АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ПОДАЛГЕБР ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность: 1202.01 - Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Аида Хуршуд кызы Аскарова**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии

Баку – 2021

Диссертационная работа выполнена в Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана в отделе «Теория функций».

Научный руководитель д. м. н., доцент

Вугар Эльман оглы Исмаилов

Официальные оппоненты: д. м. н., доцент

Ровшан Алифага оглы Бандалиев

д. ф.-м. н., профессор

Алик Малик оглы Наджафов

к.ф.–м.н., доцент

Фуад Агджа оглы Абдуллаев

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета: член- корр.НАНА,

д.ф.–м.н., профессор,

__________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

__________ **Абдурагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара: член- корр. НАНА,

д.ф.–м.н., профессор

__________ **Билал Тельман оглы Билалов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы. В 1885 году Карл Вейерштрасс показал, что каждая непрерывная функция на отрезке может быть с любой угодно точностью аппроксимирована самыми простыми функциями, а именно полиномами. Маршал Стоун обобщил эту теорему доказав, что любую непрерывную функцию определенную на компактном хаусдорфовом пространстве X можно аппроксимировать функциями из некоторой алгебры непрерывных функций тогда и только тогда когда эта алгебра разделяет точки пространства X и не исчезает (не превращается в 0) ни в одной точке. Эта теорема обобщает классическую теорему Вейерштрасса в двух направлениях: вместо отрезка $[a,b]$ берется любой хаусдорфовый компакт X, а вместо класса полиномов рассматривается более общий класс функций из пространства непрерывных функций. Эта важная теорема известна в литературе под названием теоремы Стоуна-Вейерштрасса. Заметим, что выше и в диссертационной работе речь идет о функциях принимающих действительные значения.

В настоящее время имеется очень много интересных результатов, обобщающих и усиливающих классическую теорему Стоуна-Вейерштрасса (относительно ряда таких результатов см., например, работы E. Bishop, S. Machado, S. Boel, T. Carlsen, N. Hansen, P. Chernoff, R. Rasala, W.Waterhouse, J. Prolla, K. Srikanth, R. Yadav, R. Stephenson). Среди работ азербайджанских математиков, посвященных обобщениям и аналогам теоремы Стоуна-Вейерштрасса, следует отметить работы Б. Билалова, В. Мирзоева и А. Туровского.

Одно важное направление, обобщающее идеи Стоуна, заключается в переходе из одной алгебры непрерывных функций на сумму нескольких алгебр. Пусть X, как выше, компактное хаусдорфово пространство, $C(X)$ - пространство действительных непрерывных функций на X и A_i, $i=1,...,k$, некоторые подалгебры пространства $C(X)$. Рассмотрим приближение функций из $C(X)$ функциями из подпространства $A_1+\cdots+A_k$. Относительно этого приближения возникают следуюущие естественные задачи:

1) При каких условиях сумма $A_1+\cdots+A_k$ совпадает со всем пространством $C(X)$?

2) При каких условиях сумма $A_1+\cdots+A_k$ всюду плотно в пространстве $C(X)$?

3) Как вычислить погрешность приближения конкретной функции $f\in C(X)$ функциями из $A_1+\cdots+A_k$?

4) Как характеризовать наилучшее приближение (экстремальный элемент) из $A_1+\cdots+A_k$ к данной функции $f\in C(X)$?

Для задач (1) и (2) интересны как достаточные так и необходимые условия. Следует отметить что список вышепоставленных задач можно расширить. С точки зрения теории приближений интересны, например, также задачи о замкнутости и проксиминальности суммы $A_1+\cdots+A_k$ в $C(X)$, задача об описании аннулятора $(A_1+\cdots+A_k)^{\perp}$, т.е. пространства функционалов аннулирующие каждый элемент из $A_1+\cdots+A_k$, и т.д.

Следует отметить, что круг задач относительно суммы подалгебр из $C(X)$ возник после знаменитой суперпозиционной теоремы А.Н. Колмогорова. Эта теорема в терминах алгебр гласит следующим образом. Для единичного куба I^d, $\mathrm{I}=[0,1]$, $d\geq 2$, существуют, $2d+1$ алгебр $A_i\subset C(X)$, $i=1,...,2d+1$, такие, что $C(\mathrm{I}^d)=A_1+\cdots+A_{2d+1}$. Напомним, что каждая алгебра в этой теореме порождается одним собственным элементом, т.е. для A_i существует такой элемент $s_i\in A_i$, что

$A_i = \{g_i \circ s_i : g_i \in C(\mathbb{R})\}$. Эта теорема стала началом исследований многих задач по приближению линейными суперпозициями и суммами подалгебр пространства непрерывных функций. После теоремы Колмогорова появились много важных и интересных работ, среди которых следует отметить работы Lorentz, Фридмана, Витушкин и Хенкина, Ostrand, Sternfeld, Sprecher, Sproston и Straus, Marshall и O'Farrell, Хавинсона, Исмаилова. В основном эти работы были направлены на обобщение, усиление и получение аналогов суперпозиционной теоремы Колмогорова и на изучение свойств сумм произвольных алгебр непрерывных функций. Например, Ostrand обобщил теорему Колмогорова на компактные метрические пространства. Он доказал, что для каждого d-размерного компактного метрического пространства X существуют непрерывные функции $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2d+1} \subset C(X)$ такие, что $C(X) = A_1 + \cdots + A_{2d+1}$, где алгебры $A_i = \{g_i \circ \alpha_i : g_i \in C(\mathbb{R})\}$, $i = 1,...,2d+1$. Sternfeld показал, что число $2d+1$ не может быть уменьшено для всякого d-размерного метрического пространства X. Более того, он дал характеристику размерности метрического компакта в терминах сумм алгебр. Он показал, что компактное метрическое пространство X имеет размерность d тогда и только тогда, когда существуют такие $2d+1$ подалгебр $A_i \subset C(X)$, что $C(X) = A_1 + \cdots + A_{2d+1}$ и для всяких меньше чем $2d+1$ подалгебр $B_i \subset C(X)$, $i = 1,...,k$, $k < 2d+1$, имеет место $C(X) \neq B_1 + \cdots + B_k$. Из этого результата следует, что число слагаемых в суперпозиционной теоремы Колмогорова являетcя наилучшим.

