

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ÇOXOBRAZLI LAR VƏ ONLARIN LAYLANMALARINDA DİFERENSİAL-HƏNDƏSİ STRUKTURLAR

İxtisas: **1204.01– Həndəsə**

Elm sahəsi: **Riyaziyyat**

İddiaçı: **Təranə Teymur qızı Sultanova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2025

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin «Cəbr və həndəsə» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,
professor
Arif Ağacan oğlu Səlimov

Rəsmi opponentlər:

AMEA-nın müxbir üzvü,
f.-r.e.d., professor
Vaqif Rza oğlu İbrahimov



fizika – riyaziyyat elmlər namizədi,
dosent
Əli Əvəz oğlu Babayev

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
Kəmalə Mütəlib qızı Vəliyeva

Azərbaycan Respublikasının Prezidentinin yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BED 2.17 Birdəfəlik Dissertasiya şurası.

Birdəfəlik Dissertasiya şurasının sədri:

 AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor
Mahammad Fərman oğlu Mehdiyev

Birdəfəlik dissertasiya şurasının elmi katibi:

 fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Zakir Fərman oğlu Xankişiyev

Elmi seminarın sədri:

 AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor
Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov



İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Diferensiallanan çoxobrazlının toxunan və kotoxunan laylanmalarının lift məsələlərinə aid olan tədqiqatlar XX əsrin 60-cı illərin əvvəllərində başlanılmışdır. 1958-ci ildə Sasaki tərəfindən Riman çoxobrazlısının toxunan laylanması üzərində xüsusi bir metrika təyin edilmişdir və daha sonra məlum olmuşdur ki, bu xüsusi Sasaki metrikasına bazadakı metrikanın diaqonal lifti kimi də baxmaq olar. Birinci tərtib toxunan, kotoxunan və tenzor laylanmalara aid olan tədqiqatlar Yano və İşihara, Morimoto, Sato, Vişnevski, Şirokov, Şurigin, Səlimov və digərləri tərəfindən davam etdirilmişdir. Bu çalışmaların bəzilərində I və II tərtib toxunan laylanmaların cəbrlər ilə əlaqəsi tapılaraq lift nəzəriyyəsində yeni lift sinifləri (sinyektik və modifikasiya olunmuş liftlərin sinifləri) aşkarlanmışdır. Diferensial həndəsədə digər əsas axınlardan biri də müxtəlif diferensial-həndəsi strukturların toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında genişlənmələrinin öyrənilməsidir. Bu kontekstdə sanki kontakt strukturlar ilə əlaqəli olan Sasaki və Kenmotsu strukturlarının toxunan laylanma fəzalarında öyrənilməsi geniş maraq kəsb etməkdədir. Bu istiqamətdəki çalışmalardan D.Blair, K.Kenmotsu, J.Qubina, A.Səlimov, S.Tanno və digərlərinin işlərini qeyd edə bilərik.

Lift məsələsi müasir diferensial həndəsədə əsas tədqiqat istiqamətlərindən biridir. Lift problemlərini təmiz alt laylanmalar üzrə araşdırmaq günümüzün diqqət çəkən məsələsidir. Onu da qeyd edək ki, toxunan və kotoxunan laylanmalar təbii olaraq öz-özlərinin təmiz alt laylanmalarıdır. Amma II tərtib toxunan laylanma təmiz laylanma deyil və bu laylanmalarda təmiz laylanmaya məxsus bir çox metodlar işləmir. Ona görə də bu cür laylanmalarda lift problemlərini öyrənmək xüsusi maraq kəsb edir və aktual məsələdir.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Dissertasiya işində I və II tərtib toxunan və kotoxunan laylanmalarda liftlər və diferensial-həndəsi strukturların xassələrini öyrənmək əsas tədqiqat obyektləridir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Baza çoxobrazlılarından onların toxunan və kotoxunan laylanmalarına lift məsələlərinin

öyrənilməsi işin əsas məqsədidir. Bunun üçün tenzor operatorlar (Li və kovariant törəmə operatorları, Taçibana operatorları) və nilpotentli cəbrlərin holomorfluğu istifadə olunur. Yüksək tərtib toxunan laylanmalarda deformasiya olunmuş liftlərin qurulması işin digər məqsədlərindən biridir.

Tədqiqat metodları. İşdə diferensial həndəsə və tenzor analizinin aşağıdakı metodlarından istifadə olunmuşdur:

1. İndekslərlə klassik tenzor metodu;
2. İxtiyari koordinat sistemi üçün ödənilən tenzorlara aid olan invariant metod;
3. Cəbrlər üzərində qurulan fəzaların həqiqi modellərinin tapılması metodu.

