in L_2(T_0)\times C$ уравнение (32)-(33) однозначно разрешима, решение этой системы $\varphi_n^*(t)$ сходиться к решению $\varphi^*(t)$ уравнений (27)-(28) в норме пространства $L_2(T_0)$, при этом имеет место оценка

$$\left\|\varphi_n^*-\varphi^*\right\|_{L_2(T_0)}\le E_n(f;L_2).$$

Теперь рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта

$$\left(\widetilde{R}\varphi\right)(t)=\left(\widetilde{H}\varphi\right)(t)+\left(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi\right)(t)=f(t)\ ,\quad t\in T_0\,, \tag{34}$$

где $\left(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi\right)(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{K}(t,\tau)\varphi(t)d\tau$, и $\widetilde{K}(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{F}(t,\tau)$- непрерывная функция. Так как для любого $\varphi\in W_2^1(\gamma_0)$ имеют места равенств

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\widetilde{H}\varphi\right)(\tau)d\tau=0\,,\quad \int\limits_0^{2\pi}\left(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi\right)(\tau)d\tau=0\,,$$

то получим, что уравнение (35) разрешимо только при условии (26). Поэтому будем рассматривать уравнение

$$\left(\widetilde{R}\varphi\right)(t) = f(t) - \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1} f\left(t + \frac{\pi p}{n}\right),\ t \in T_0\,, \tag{35}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1} \varphi\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) = d_0\,. \tag{36}$$

Теорема 14. Если для любого $(f; d_0) \in L_2(T_0) \times C$ уравнение (35)-(36) однозначно разрешимо, то при больших значениях n уравнение

$$\left(\widetilde{H}_n\varphi\right)(t) + \left(\widetilde{\mathsf{K}}_n\varphi\right)(t) - \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{p=0}^{2n-1} \widetilde{K}\left(t + \frac{\pi p}{n}, t + \frac{\pi k}{n}\right)\varphi\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) =$$

$$f(t) - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f\left(t + \frac{\pi k}{n}\right)\,, \tag{37}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{2n-1} \varphi\left(t + \frac{\pi p}{n}\right) = d_0\,, \tag{38}$$

где $\left(\widetilde{\mathsf{K}}_n\varphi\right)(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} \widetilde{K}\left(t, t + \frac{\pi k}{n}\right)\varphi\left(t + \frac{\pi k}{n}\right)$, также однозначно разрешимо для любого $(f; d_0) \in L_2(T_0) \times C$; решение $\varphi_n^*(t)$ уравнения (37)-(38) сходиться к решению $\varphi^*(t)$ уравнению (35)-(36) в норме пространства $L_2(T_0)$, при этом имеет место оценка

$$\left\|\varphi_n^* - \varphi^*\right\|_{L_2(T_0)} \le const \cdot \Big\{E_n(f; L_2) + E_n\left(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi^*; L_2\right) + 2\left\|\widetilde{K}\right\|_\infty E_{n-1}\left(\varphi^*; L_2\right) +$$

$$+ 2E_{n-1}\left(\widetilde{K}\right)\left[E_{n-1}\left(\varphi^*; L_2\right) + \left\|\varphi^*\right\|_{L_2(T_0)}\right]\Big\}.$$

В 3.3 дается результаты числовых экспериментов, подтверждающих эффективность предложенного метода

В конце хочу выразить благодарность своему научному руководителю, доктор математических наук, доценту Р.А. Алиеву за, постоянное внимание и ценные советы.

ВЫВОД

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- получены оценки погрешности аппроксимаций гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространстве квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах;
- предложен и обоснован конструктивный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и с ядром Гильберта в пространстве квадратично-суммируемых функций;
- приведено применения предложенного конструктивного метода к задачу Неймана для уравнения Лапласа и даны результаты численных экспериментов, показывающие эффективность данного метода.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1.Амрахова, А.Ф., Гаджиева, Ч.А. Об аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора на окружности // -Баку: Вестник БГУ, серия физ.-мат.наук, -2015, 4, -с.43-50.

2.Амрахова, А.Ф., Гаджиева, Ч.А. Аппроксимация гиперсингулярного интегрального оператора на окружности // Ə.Həbibzadənin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş ”Funksional analiz və onun tətbiqləri” adlı respublika elmi konfransının materialları, -Bakı, -2016, -səh.120-121.

3.Гаджиева, Ч.А. Об аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора с ядром Коши // -Баку: Вестник БГУ, серия физ.-мат.наук, -2017, 1, -с. 76-87.

4.Гаджиева, Ч.А. Аппроксимации гиперсингулярных интегральных операторов с ядром Коши // Operators, Functions and Systems of Mathematical Physics Conference - Baku:- June 10-14, -2019, Khazar University, -p.146-148

5. Aliev, R.A., Gadjieva, Ch.A. Approximation of hypersingular integral operators with Cauchy kernel // - London: Numerical Functional Analysis and Optimization, -2016, 37:9, 1055-1065.

6.Aliev, R.A., Gadjieva, Ch.A. Approximate solution of hipersingulyar integral equations with Cauchy kernel // -Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, -2017, 37:1, -p.20-29.

7. Gadjieva, Ch.A. Approximation of hypersingular integral operators with Hilbert kernel // Y.Məmmədovun 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Bakı: -2015, -səh.79-81.

8. Gadjieva, Ch.A. A new approximate method for solving hypersingular integral equations with Hilbert kernel // -Baku: Proceedings of the IMM of NAS of Azerbaijan, -2016, 43:2, -p.316-329.

9. Gadjieva, Ch.A. The approximate solution of hypersingular integral equations of the first kind // M.L.Rəsulovun 100 illik

yubileyinə həsr olunmuş ”Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri” adlı respublika elmi konfransının materialları,- Bakı: -2016, -səh.119-120.
10. Gadjieva, Ch.A. Approximation of hypersingular integral operators on Hölder spaces // -Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, -2017, 5:2, -s.96-105.
11. Gadjieva, Ch.A. Approximation of hypersingular integral operators on Hölder spaces // Akademik Akif Hacıyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş ”Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri” adlı Beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Bakı: -2017, -səh.69-71.
12. Gadjieva, Ch.A. The Approximate solution of hypersingular integral equations with Hilbert kernel of the first kind // 1st İnternational Science and Engineering Coference Proceedings, -Baku, -2018, -p.102-104.
13. Gadjieva, Ch., Approximation of Hypersingular integral operators with Hilbert kernel on Hölder spaces \\ Abstarct book Operators in general Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA 2019), - Turkey, Kutahya: Kutahya Dumlupinar University, -16-20 July, -2019, -p.98-100.

Защита диссертации состоится 31 мая 2021 года в 11^{00} часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 26 апреля 2021 года.

Подписано в печать: 26.04.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 80000
Тираж: 70