В работах Sternfeld было начато изучение свойств сумм подалгебр пространства непрерывных функций, как самостоятельное направление. В теореме Колмогорова и его обобщениях утверждается, что для конкретного топологического пространства X (для d-мерного куба, d-мерного компакта эвклидового пространства, метрического компакта размерности d) существуют алгебры A_i, $i=1,...,2d+1$, такие, что $C(X)=A_1+\cdots+A_{2d+1}$. Можно поставить более общую задачу: Пусть X компактное топологическое пространство и A_i, $i=1,...,k$, подалгебры $C(X)$. При каких условиях $C(X)=A_1+\cdots+A_k$? В этой задаче условия должны налагаться на семейство алгебр A_i. Например, для компактных метрических и компактных хаусдорфовых пространств X Sternfeld и Sproston, Straus, соответственно, получили достаточное условие для того, чтобы сумма $A_1+\cdots+A_k$ совпадала со всем пространством $C(X)$, которое также необходимо в случае когда $A_2=\cdots=A_k$.

В диссертационной работе продолжается изучение цикла задач вокруг общей проблемы приближения суммами подалгебр пространства непрерывных функций. Более точно, изучаются вышепоставленные задачи (1)-(4) и доказывается ряд теорем, которые усиливают, дополняют и обобщают соответствующие известные результаты.

Объект и предмет исследования. Пространства непрерывных функций, суммы алгебр пространства непрерывных функций.

Цель и задачи исследования. 1) Исследовать задачу представления пространства непрерывных функций, определенных на компактном хаусдорфовом пространстве, в виде суммы подалгебр этого пространства. Изучить вопрос о плотности таких сумм в пространстве непрерывных функций.

2) Исследовать на сходимость алгоритм Дилиберто-Страуса в задаче приближения непрерывной функции, определенной на компактном хаусдорфовом пространстве, элементами суммы двух подалгебр пространства непрерывных функций.

3) Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы элемент суммы алгебр был наилучшим приближением

(экстремальным элементом) для данной непрерывной функции.

4) Применить полученные общие результаты к изучению аппроксимирующих свойств конкретных, важных с точки зрения приложений, алгебр функций.

Методы исследования. В работе применяются методы теории функций, функционального анализа, топологии и теории приближений.

Основные положения, выносящиеся на защиту.

1) Результаты о представлении пространства непрерывных функций, определенных на компактном хаусдорфовом пространстве, в виде суммы подалгебр этого пространства.

2) Результаты о плотности суммы алгебр в пространстве непрерывных функций.

3) Результат о сходимости алгоритма Дилиберто-Страуса к погрешности приближения в задаче аппроксимации непрерывной функции суммой двух подалгебр пространства непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.

4) Результат о чебышевской характеризации наилучшего приближения суммами алгебр.

5) Прикладные результаты об аппроксимирующих свойствах суммы алгебр ридж функций. Формула для вычисления погрешности приближения функции многих переменных элементами суммы двух ридж алгебр.

Научная новизна исследования. 1) Найдены необходимые условия для представления пространства непрерывных функций, определенных на компактном хаусдорфовом пространстве, в виде суммы подалгебр этого пространства. Эти условия дополняют достаточное условие Sproston и Straus для возможности такого представления.

2) Доказано, что для случая двух алгебр, вышеуказанное необходимое условие является также достаточным. Полученный результат обобщает классическую теорему Стоуна-Вейерштрасса из случая одной алгебры на случай суммы двух

алгебр.

3) Найдено необходимое условие для плотности суммы алгебр в пространстве непрерывных функций, которое при соответсвующих ограничениях является также достаточным.

4) Доказано сходимость алгоритма Дилиберто-Страуса к погрешности приближения в задаче аппроксимации непрерывной функции суммой двух подалгебр пространства непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.

5) Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы элемент суммы алгебр был наилучшим приближением (экстремальным элементом) для данной непрерывной функции. Полученный результат является аналогом теоремы Чебышева о характеризации полинома наилучшего приближения.

6) Полученные общие результаты применены к изучению аппроксимирующих свойств суммы алгебр ридж функций. Установлена формула для вычисления погрешности приближения функции многих переменных элементами суммы двух ридж алгебр.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в теории функций, функциональном анализе, в теории приближений, и в областях, где требуется аппроксимация сложных функциональных зависимостей посредством простых и в то же время полезных функций, таких как ридж функции, радиал функции и т.д.