Müdafiyyə çıxarılan əsas müddəalar. Aşağıdakı əsas müddəalar müdafiyyə çıxarılır:

1. Toxunan laylanmalarda α – Sasaki, β – Kenmotsu və trans-Sasaki strukturların tam liftlərinin öyrənilməsi;
2. Kotoxunan laylanmada sanki kompleks strukturun inteqrallanmasının və bu struktur ilə assosiasiya olunmuş Taçibana operatorlarının araşdırılması;
3. Ölçüsü 2-dən böyük olan assosiativ və kommutativ cəbrlərdə holomorf fuksiyaların araşdırılması;
4. II tərtib toxunan laylanmalarda Keler tipli metriklərin araşdırılması;
5. Yüksək tərtib toxunan laylanmalarda obyektlərin tam liftlərinin deformasiya olunmasının holomorf obyektlər ilə əlaqələrinin araşdırılması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

1. III və IV tərtib nilpotenti olan cəbrlərin holomorf funksiyalarının açıq şəkilləri tapılmışdır;

2. Holomorf funksiyaların köməylə II tərtib toxunan laylanmalarda Keler tipli metriklər tapılmışdır;
3. Holomorf funksiyaların köməylə II tərtib toxunan laylanmalarda vektor meydanlarının deformasiya olunmuş tam liftləri tapılmışdır;
4. Toxunan laylanmalarda α –Sasaki, β – Kenmotsu, trans-Sasaki strukturların liftləri qurulub;
5. Kotoxunan laylanmada sanki kompleks strukturun integrallanma şərtləri və bu struktura bağlanan Taçibana operatorlarının tam və horizontal liftlərə tətbiq olunmasının açıq şəkilləri tapılmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti. Doktorluq dissertasiyası əsasən nəzəri əhəmiyyət daşıyır. Dissertasiya işinin nəticələri tenzor və daha yüksək toxunan laylanma fəzalarında differensial-həndəsi strukturların genişlənməsi məsələlərində tətbiq oluna bilər. Əlavə olaraq alınan nəticələr bir çox diferensial həndəsi obyektlərin xassələrinin (obyektlərin holomorfluğu, əyrilik) öyrənilməsində tətbiq oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işi Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı respublika konfransının materiallarında, Akademik Azad Xəlil oğlu Mirzəcazadənin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş “Neftqazçıxarmada innovativ texnologiyaların və tətbiqi riyaziyyatın müasir problemləri” adlı Beynəlxalq Elmi Konfransda, “Riyaziyyat və Mexanikənin Müasir Problemləri” Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60 – illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Elmi Konfrans materiallarında, Doktorantların və Gənc Tədqiqatçıların XXIII Respublika Elmi Konfransında, Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 97-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat, Mexanika və Onların Tətbiqləri” adlı Respublika Elmi Konfransında, o cümlədən, Türkiyədə Malatya şəhərində keçirilmiş “18-ci Beynəlxalq Həndəsə Konfransında” məruzə edilmişdir, “Lift problems on differential geometric objects”, Mathematical

Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 9, Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 98-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat, Mexanika və Tətbiqləri” mövzusunda Respublika Virtual Elmi Konfransında, Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat, Mexanika və onların Tətbiqləri” mövzusunda Respublika Elmi Konfransında və Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Diferensial və integral operatorlar” mövzusunda Respublika Elmi Konfransında.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı: Bakı Dövlət Universitetinin “Mexanika-riyaziyyat” fakültəsinin “Cəbr və həndəsə” kafedrası.

İddiaçının şəxsi töhfəsi. Dissertasiya işində alınan bütün elmi yeniliklər və nəticələr şəxsən iddiaçıya məxsusdur.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Təqdim olunan dissertasiya işinin əsas nəticələri iddiaçının AAK-ın tövsiyə etdiyi elmi jurnallarda, 3-ü beynəlxalq xülasələndirmə və indeksləmə bazasına daxil olan jurnallarda olmaqla, 5 elmi məqalə çap etdirmişdir. Bu məqalələrdə dissertasiya işi tamamilə öz əksini tapmışdır. Dissertasiya işində alınan nəticələr 2 beynəlxalq səviyyəli və 7 respublika səviyyəli elmi konfranslarda məruzə edilmiş və bu məruzələr uyğun konfrans materiallarında çap olunmuşdur.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, dörd fəsildən, nəticə (titul səhifəsi – 361 işarə, mündəricat – 1367 işarə, giriş – 25332 işarə, I fəsil – 76000 işarə, II fəsil – 32000 işarə, III fəsil – 48000 işarə, IV fəsil – 26000 işarə, nəticə – 844 işarə) və 81 sayda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 209904 işarədir. Dissertasiya işinin həcmi 132 səhifədir.

DİSSERTASIYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, üç fəsildən, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə dissertasiyaya aid olan işlərinin qısa xülasəsi verilmiş, dissertasiyanın aktuallığı əsaslandırılmışdır.

Birinci fəsil beş yarımfəsildən ibarətdir. Birinci fəsildə diferensiallanan çoxobrazlının I və II tərtib toxunan laylanma fəzaları verilmişdir.

Birinci fəslin birinci yarımfəslində I tərtib toxunan laylanma anlayışı verilir və onun üzərində funksiyanın, vektor meydanının, tenzor meydanlarının və 1-formun vertikal, tam və horizontal liftləri anlayışları daxil edilir və onların koordinatlar ilə ifadələri verilir.

Fərz edək ki, bizə C^∞ –sinifindən n –ölçülü diferensiallana bilən M çoxobrazlısı verilmişdir. P nöqtəsindəki toxunan fəzanı $T_P(M)$ ilə işarə edək. Onda

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M)$$

çoxluğu M çoxluğu üzərində verilmiş toxunan laylanmadır.