Апробация и внедрение. Основные результаты диссертации докладывались в Институте Математики и Механики НАН Азербайджана на семинарах отдела «Теория функций» (рук., д.м.н. В.Э. Исмаилов), а также на республиканских и международных научных конференциях «Актуальные проблемы математики и механиики» посвященной 94-летию со дня рождения общенационального лидера Азербайджана Гейдара Алиева, “Modern problems of mathematics and mechanics” международная конференция посвященная 80-

летию академика Акифа Гаджиева (6 – 8 декабря, Баку 2017), «Дифференциальные Уравнения и Смежные Проблемы», международная конференция посвященная юбилеям (70 – летию) академика РАН Моисеева Е.И., академика АН РБ Шагапова В.Ш. и профессора Солдатова А.П. (25 – 29 июнья, г. Стерлитамак, Уфа 2018), «Современные проблемы инновационных технологий и прикладной математики в добыче нефти и газа», международная конференция посвященная 90-летию Азада Мирзаджанзаде (13 – 14 декабря, 2018, г.Баку), "Complex Analysis and Approximation Theory" (May 29 – 31, 2019 г. Уфа), "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" международная конференция посвященная 60-летнему юбилею Института математики и механики НАНА (23 – 25 октября, Баку 2019).

Личный вклад автора. Все доказанные в диссертации теоремы, а именно, теоремы о представлении пространства непрерывных функций, определенных на компактном хаусдорфовом пространстве, в виде суммы подалгебр этого пространства; теоремы о плотности суммы алгебр в пространстве непрерывных функций; теорема о сходимости алгоритма Дилиберто-Страуса к погрешности приближения в задаче аппроксимации непрерывной функции элементами суммы двух подалгебр пространства непрерывных функций; теорема о чебышевской характеризации наилучшего приближения суммами алгебр; теоремы об аппроксимирующих свойствах суммы алгебр ридж функций; теорема о вычислении погрешности приближения функции многих переменных элементами суммы двух ридж алгебр получены автором.

Название организации, в которой выполнена диссертация.

Институт Математики и Механики, Национальной Академии Наук Азербайджана.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 15 работах (8 статей, 7 из них индексированы в платформе Web of Science компании Clarivate Analytics (3 в базе "Science Citation Index Expanded", 4 в базе "Emerging Sources Citation Index") и 7 тезисов (6 из них были опубликованы на международных научных конференциях и 1 на республиканской научной конференции)), список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (~ 48000), 3 глав (I Глава ~ 52000, II Глава ~ 76000, III Глава ~ 44000) и списка литературы, включающего 116 наименования. Общий объем диссертации 125 страниц (~ 220000знаков).

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы.

В **главе 1** рассматриваются задачи представления пространства непрерывных функций в виде суммы своих подалгебр и в виде замыкания такой суммы. Эта глава состоит из пяти параграфов. В параграфе 1.1 излагается постановка задачи представления суммами алгебр и обсуждаются некоторые известные необходимые или достаточные условия для возможности такого представления. Пусть X компактное хаусдорфово пространство и $C(X)$ пространство действителных непрерывных функций на X, снабженное топологией равномерной сходимости. Пусть кроме того нам дано конечное число замкнутых подалгебр $A_1,...,A_k$ пространства $C(X)$, которые содержат постоянных функций. Рассмотрим следующую задачу. Какие условия налагаемые на $A_1,...,A_k$ необходимы и/или достаточны для равенства $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$? В этом параграфе сначала поочередно рассматриваются два простые необходимые условия для этого равенства, а именно, рассматриваются следующие условия:

а) для любых различных $x, y \in X$ существует алгебра A_i разделяющая эти точки;

б) для любых замкнутых множеств $P, Q \subset X$, $P \cap Q = \varnothing$ существует алгебра A_i разделяющая эти множества.

Поочередно показывается, что эти условия не являются достаточными для представления $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$. Затем, приводится одно достаточное условие Sproston и Straus, которое является необходимым только для случая $k = 2$.

В параграфе 1.2 определяются новые объекты, называемые *циклом* и *полуциклом* относительно конечного семейства подалгебр пространства непрерывных функций, а также функционалы, порожденные этими объектами. Для того, чтобы определить соответствующие объекты, сначала рассматриваются эквивалентные отношения R_i, $i = 1,...,k,$ для точек пространства X:

$$a \overset{R_i}{\sim} b \text{ если } f(a) = f(b) \text{ для всех } f \in A_i.$$

Так как само пространство X компактное, для каждого $i = 1,...,k,$ фактор пространсво $X_i = X/R_i$ (относительно отношения R_i), снабженное фактор топологией, является компактным. Кроме того, канонические проекции $s_i : X \to X_i$ являются непрерывными отображениями.

Из теоремы Стоуна-Вейерштрасса следует, что каждая из алгебр A_i, $i = 1,...,k,$ (как множество) представляется в виде

$$A_i = \{ f(s_i(x)) : f \in C(X_i)\}, i = 1,...,k.$$

Циклы и полуциклы относительно семейства алгебр A_i, $i = 1,...,k,$ определяются следующим образом.

Определение 1. *Множество точек* $l = (x_1, \ldots, x_n) \subset X$ *называется циклом относительно семейства алгебр* A_i, $i = 1,...,k,$ *если существует вектор* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Z}^n$ *с* *ненулевыми целыми компонентами* λ_j *такой, что*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{s_i}(x_j) = 0 \text{ *для всех* } i = 1,...,k .$$

Здесь δ_a единичная точечная масса, сосредоточенная в точке a.