Tutaq ki, $T(M)$ üzərində $\tilde{P}$ nöqtəsi verilmişdir: $\tilde{P} \in T(M)$. Onda $\tilde{P} \rightarrow P$ inikası $\pi: T(M) \rightarrow M$ təbii proyeksiyalama inikasını təyin edir: $\pi(\tilde{P}) = P$. Aydınır ki, bu inikas submersiyadır. $\pi: T(M) \rightarrow M$ təbii laylanma inikasına laylanmanın proyeksiyası, M – laylanmanın bazası, $\pi^{-1}(P)$ (və ya $T_P(M)$) $P \in M$ nöqtəsində laylanmanın layı adlanır.

Əgər M üzərində f funksiya varsa, $T(M)$ – də f^V funksiyası $\pi: T(M) \rightarrow M$ və $f: M \rightarrow R$ funksiyaaların kompozisiyası kimi verilir:

$$f^V = f \circ \pi.$$

f^V –yə funksiyasının vertikal lifti deyilir.

M çoxobrazlısı üzərində f funksiyası verilibsə, onda $T(M)$ toxunan laylanma üzərində f^C funksiyası aşağıdakı kimi daxil edilir: $f^C = \iota(df)$. Bu halda deyirlər ki, M çoxobrazlının $T(M)$ toxunan laylanmasına f funksiyasının f^C tam lifti verilib.

Fərz edək ki, M diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində ∇ afin

rabitəsi verilmişdir. Əgər M üzərində f funksiyadırsa, onda f funksiyanın qradiyenti

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f$$

şəklində daxil edilir.

İndi isə biz M çoxobrazlısı üzərində $T(M)$ toxunan laylanmada f funksiyanın f^H horizontal liftini aşağıdakı kimi təyin edək:

$$f^H = f^C - \nabla_\gamma f = 0.$$

Tutaq ki, $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(T(M))$ bütün $f \in \mathfrak{S}_0^0(M)$ üçün

$$\tilde{X}f^V = 0$$

şərtini ödəyir. Onda biz deyirik ki, $\tilde{X}$ vertikal vektor meydanıdır.

Fərz edək ki, $X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$. Biz $T(M)$ toxunan laylanması üzərində X^C vektor meydanını aşağıdakı şəkildə daxil edirik:

$$X^C f^C = (Xf)^C,$$

Tutaq ki, bizə $\mathfrak{S}_0^1(M)$ üzərində X elementi verilib. Onda biz X vektor meydanının X^H horizontal liftini $T(M)$ üzərində $X^H = X^C - \nabla_\gamma X$ kimi təyin olunur, burada

$$\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X) = (0, y^s \partial_s X^h) = (0, y^s (\partial_s X^h + \Gamma_{sm}^h X^m)).$$

Fərz edək ki, $\tilde{\omega} \in \mathfrak{S}_1^0(T(M))$ 1-form və ixtiyari $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ vektor meydanı üçün

$$\tilde{\omega}(X^V) = 0$$

ödənilir. Bu halda toxunan laylanma üzərində ω vertikal 1-formdur deyirlər.

Əgər $\tilde{\omega} \in \mathfrak{S}_1^0(T(M))$ 1-form verilərsə, onda $T(M)$ toxunan laylanma üzərində ω 1 – formun tam liftini aşağıdakı kimi təyin edirik

$$\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C.$$

Tutaq ki, M çoxobrazlı üzərində ω 1-form və ∇ –afin rabitəsi verilmişdir. ω^H horizontal lifti $\omega^H = \omega^C - \nabla_\gamma \omega$ kimi təyin olunur.

Tutaq ki, M çoxobrazlısı üzərində ω 1 – formun komponentləri ω_i –dir, onda $T(M)$ üzərində ω^C tam liftin komponentləri aşağıdakı kimi olur:

$$\omega^C = (\partial \omega_i, \omega_i)$$

Birinci fəslin ikinci yarım-fəslində kotoxunan laylanma üzərində indusira olunmuş koordinatlarda liftlərə baxılır.

Fərz edək ki, n –ölçülü M diferensiallanan çoxobrazlısı verilmişdir. $P \in M$ nöqtəsindəki kotoxunan fəzanı $T_P^*(M)$ ilə işarə edək, $T_P^*(M)$ fəzasının elementləri kovektorlardır. Onda

$$T^*(M) = \bigcup_{P \in M} T_P^*$$

çoxluğu, tərifə əsasən M çoxobrazlısı üzərində kotoxunan laylanmadır.

Kotoxunan laylanmanın bazası üzərində $p = p_i dx^i$ 1-formuna baxaq.

p 1-formun dp xarici diferensialı $\pi^{-1}(U)$ çoxluğunda aşağıdakı 2-form olur:

$$dp = dp_i \wedge dx^i.$$

Birinci fəslin üçüncü yarım-fəslində ikinci mərtəbədən toxunan laylanma üzərində funksiyanın və vektor meydanlarının 0-cı, 1-ci və 2-ci liftlərini təyin edirik.