Например,множество $l = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$ является циклом в I^3, $\mathrm{I} = [0,1]$, относительно алгебр $A_i = \{p(z_i): \ p \in C[0,1]\}, i = 1,2,3.$ В определении 1 вектор λ может быть выбран как $(-2,1,1,1,-1)$.

Определение 2. *Множество точек* $l = (x_1,\ldots,x_n) \subset X$ *называется полуциклом относительно семейства алгебр* A_i, $i = 1,...,k$, *если существует вектор* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathrm{Z}^n$ *с ненулевыми целыми компонентами* λ_j *такой, что для каждого индекса* $i = 1,...,k$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{s_i(x_j)} = \sum_{t=1}^{r_i} \lambda_{i_t} \delta_{s_i(x_{i_t})}, \text{ где } r_i \le k.$$

Заметим, что для каждого $i = 1,\ldots,k$, множество $\{\lambda_{i_t}, t = 1,...,r_i\}$ является подмножеством множества $\{\lambda_j,\ j = 1,...,n\}$. Это означает, что для каждого индекса i в сумме $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{s_i(x_j)}$ имеется не более чем k слагаемых (сумма остальных слагаемых тождественно превращается в нуль). Приведем один пример полуцикла. Пусть даны алгебры A_1 и A_2, имеющие канонические проекции s_1 и s_2 соответственно. Пусть $l = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ множество со следующим свойством:

$$s_1(x_1) = s_1(x_2), s_2(x_2) = s_2(x_3), s_1(x_3) = s_1(x_4),..., s_2(x_{n-1}) = s_2(x_n).$$

Тогда множество $l = \{x_1,\ldots,x_n\}$ является полуциклом относительно алгебр A_1 и A_2.

Отметим, что в работе Marshall и O'Farrell, упорядоченное множество точек $(x_1,\dots,x_n)$ с условием $x_i \neq x_{i+1}$ и удовлетворяющее цепочку равенств $s_1(x_1)=s_1(x_2)$, $s_2(x_2)=s_2(x_3)$, $s_1(x_3)=s_1(x_4),...,$ или цепочку равенств $s_2(x_1)=s_2(x_2)$, $s_1(x_2)=s_1(x_3)$, $s_2(x_3)=s_2(x_4),...,$ называется молнией относительно (A_1,A_2) Аналогичным образом определяется бесконечная молния $(x_1,x_2,...)$. Молния $(x_1,\dots,x_n)$ называется замкнутой, если $(x_1,...,x_n,x_1)$ также является молнией и n четное число.

В параграфе 1.2 вводится еще одно определение.

Определение 3. *Цикл (или полуцикл) l называется q-циклом (q- полуциклом) если вектор λ, связанный с l может быть выбран так, что $|\lambda_i| \le q$, $i=1,...,n$, и q минимальное число с этим свойством.*

Например, полуцикл, рассмотренный выше, является 1-полуциклом. Если в этом примере, $s_2(x_{n-1})=s_2(x_1)$, то множество $\{x_1,x_2,...,x_{n-1}\}$ есть 1-цикл. Приведем простой пример 2 - цикла относительно алгебр $U=\{u(x)\}$, $V=\{v(y)\}$. Рассмотрим объединение вершин двух квадратов $[0,1]^2$ и $[0,2]^2$, т.е. множество:

$$\{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(1,0),(0,2),(2,0)\}.$$

Понятно, что это множество есть 2-цикл со связанным вектором $(2,1,1,-1,-1,-1,-1)$. Подобным образом можно построить q-цикл или q-полуцикл для произвольного натурального числа q.

Каждый полуцикл $l=\{x_1,\dots,x_n\}$ и связанный с ним вектор $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ порождают следующий функционал

$$F_{l,\lambda}(f)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j), \quad f\in C(X).$$

Очевидно, $F_{l,\lambda}$ линейный ограниченный функционал с нормой $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$.

В параграфе 1.3 устанавливается необходимое условие для представления пространства непрерывных функций, определенных на некотором компактном хаусдорфовом пространстве, суммами его k замкнутых подалгебр. Достаточное условие такого рода для упомянутого представления было получено Y.Sternfeld в 1978 году. В этом параграфе сначала доказывается следующая лемма:

Лемма 1. *Если полуцикл $l = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является циклом, то $F_{l,\lambda}(g) = 0$, для каждого элемента $g \in A_1 + \cdots + A_k$.*

Затем доказывается основной результат:

Теорема 1. *Следующие условия необходимы для равенства $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$:*

(Z_1) *В пространстве X не существуют циклов относительно семейства алгебр A_i, $i = 1,\ldots,k$;*

(Z_2) *Для каждого $q \in \mathbb{N}$, длины (количество точек) всех q - полуциклов равномерно ограничены.*

В параграфе 1.4 доказывается, что для суммы двух подалгебр $(k = 2)$, условия (Z_1) и (Z_2) является также достаточными. В случае одной подалгебры ($k = 1$), полученный результат совпадает с классической теоремой Стоуна-Вейерштрасса.

Теорема 2. *Если $k = 2$ то условия (Z_1) и (Z_2) вместе необходимы и достаточны для представления $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$. Более того, в условии (Z_2), рассмотрение только* 1- *полуциклов достаточно.*

Теорему 2 можно сформулировать в следующем, более удобном для приложений виде.