Fərz edək ki, M üzərində f funksiyası verilib və tutaq ki, f funksiyasının $\{U, x^h\}$ koordinat ətrafındakı lokal ifadəsi $f = f(x)$ şəklindədir. İndi isə biz $\pi^{-1}(U)$ üzərində f^0, f^I və f^{II} üç funksiya l ar ın lokal ifadələri:

$$f^0: f(x), \quad f^I: y^i \partial_i f(x), \quad f^{II} = z^i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} y^j y^i \partial_j \partial_i f(x).$$

$T_2(M)$ üzərində verilmiş f funksiyanın f^0, f^I və f^{II} funksiya l ar ına 0 –cı, 1 –ci və 2 –ci liftləri adlanır.

Fərz edək ki, $X \in \mathfrak{S}_0^1$ vektor meydanının X^h lokal komponentləri U koordinat ətrafında verilib.

$$X^0: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \quad X^I: \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \\ y^i \partial_i X^h \end{pmatrix}, \quad X^{II}: \begin{pmatrix} X^h \\ y^i \partial_i X^h \\ z^i \partial_i X^h + \frac{1}{2} y^j y^i \partial_j \partial_i X^h \end{pmatrix}$$

olan X^0, X^I və X^{II} lokal vektor meydanlarını $T_2(M)$ üzərində uyğun olaraq vektor meydanının sıfırıncı lifti, birinci lifti və ikinci lifti

adlandırırıq.

Birinci fəslin dördüncü yarımfəslində isə $(1,1)$ –tipli tenzor ilə təyin olunmuş həndəsi strukturlara baxılır, r –reqlıyar Π –struktur anlayışı daxil edilir, U_m cəbri ilə əlaqəsi göstərilir.

Əgər M_n hamar çoxobrazlısı üzərində $(1,1)$ –tipli tenzorların $J_1, J_2, \dots, J_m$ meydanları (afinorları) verilərsə, onda biz deyə bilərik ki, M_n üzərində multi-affinor struktur (və ya Π –struktur) verilib:

$$\Pi = \left\{ \underset{\alpha}{J} \right\} = \left\{ \left(J_{\alpha j}^i \right) \right\}, \alpha = 1, 2, \dots, m; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Tutaq ki, elə $\{X_i\}, i = 1, \dots, n$ reperi var ki, Π – strukturun hər bir $\underset{\alpha}{J}$ affinoru bu reperdə $\underset{\alpha}{J}^i$ sabit komponentlərə malikdir. Bu halda

Π –struktur, şərt struktur adlanır. Xüsusi halda, $\{X_i\} = \{\partial_i\}, \partial_i J_l^k = 0$, onda Π –struktur inteqrallanandır deyilir. Aydındır ki, inteqrallanan struktur şərtidir, əksi doğru deyil, yalnız Π –struktura əlavə şərt qoyulanda tərsi mümkündür. Məlumdur ki, ən sadə şərt J –strukturların (sanki kompleks və sanki parakompleks) inteqrallanması Nijenhuis tenzorun sıfıra bərabər olmasına ekvivalentdir.

Fərz edək ki, U_m –kommutativ cəbrdir. M_n üzərində sanki cəbri Π –struktur - elə Π – strukturudur ki, onun üçün aşağıdakı şərt ödənilsin:

$$J_{\alpha} \circ J_{\beta} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} J_{\gamma}$$

yəni, əgər $U_m \leftrightarrow \Pi$ izomorfizmi olsun. Burada $\underset{\alpha}{J}$ afinorları cəbrin əsas bazis $e_{\alpha} \in U_m, \alpha = 1, \dots, m$ elementlərinə uyğun olan affinorlardır.

Tutaq ki, elə $\{X_i\}$ reperi var ki, hər bir $\left(J_{\alpha j}^i \right) n \times n$, $\alpha = 1, \dots, m$ ölçülü matrisləri

$$\left(\underset{\alpha}{J}^i \right) = \begin{pmatrix} C_{\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{\alpha} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha = 1, \dots, m; \quad i, j = 1, \dots, n$$

formasına gətirilir. Onda M_n üzərində sanki cəbri struktura

r –requlyar Π –struktur (və ya sadəcə Π –struktur) adlanır. Burada $C_\alpha = (C_{\alpha\beta}^\gamma)$ matrisləri U_m cəbrinin requlyar təsviridir və r –ədədi C_α –blokların sayını göstərir.

U –cəbri üzərində ölçüsü r – olan $X^r(U)$ –holomorf çoxobrazlısı elə Hausdorf topoloji fəzadır ki, onun atlası U_m^r xəritələrin U –holomorf çevrilmələr qrupu uyğunlaşan atlasdır. Burada $U_m^r = U_m \times \dots \times U_m$.

$$z^u = x^{u\alpha} e_\alpha \in U_m, x^{u\alpha} = x^i \in R, \\ i = 1, \dots, n; u = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, m.$$

Beləliklə, ölçüsü r olan $X_r(U)$ cəbri çoxobrazlısına ölçüsü rm olan həqiqi hamar M_{rm} çoxobrazlısı uyğun gəlir.

İkinci fəsildə birinci tərtib toxunan laylanmalarda lift problemlərinə baxılır.

İkinci fəslin birinci yarımfəslində kontakt, sanki kontakt, α –Sasaki və β –Kenmotsi strukturlar haqqında bəhs olunur.

Tutaq ki, $(2n + 1)$ –ölçülü M diferensial çoxobrazlısı verilmişdir. Əgər M çoxobrazlısı üzərində η 1-form verilərsə və aşağıdakı şərt ödəyirsə,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

onda η –kontakt struktur və M –kontakt çoxobrazlıdır, burada $\wedge$ ilə xarici hasil işarə olunub.

Tutaq ki, M $(2n + 1)$ –ölçülü diferensial çoxobrazlı və ϕ, ξ, η uyğun olaraq M üzərində $(1,1)$ – tipli tenzor meydanı, vektor meydanı və 1 –formdur. Əgər ϕ, ξ, η aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, onda (ϕ, ξ, η) üçlüyünə sanki kontakt struktur deyilir:

$$\eta(\xi) = 1, \\ \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \forall X \in \mathfrak{X}_0^1(M)$$

M üzərində sanki kontakt struktur verilərsə, onda M –ə sanki kontakt çoxobrazlı deyilir.

Hər bir M sanki kontakt çoxobrazlısı elə g Riman metrik tenzor meydanına malikdir ki,

$$\eta(X) = g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Sasaki çoxobrazlısı – normal kontakt metrik çoxobrazlıdır. Məlumdur ki, Sasaki şərti

$$(\nabla_{\sigma}\phi)\theta = g(\sigma, \theta)\xi - \eta(\theta)\sigma$$

ödəyən sanki kontakt metrik struktur kimi ifadə olunur.

α –Sasaki strukturu

$$(\nabla_{\sigma}\phi)\theta = \alpha(g(\sigma, \theta) - \eta(\theta)\sigma)$$

şəklində təyin olunur, burada α –sıfırdan fərqli əmsaldır. Sonuncu düsturda $\theta = \xi$ əvəz etsək, onda alırıq ki,

$$\nabla_{\sigma}\xi = -\alpha\phi\sigma.$$

Teorem 2.1.2 Tutaq ki, ξ –vektor meydanı, $(1,1)$ –tipli ϕ tenzor meydanı və η 1 – formu $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ şərtini ödəyir və $\eta(\xi) = 1, \phi\xi = 0, \eta \circ \phi = 0$. Onda toxunan laylanma üzərində α –Sasaki metrikası üçün aşağıdakı şərt ödəyir:

$$\begin{aligned} & (\nabla^c_{\sigma^c}\phi^c)\theta^c = \\ & = \alpha \left((g(\sigma, \theta))^V \xi^c + (g(\sigma, \theta))^c \xi^V - (\eta(\theta))^c \sigma^V - (\eta(\theta))^V \sigma^c \right), \end{aligned}$$

burada g –Riman metrikası, α –sıfırdan fərqli əmsaldır. Əgər biz $\theta = \xi$ əvəzləməni etsək, onda

$$\nabla^c_{\sigma^c}\xi^c = -\alpha\phi^c\sigma^c.$$

Xüsusi halda, sanki kontakt metrik struktur

$$(\nabla_{\sigma}\phi)\theta = g(\phi\sigma, \theta)\xi - \eta(\theta)\phi\sigma$$

şərtini ödəyirsə, onda bu şərti ödəyən sanki kontakt metrik çoxobrazlısı Kenmotsi çoxobrazlısı adlanır.

β –Kenmotsu struktur

$$(\nabla_{\sigma}\phi)\theta = \beta(g(\phi\sigma, \theta) - \eta(\theta)\phi\sigma)$$

şəklində təyin olunur. Burada β –sıfırdan fərqli əmsaldır. Yuxarıdakı şərtə əsasən alırıq ki,

$$\nabla_{\sigma}\xi = \beta(\sigma - \eta(\sigma)\xi).$$

Teorem 2.1.3 Tutaq ki, ξ –vektor meydanı, $(1,1)$ –tipli ϕ tenzor meydanı və η 1 – formu $\phi^2 = -1 + \eta \otimes \xi = 0$ və $\eta \circ \phi = 0$. Onda toxunan laylanma üzərində β –Kenmotsu strukturu üçün

aşağıdakı şərt ödənilir:

$$\begin{aligned} & ((\nabla_{\sigma}\phi)\theta)^C = \\ & = \beta \left((g(\phi\sigma, \theta))^V \xi^C + (g(\phi\sigma, \theta))^C - (\eta(\theta))^C (\phi\sigma)^V (\phi\sigma)^C \right) \end{aligned}$$

burada g –Riman metrikası, β –sıfırdan fərqli əmsaldır. Əgər biz $\theta = \xi$ əvəzləməni etsək, onda

$$\nabla^C_{\sigma^C} \xi^C = \beta \left(\xi^C - ((\eta(\sigma))\xi)^C \right).$$

İkinci fəslin ikinci yarımfəslində toxunan laylanma üzərində Trans-Sasaki strukturlara baxılır.

Teorem 2.2.1 Tutaq ki, $(1,1)$ – tipli ϕ – tenzor meydanı, ξ –vektor meydanı və η 1 – formu $\phi^2 = -1 + \eta \otimes \xi$ şərti ödəyir və $\eta(\xi) = 1$, $\phi\xi = 0$, $\eta \circ \phi = 0$. Toxunan laylanma üzərində trans-Sasaki struktur

$$\begin{aligned} & (\nabla^C_{\sigma^C} \phi^C) \theta^C = \\ & = \alpha \left((g(\sigma, \theta))^V \xi^C + (g(\sigma, \theta))^C \xi^V - (\eta(\theta))^C \sigma^V - (\eta(\theta))^V \sigma^C \right) + \\ & + \beta \left((g(\phi\sigma, \theta))^V \xi^C + (g(\phi\sigma, \theta))^C \xi^V - (\eta(\theta))^C (\phi\sigma)^V \right. \\ & \quad \left. - (\eta(\theta))^V (\phi\sigma)^C \right). \end{aligned}$$

şərtini ödəyir. Burada g –Riman metrikası, α və β – sıfırdan fərqli əmsallardır.