Теорема 3. *Представление $C(X) = A_1 + A_2$ имеет место тогда и только тогда, когда в пространстве X не* *существуют замкнутых молний относительно* (A_1, A_2) *и длины всех молний равномерно ограничены.*

Для компактного множества $X \subset \mathrm{R}^2$ и алгебр $U = \{u(x)\}$, $V = \{v(y)\}$, которые состоят из функций одной переменной, определенных на соответствующих проекциях X на координатные оси, теорема 3 впервые была получена Хавинсоном. Используя результаты Sternfeld, Хавинсон в своей монографии доказал этот результат также для случая линейных суперпозиций.

Далее в этом параграфе доказывается, что теорема Стоуна-Вейерштрасса есть следствие теоремы 3 и условия теоремы 1 не являются достаточными для представления $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$, если $k > 2$.

В параграфе 1.5 приводится одно необходимое условие для представления пространства непрерывных функций в виде замыкания суммы конечного числа замкнутых алгебр. При соответствующих ограничениях, полученные результаты положительно решают вопрос о возможности приближения непрерывной функции элементами суммы алгебр с любой наперед заданной точностью. Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Теорема 4. *Пусть* $\overline{A_1 + \cdots + A_k} = C(X)$. *Тогда в пространстве* X *не существуют циклов относительно семейства алгебр* A_i, $i = 1,...,k$.

В **главе 2** рассматривается задача наилучшего приближения непрерывной функции, определенной на компактном хаусдорфовом пространстве, суммой двух замкнутых алгебр и исследуется сходимость алгоритма Дилиберто - Страуса к погрешности приближения. Кроме того доказывается теорема типа Чебышева для характеризации наилучшего приближения (экстремального элемента). Эта глава состоит из пяти параграфов. В параграфе 2.1 излагается постановка задачи и приводятся некоторые известные результаты о сходимости алгоритма Дилиберто-Страуса для различных задач приближения. Пусть X компактное хаусдорфово пространство, $C(X)$ пространство действительных непрерывных функций на X и $A_1 \subset C(X)$, $A_2 \subset C(X)$ замкнутые алгебры, которые содержат постоянных функций. Рассмотрим аппроксимацию функции $h \in C(X)$ элементами суммы $A_1 + A_2$ (или просто суммой $A_1 + A_2$). Построим следующую функциональную последовательность: $h_1(x) = h(x), h_{2n} = h_{2n-1} - Fh_{2n-1}, h_{2n+1} = h_{2n} - Gh_{2n}, n = 1,2,...,$ где $F : C(X) \to A_1$ и $G : C(X) \to A_2$ операторы наилучщего приближения. Процесс построения членов этой последовательности называется алгоритмом Дилиберто-Страуса. Понятно, что $\|h_1\| \geq \|h_2\| \geq \|h_3\| \geq \cdots \geq E(h)$, где $E(h)$ погрешность приближения, т.е.

$$E(h) = \inf_{w \in A_1 + A_2} \|h - w\|.$$

Задача состоит в следующем: при каких условиях алгоритм Дилиберто-Страуса сходится к погрешности приближения, т.е. $\|h_n\| \to E(h)$, при $n \to \infty$?

Для решения этой задачи в параграфе 2.2 изучается вопрос о непрерывности функций максимума и минимума, которые образуются с помощью канонических отображений $s : X \to X_1$, $p : X \to X_2$, где X_1 и X_2 фактор пространства порожденными эквивалентными отношениями $a \overset{R_i}{\sim} b$ если $f(a) = f(b)$ для всех $f \in A_i$, соответсвенно. Пусть $h \in C(X)$. Рассмотрим действительные функции

$$f_1(a) = \max_{\substack{x \in X \\ s(x)=a}} h(x),\ f_2(a) = \min_{\substack{x \in X \\ s(x)=a}} h(x), a \in X_1,$$

$$g_1(b) = \max_{\substack{x \in X \\ p(x)=b}} h(x), g_2(b) = \min_{\substack{x \in X \\ p(x)=b}} h(x), b \in X_2.$$

Когда функции f_i и g_i непрерывны на множествах X_1 и X_2, соответственно? Непрерывность этих функций строго зависит от фактор отображений s и p Если функции f_i и g_i непрерывны для каждой $h \in C(X)$, то будем говорит, что алгебры A_1 и A_2 обладают, C-свойством. Относительно C-свойства справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть X компактное секвенциальное хаусдорфово пространство и A замкнутая подалгебра пространства $C(X)$, содержащая константы. Пусть X_1 фактор пространство, порожденное вышеуказанным эквивалентным отношением и $s: X \to X_1$ естественное фактор отображение. Тогда функции f_1 и f_2 непрерывны на X_1 для всякого $h \in C(X)$, если для любых двух точек x и y удовлетворяющих равенству $s(x) = s(y)$ и любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся к x существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся к y такая, что $s(y_n) = s(x_n)$, для всех $n = 1,2,..$*

Далее доказывается следствие этой теоремы для конкретной, важной с точки зрения приложений, алгебры ридж функций:

Следствие 1. *Если Q выпуклое компактное множество пространства $\mathbb{R}^d$, то алгебра $A = \{g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\}$, где $\mathbf{a}$ ненулевой фиксированный вектор в $\mathbb{R}^d$ и функции вида $A = \{g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\}$ (называемыми ридж функциями) варьируются в $C(Q)$, имеет C-свойство.*

Из этого следствия в частном случае получается, что алгебры $A_1 = \{f(x):\ f \in Q_x\}$ и $A_2 = \{g(y):\ g \in Q_y\}$ где Q_x и Q_y проекции компактного выпуклого множества $Q \subset \mathbb{R}^2$ на координатные оси x и y, обладают C-свойством.