Üçüncü fəsildə II tərtib toxunan laylanmalarda lift problemlərinə baxılır.

Üçüncü fəslin birinci yarımfəslində cəbri struktur sabitləri, holomorf funksiya anlayışları daxil edilir və Koşi-Riman şərtləri tətbiq edilir.

Biz R həqiqi ədədlər meydanı üzərində m - ölçülü assosiativ və kommutativ U_m cəbrinə baxaq, $\{e_{\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, m$ bazis və $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ cəbrin struktur sabitləri olsun:

$$e_{\alpha}e_{\beta} = C_{\alpha\beta}^{\gamma}e_{\gamma}.$$

Qeyd edək ki, $C_{\alpha\beta}^\gamma - (1,2)$ tipli tenzorun komponentləridir. U_m cəbri vahid elementi olan cəbrdir və $e_1 = 1$.

Fərz edək ki, $z = x^\alpha e_\alpha \in U_m$ cəbri dəyişəndir. Biz $z \in U_m$ dəyişənin $w = w(z) \in U_m$ cəbri funksiyasını aşağıdakı kimi daxil edək:

$$w = y^\beta(x) e_\beta.$$

Aydındır ki, $w = w(z)$ cəbri funksiyadır. Uyğun olaraq, $dz = dx^\alpha e_\alpha$ və $dy = dy^\beta(x) e_\beta$, z və w –nın uyğun olaraq diferensiallarıdır. Onda biz $w = w(z)$ funksiyasına U –holomorf deyirik o zaman ki, əgər elə $w'(z)$ funksiyası var ki, $dw = w'(z)dz$ olsun. Biz $w'(z)$ funksiyasına $w(z)$ funksiyasının törəməsi deyirik.

İndi isə biz $m \times m$ matrisini aşağıdakı kimi quraq:

$$C_\alpha = (C_{\alpha\beta}^\gamma), \alpha = 1, \dots, m$$

burada $C_{\alpha\beta}^\gamma$ struktur sabitləri U_m cəbrindəndir. γ ilə sətirləri və β ilə sütunları işarə edək.

$w = w(z)$ funksiyası U –holomorf olur yalnız və yalnız o zaman, əgər ümumiləşmiş Koşi - Riman şərtləri ödənsin:

$$C_\sigma D = DC_\sigma \left(C_{\sigma\beta}^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} C_{\sigma\gamma}^\beta \right),$$

burada $C_\sigma = (C_{\sigma\beta}^\alpha)$ və $D = \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} \right)$ Yakobi matrisidir.

$\mathfrak{R}$ üzərində 4 – ölçülü kommutativ və assosiativ U_4 cəbrini

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}, \varepsilon^4 = 0$ bazisini nəzərdən keçirək:

$$e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4.$$

Fərz edək ki, $z_\alpha = x^\alpha e_\alpha \in U_4$ cəbri dəyişəndir, burada $x^\alpha \in R$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) cəbri dəyişənlərdir. Biz $z \in U_4$ dəyişənin cəbri funksiyasını aşağıdakı kimi daxil edək:

$$w = y^\beta(x) e_\beta,$$

burada $y^\beta(x) = y^\beta(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\beta = 1, 2, 3, 4$ həqiqi dəyişənli C^∞ funksiyalarıdır.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$C_\sigma = (C_{\alpha\beta}^\gamma)$, $\sigma = 1, 2, 3, 4$ matrisləri U_m cəbrinin requlyar təsviridir.

U_4 holomorf funksiyası üçün $w = w(z)$ aşağıdakı kimi yazılır:

$$w(z) = y^\alpha e_\alpha = y^1(x^1, x^2, x^3, x^4) + \varepsilon y^2(x^1, x^2, x^3, x^4) + \\ + \varepsilon^2 y^3(x^1, x^2, x^3, x^4) + \varepsilon^3 y^4(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

burada $y^4 = x^1 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^4 x^4$.

Üçüncü fəslin ikinci yarımfəslində holomorf və təmiz metriklərə baxılır. Buruqluq tenzorundan istifadə edərək ∇ xətti rabitə, Π – strukurur və onun inteqrallanması haqqında, Π – rabitə, holomorf çoxobrazlı və Kahler tipli çoxobrazlılar alınmışdır.

Fərz edək ki, M_{rm} üzərində ∇ – xətti rabitəsi Γ_{ij}^k komponentləri ilə, ω – təmiz tenzor meydanı və onlara təsir edən $\Phi_{\alpha}^j \omega$ Taçibano operatoru verilmişdir.

M_{rm} üzərində ∇ xətti rabitəsinə uyğun Π r – requlyar strukturun hər bir $J \in \Pi$ üçün $\nabla J = 0$ olarsa, onda bu rabitə Π – rabitə adlanır. Əgər r – requlyar Π struktur üçün Π – rabitə buruquz olarsa, onda Π struktur sanki inteqrallanan adlanır. Ən sadə Π – strukturlar (sanki kompleks struktur, r – requlyar Π struktur) üçün inteqrallanan və sanki inteqrallanan anlayışları ekvivalentdir.

Teorem 3.2.1 Əgər M_{rm} üzərində buruqsuz Π –rabitə olarsa, onda

$$(\Phi_J \omega)_{kj_1j_2} = J^h_{\sigma k} \nabla_h \omega_{j_1j_2} - J^h_{\sigma j_1} \nabla_k \omega_{hj_2}$$

ödəniləcək.

Fərz edək ki, M_{rm} Riman çoxobrazlısı üzərində g təmiz metrika ilə r requlyar Π struktur var. Əgər Π struktur inteqrallanan olarsa, (M_{rm}, Π, g) üçlüyü g - təmiz metrikalı U – holomorf çoxobrazlısıdır.

Teorem 3.2.2 g - təmiz Riman metrikası U holomorf (M_{rm}, Π, g) , $\Pi = \{J\}_{\mathcal{G}}$ çoxobrazlısı üzərində U - holomorf olması üçün zəruri və kafi şərt Kahler tipli çoxobrazlı olmasıdır, yəni ${}^g\nabla_{\alpha} J = 0$, $\alpha = 1, \dots, m$. Burada ${}^g\nabla$ - g tenzorun Levi- Çivita rabitəsidir.

Teorem 3.2.3 Tutaq ki, (M_{rm}, Π, g) U - holomorf çoxobrazlıdır. Əgər Π - metriki qoruyan rabitənin buruqluq tenzoru uyğun Π rabitə ilə təmiz olarsa, onda g təmiz metrikası U - holomorfdur.

Üçüncü fəslin üçüncü yarım fəslində Kahler tipli metriklərə baxılır. 2-jetli laylanma üzərində afinor meydanların komponentləri daxil edilir, təmiz Riman metrikası araşdırılıb.

Fərz edək ki, kanonik bazisi $\{e_1, e_2, e_3\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $\varepsilon^3 = 0$ olan 3 ölçülü cəbri verilmişdir. $R(\varepsilon^2)$ cəbrinin requlyar təsvirinin $C_{\sigma} = (C_{\alpha\beta}^{\gamma})$, $\sigma = 1, 2, 3$ matrisləri aşağıdakı formaya malikdirlər:

$$C_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$T^2(V_r)$, $\dim(T^2(V_r)) = 3r$ üzərində γ afinor meydanları

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = 0$$

komponentləri ilə verilmişdir.

Ümumiləşmiş Koşi – Riman şərtləri ödənilir: $C_{\alpha\beta}^{\alpha} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} C_{\sigma\gamma}^{\beta}$.

$R(\varepsilon^2)$ üzərində holomorf funksiyası verilir:

$$w = w(z) = y^1(x^1, x^2, x^3) + \varepsilon y^2(x^1, x^2, x^3) + \varepsilon^2 y^3(x^1, x^2, x^3), \quad \text{burada}$$

$z = x^1 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x^3$ aşağıdakı tənliklərə çevrilir:

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^3} = \frac{\partial y^2}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^3}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^2} = \frac{\partial y^2}{\partial x^1}.$$

İndi isə g Riman metrikasının ikinci liftini nəzərdən keçirək.

$${}^{II}g = \begin{pmatrix} x^{\bar{s}} \partial_s g_{ji} + \frac{1}{2} x^{\bar{t}} x^{\bar{s}} \partial_t \partial_s g_{ji} & x^{\bar{s}} \partial_s g_{ji} & g_{ji} \\ x^{\bar{s}} \partial_s g_{ji} & g_{ji} & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Pi = \{I, \gamma, \gamma^2\}$ strukturuna görə təmiz Riman metrikasıdır və

$$\Phi_{\gamma} {}^{II}g = \Phi_{\gamma^2} {}^{II}g = 0.$$

$T^2(V_r)$ üzərində ${}^{II}g$ -nin deformasiya edilmiş metrikasını (liftini)

${}^{II} \sim g$ verilir

$${}^{II} \sim g = \begin{pmatrix} x^{\bar{s}} \partial_s g_{ji} + \frac{1}{2} x^{\bar{t}} x^{\bar{s}} \partial_t \partial_s g_{ji} + x^{\bar{s}} \partial_s G_{ji} + H_{ji} & x^{\bar{s}} \partial_s g_{ji} + G_{ji} & g_{ji} \\ x^{\bar{s}} \partial_s g_{ji} + G_{ji} & g_{ji} & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

və ${}^{def}(\Pi g)$ kimi işarə olunur.

Teorem 3.3.2 Əgər $V^r g$ metrikası ilə verilmiş Riman çoxobrazlısıdırsa, onda $(T^2(V_r), \Pi, {}^{def}(\Pi g))$ üçlüyü Kahler tipli çoxobrazlıdır.