В параграфе 2.3 определяются операторы

$$F : C(X) \to A_1,\ Fh(a) = \frac{1}{2}\left(\max_{\substack{x\in X \\ s(x)=a}} h(x) + \min_{\substack{x\in X \\ s(x)=a}} h(x) \right),$$ для всех $a \in X_1$,

$$G : C(X) \to A_2,\ Gh(b) = \frac{1}{2}\left(\max_{\substack{x\in X \\ p(x)=b}} h(x) + \min_{\substack{x\in X \\ p(x)=b}} h(x) \right),$$ для всех $b \in X_2$.

и доказывается теорема:

Теорема 6. *Пусть* X *компактное хаусдорфово пространство и* A_i, $i = 1,2$, *замкнутые подалгебры пространства* $C(X)$, *содержащие константы. Пусть, кроме того, эти подалгебры обладают* C*-свойством. Тогда операторы* F *и* G *являютя центральными операторами наилучшего приближения, действующие из пространства* $C(X)$ *на алгебр* A_1 *и* A_2, *соответственно. Кроме того, эти операторы неэкспансивные, т.е. для них удовлетворяются следующие неравенства:*

$$\|Fv_1 - Fv_2\| \le \|v_1 - v_2\| \text{ и } \|Gv_1 - Gv_2\| \le \|v_1 - v_2\|$$

для всех $v_1, v_2 \in C(X)$.

Из этой теоремы и из общего результата Golomb получается сходимость алгоритма Дилиберто-Страуса для приближения суммой двух алгебр при определенных условиях, что показывает следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* X *компактное хаусдорфово пространство и* A_i, $i = 1,2$, *замкнутые подалгебры пространства* $C(X)$, *содержащие константы. Пусть, кроме того, эти подалгебры обладают* C*-свойством и сумма* $A_1 + A_2$ *замкнута в* $C(X)$. *Тогда* $\|h_n\|$ *сходится к погрешности приближения* $E(h) \overset{def}{=} dist(h, A_1 + A_2)$.

В параграфе 2.4 приводится новое доказательство теоремы 7, применив совершенно новые идеи. В этом доказательстве можно увидеть почему приходится прибегнуть к замкнутости суммы алгебр. Следует также отметить, что в классическом методе доказательства сходимости алгоритма для приближения суммами функций одной переменной, каждая молния $(x_1,...,x_n)$ компактного множества $Q \subset \mathbb{R}^2$ должна замыкаться (т.е. образовать замкнутую молнию) добавлением одной точки $y \in Q$, координаты которой равны первой координате точки x_1 и второй координате точки x_n, соответственно. Очевидно, эта точка может не лежать в множестве Q, если Q не декартовое произведение двух отрезков. Именно поэтому в классическом результате Дилиберто и Страуса и его некоторых обобщениях фигурируется декартово произведение двух определенных множеств. Основная идея нашего доказателства состоит в применении специалного свойства молний, которых нельзя замыкать с помощью добавления точки. А именно, мы вводим в рассмотрение $*$-слабых предельных точек последовательности функционалов, порожденными незамкнутыми молниями.

Из теоремы 7 и следствия 1 вытекает, что классический результат Дилиберто и Страуса справедлив не только для прямоугольника, со сторонами параллельными координатным осям, но и для ряда выпуклых компактных множеств пространства $\mathbb{R}^2$. Более точно, справедливо следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть* $Q \subset \mathbb{R}^2$ *выпуклое компактное множество,* $A_1 = \{f(x)\}$ *и* $A_2 = \{g(y)\}$ *алгебры функций одной переменной, которые непрерывны на проекциях* Q *на координатные оси* x *и* y*, соответственно. Предположим, что произвольную молнию можно сделать замкнутой добавлением фиксированного числа точек этого множества. Тогда для функции* $h \in C(Q)$*, последовательность*

$$\|h_1\| = \|h\|, \|h_{2n}\| = \|h_{2n-1} - Fh_{2n-1}\|, \|h_{2n+1}\| = \|h_{2n} - Gh_{2n}\|,$$

$n = 1,2,...,$ *сходится к погрешности приближения из* $A_1 + A_2$.

В параграфе 2.5 доказывается теорема типа Чебышева для характеризации наилучшего приближения в задаче аппроксимации непрерывной функции, определенной на некотором компактном метризуемом пространстве, элементами суммы двух алгебр. Перейдем к точной постановке этой задачи. Пусть X компактное метризуемое пространство, $C(X)$ пространство действительных непрерывных функций на X и $A_1 \subset C(X)$, $A_2 \subset C(X)$ замкнутые алгебры, которые содержат постоянных функций. Относительно алгебр A_1 и A_2 также предпологается, что эти алгебры обладают C-свойством. Рассмотрим аппроксимацию функции $h \in C(X)$ элементами суммы $A_1 + A_2$ (или просто суммой $A_1 + A_2$). Если существует элемент $w_0 \in A_1 + A_2$ такой, что

$$\inf_{w \in A_1 + A_2} \|h - w\| = \|h - w_0\|,$$

то этот элемент называется наилучшим приближением (или экстремальным элементом) для h. Как можно характеризовать наилучшее приближение? Иными словами, какие условия налагаемые на функцию $w_0 \in A_1 + A_2$ необходимо и достаточно для того, чтобы эта функция была наилучшим приближением для данной функции h? Для решения этой задачи сначала вводится определение

Определение 4. *Конечная или бесконечная молния* $(x_1, x_2, ...)$ *относительно* (A_1, A_2) *называется экстремальной для функции* $f \in C(Q)$, *если* $f(x_i) = (-1)^i \|f\|, i = 1,2,...$ *или* $f(x_i) = (-1)^{i+1}\|f\|,\ i = 1,2,...$.