${}^{def}(\Pi g)$ deformasiya edilmiş lift aşağıdakı kimi olur:

$${}^{def}(\Pi g) = \Pi g + {}^I G + {}^0 H,$$

burada

$${}^I G = \begin{pmatrix} x^{\bar{s}} \partial_s G_{ji} & G_{ji} & 0 \\ G_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad {}^0 H = \begin{pmatrix} H_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uyğun olaraq 1-ci və 0-cı liftlərdir.

Müəllif məsələlərin qoyuluşuna və işə daimi diqqətinə görə elmi rəhbəri, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Arif Səlimova dərin minnətdarlığını bildirir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi baza çoxobrazlısı üzərində verilmiş diferensial-həndəsi obyektlərin yüksək tərtib toxunan və kotoxunan laylanmalarına liftlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. III və IV tərtib nilpotenti olan cəbrlərin holomorf funksiyalarının açıq şəkilləri tapılmışdır;
2. Holomorf funksiyaların köməyi ilə II tərtib toxunan laylanmalarda Keler tipli metriklər tapılmışdır;
3. Holomorf funksiyaların köməyi ilə II tərtib toxunan laylanmalarda vektor meydanlarının deformasiya olunmuş tam liftləri tapılmışdır;
4. Toxunan laylanmalarda α -Sasaki, β – Kenmotsu, trans-Sasaki strukturların liftləri qurulub;
5. Kotoxunan laylanmada sanki kompleks strukturun integrallanma şərtləri və bu struktura bağlanan Taçibana operatorlarının tam və horizontal liftlərə tətbiq olunmasının açıq şəkilləri tapılmışdır.

**Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə
dərc olunmuşdur:**

1. Arif Salimov, Tarana Sultanova “On a pullback of symplectic 2-forms”, International Conference dedicated to the 90th anniversary of Academician Azad Mirzajanzade, 13-14 December 2018 pp. 292-294
2. Sultanova T.T., Salimov A.A. “Some notes on C manifolds”, Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı ildönümünə həsr olunmuş Elmi Konfransın materialları, Bakı 2020 səh. 173
3. Arif Salimov, Tarana Sultanova “On holomorphic pseudo-Riemannian manifolds” International Conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics , 23-25 October, 2019, Baku Azerbaijan, pp.447-448
4. Sultanova T., Salimov A. “Deformed lift of a Riemannian metric in the bundle of 2-jets”, Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 97-ci ildönümünə həsr olunmuş Elmi Konfransın materialları, Bakı, səh. 183
5. “Deformed lifts in the bundle of 2-jets”, 2021 ; Seher Aslancı, Tarana Sultanova, səh. 155-162, Tbilisi Math Journal, Jurnal Web of Science (indexi: ESCI), -v. 14, №3, -pp. 155-162.
Web of Science <https://projecteuclid.org/journals/tbilisi-mathematical-journal/volume-14/issue-3/Deformed-lifts-in-the-bundle-of-2-jets/10.32513/tmj/19322008149.short>
6. “Lift problems on differential geometric objects”, Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 9, Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21-25, 2021, page67
7. Seher Aslancı, Tarana Sultanova “Some notes on deformed lifts” , 18th International Geometry Symposium, Malatya, Turkey, 12-13 July, 2021 p.70
8. “Integrable Π -structures on manifolds”, Republican virtual

scientific conference on "Mathematics, Mechanics and their applications" dedicated to the 98th anniversary of National Leader Heydar Aliyev 24-25 may 2021, Baku, Azerbaijan (Plenar Çıxış) səh.212-213,

9. "Some Notes on Integrability Conditions and Operators on Cotangent Bundle", Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, № 2, 22.04.2021 pp. 39-53
10. Haşım Çayır, Tarana Sultanova " α - Sasakian, β - Kenmotsu and Trans-Sasakian structures on the tangent bundle", ISSN 1303-5991 E-ISSN 2618-6470, Communications Faculty of Sciences University of Ankara - Series A1, Mathematics and Statistics, -222, -v. 71, №3, pp. 682-688, March, 2022
Web of Science <https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.1010695>
11. Sultanova T.T. Pure metrics in the bundle of 2-jets, Republican virtual scientific conference on "Mathematics, Mechanics and their applications" dedicated to the 99th anniversary of National Leader Heydar Aliyev 11-13 may, 2022, Baku, Azerbaijan,
12. Sultanova T.T. On holomorphic functions, Bakı Dövlət Xəbərləri N1,2022 pp. 64-71
13. Tarana Sultanova, Arif Salimov On holomorphic metrics of 2-jet bundles, Italia Mediterr. J. Math. 20 January 2022, pp. 19-29
Web of Science <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01975-3>
14. Sultanova Tarana Teymur "Pure metrics in the bundle of 2-jets", Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş Elmi Konfransın materialları, Bakı 2022, səh. 377 - 378
15. Tarana Sultanova, Vertical lifts of functions, vector fields and 1-forms, Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Diferensial və integral operatorlar" mövzusunda Elmi Konfrans materialları, Bakı 2023, səh. 179 - 180



Disseretasiyanın müdafiəsi **20 may 2025-ci** il tarixində saat **14⁰⁰** Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BED 2.17 Birdəfəlik Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin Kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya işi və avtoreferatın elektron versiyası Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **18 aprel 2025-ci** il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 14.04.2025

Kağızın formatı: 60x84 1/16

Həcmi: 26534

Tiraj: 100