Это определение для ридж функций и линейных суперпозиций было рассмотрено в работах Исмаилова.

Основной результат параграфа 2.5 состоит в следующем:

Теорема 8. *Пусть* X *компактное метризуемое пространство и* $u \in C(X)$. *Функция* $w_0 \in A_1 + A_2$ *явялется наилучшим приближением для* f *тогда и только тогда, когда существует замкнутая или бесконечная молния относительно* (A_1, A_2), *экстремальная для функции* $u - w_0$.

В **главе 3** рассматриваются конкретные и важные с точки зрения приложений алгебры функций, а именно алгебры ридж функций. Ридж функции имеют многочисленные применения в различных областях. Полученные в предыдущих главах общие результаты справедливы для суммы алгебр ридж функций. Эта глава состоит из трех параграфов. В параграфе 3.1 сформулируются некоторые результаты для случая ридж алгебр, которые получаются из теорем предыдущих глав. В параграфе 3.2 доказывается новая теорема о нахождении погрешности приближения суммой двух ридж алгебр.

Пусть Q компактное множество в R^d, $d \geq 2$, и f некоторая непрерывная функция на Q. Рассмотрим приближение функции f суммой двух ридж алгебр

$$\mathsf{A}_1 = \{g_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) : g_1 \in C(\mathsf{R})\}$$

и

$$\mathsf{A}_2 = \{g_2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) : g_2 \in C(\mathsf{R})\},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ фиксированные направления в $\mathsf{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{x} \in Q$. Для краткости, сумму $\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2$ обозначим через R.

Молния относительно направлений $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется как упорядоченное множество точек $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m)$ в R^d такая, что $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_{i+1}$ и отрезки $\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ поочередно перпендикулярны направлениям $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Молния $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$ называется замкнутой, если m четное число и множество $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1)$ указанном порядке образует молнию. Молния $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) \subset Q$ называется расширяемой, если существуют точки $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in Q$ такие, что

$\left(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{z}\right)$ также является молнией.

С каждой замкнутой молнией $p = \left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_{2n}\right)$ свяжем функционал

$$G_p(f) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} f(\mathbf{p}_k).$$

Этот функционал имеет следующие очевидные свойства:

(а) Если $g \in \mathrm{R}$, то $G_p(g) = 0$.

(б) Норма $\left\|G_p\right\| \le 1$. Если $p_i \ne p_j$ для всех $i \ne j$, $1 \le i, j \le 2n$, то $\left\|G_p\right\| = 1$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $Q \subset \mathrm{R}^d$ *выпуклое компактное множество,* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ *и* $f \in C(Q)$. *Пусть следующие условия удовлетворяются:.*

1) существует наилучшее приближение $g_0 \in \mathrm{R}$ *для функции* f *;*

2) для произвольной расширяемой молнии $q = (\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_n) \subset Q$ *относительно направлений* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *существуют точки* $\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+2}, ..., \mathbf{q}_{n+s} \in Q$ *такие, что* $(\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n+1}, ..., \mathbf{q}_{n+s})$ *является замкнутой молнией и* s *не больше чем некоторого натурального числа* n_0, *которое не зависит от молнии* q.

Тогда для погрешности приближения функции f *суммами из* R *справедлива формула*

$$E\left(f\right) = \sup_{p \subset Q}\left|G_p(f)\right|,$$

где sup берется по всем замкнутым молниям относительно направлений $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

Следует отметить, что если пространство R

проксиминально в $C(Q)$ (т.е., если для любой непрерывной функции на Q существует наилучшее приближение из R), то второе условие теоремы 9 выполняется автоматически. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть* $Q \subset \mathsf{R}^d$ *выпуклое компактное множество,* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathsf{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $f \in C(Q)$ *и подпространство* R *проксиминально в* $C(Q)$. *Тогда для погрешности приближения функции* f *суммами из* R *справедлива формула*

$$E(f, \mathsf{R}) = \sup_{p \subset Q} |G_p(f)|,$$

где sup берется по всем замкнутым молниям относительно направлений $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

В параграфе 3.3 приводится аналогичный теореме 9 результат для приближения суммой алгебр радиально-базисных функций. Радиально - базисная функция -эта функция вида

$$F(\mathbf{x}) = r(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|),$$

где $r : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ функция одной переменной, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ переменная, $\mathbf{c} \in \mathsf{R}^d$ некоторая фиксированная точка и $\|\cdot\|$ эвклидовое расстояние в R^d. Точка $\mathbf{c}$ называется центром функции F. Иными словами, радиально-базисная функция -эта функция, которая постоянна на сферах $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \alpha, \alpha \in \mathsf{R}$. Эти функции и их линейные комбинации широко используются для многомерной интерполяции и аппроксимации функций. Это обусловлено их хорошими аппроксимирующими свойствами. Радиально-базисные функции имеют огромное значение в теории RBF (radial basis function) нейронных сетей.

Рассмотрим класс сумм радиально-базисных функций

$$\mathsf{D} = \{r_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1\| + r_2(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2\| : \mathbf{x} \in Q, r_i \in C(\mathsf{R}), i = 1,2\},$$ где

$Q \subset \mathsf{R}^d$ некоторое компактное множество, точки $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ фиксированы, но функции r_i варьируются. Класс D есть сумма алгебр

$$A_1 = \{r_1(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1\| : \mathbf{x} \in Q, r_1 \in C(\mathsf{R})\}$$

и

$$A_2 = \{r_2(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_2\| : \mathbf{x} \in Q, r_2 \in C(\mathsf{R})\}.$$

Рассмотрим приближение функции $f \in C(Q)$ функциями из D.

В этом параграфе при некоторых ограничениях (подобных условиям теоремы 9) устанавливается следующая формула для погрешности приближения:

$$E(f,\mathsf{D}) \overset{def}{=} \inf_{r\in\mathsf{D}} \|f-r\| = \sup_{p\subset Q} |G_p(f)|,$$

где sup берется по всем замкнутым молниям относительно центров $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ множества Q. Напомним, что молния относительно центров $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ определяется как упорядоченное множество точек $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots) \subset Q$ с $p_i \neq p_{i+1}$, для которых удовлетворяются равенства

$\|\mathbf{p}_1-\mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{p}_2-\mathbf{c}_1\|, \|\mathbf{p}_2-\mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{p}_3-\mathbf{c}_2\|, \|\mathbf{p}_3-\mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{p}_4-\mathbf{c}_1\|, \ldots$ или

$\|\mathbf{p}_1-\mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{p}_2-\mathbf{c}_2\|, \|\mathbf{p}_2-\mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{p}_3-\mathbf{c}_1\|, \|\mathbf{p}_3-\mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{p}_4-\mathbf{c}_2\|, \ldots$.

Молния $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{2n})$ относительно центров $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ называется замкнутой, если множество $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{2n}, \mathbf{p}_1)$ в указанном порядке также является молнией относительно центров $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1) Найдены необходимые условия для представления пространства непрерывных функций, определенных на компактном хаусдорфовом пространстве, в виде суммы подалгебр этого пространства. Эти условия дополняют достаточное условие Sproston и Straus для возможности такого представления.
2) Доказано, что для случая двух алгебр, вышеуказанное необходимое условие является также достаточным. Полученный результат обобщает классическую теорему Стоуна-Вейерштрасса из случая одной алгебры на случай суммы двух алгебр.
3) Найдено необходимое условие для плотности суммы алгебр в пространстве непрерывных функций, которое при соответсвующих ограничениях является также достаточным.
4) Доказано сходимость алгоритма Дилиберто-Страуса к погрешности приближения в задаче аппроксимации непрерывной функции суммой двух подалгебр пространства непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.
5) Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы элемент суммы алгебр был наилучшим приближением (экстремальным элементом) для данной непрерывной функции. Полученный результат является аналогом теоремы Чебышева о характеризации полинома наилучшего приближения.
6) Полученные общие результаты применены к изучению аппроксимирующих свойств суммы алгебр ридж функций. Установлена формула для вычисления погрешности приближения функции многих переменных элементами суммы двух ридж алгебр.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Asgarova, A. Kh. and Ismailov, V. E. A remark on the levelling algorithm for the approximation by sums of two compositions // - Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, - 2016. 4 (1), - p. 30-37.

2. Asgarova, A. Kh. and Ismailov, V. E. Diliberto-Straus algorithm for the uniform approximation by a sum of two algebras // - India: Proceedings - Mathematical Sciences, Indian Academy of Sciences, -2017. 127 (2), - p. 361-374.

3. Asgarova, A. Kh., Babayev, A. M-B., Maharov, I.K. On the error of approximation by ridge functions with two fixed directions // - Tbilisi: Tbilisi Mathematical Journal, - 2017. 10 (2), - p. 111-120.

4. Asgarova, A. Kh. and Ismailov, V. E. On the representation by sums of algebras of continuous functions // - France: Comptes Rendus Mathematique, - 2017. 355 (9), -p. 949-955.

5. Asgarova, A. Kh. On the density of a sum of algebras in the space of continuous functions // "Actual problems of mathematics and mechanics" dedicated to the 94th birthday of the national leader of Azerbaijan Heydar Aliyev, - Baku: -17 May -18 May, -2017, - p. 11-13.

6. Asgarova, A. Kh., Ismailov,V.E. On the uniform approximation by a sum of two algebras // "Modern problems of mathematics and mechanics" Proceedings of the Inter.conf.devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, - Baku: - 6 Dekabr - 8 Dekabr, - 2017, - p. 46-47.

7. Asgarova, A. Kh. On a generalization of the Stone Weierstrass theorem // - Switzerland: Annales mathamatiques du Quebec, - 2018. 42 (1), -p. 1-6.

8. Asgarova, A. Kh., Babayev, A. M-B., Maharov, I.K. On the error of approximation by radial basis functions with fixed centers // - Baku: Transactions Issue Mathematics, Azerbaijan

National Academy of Science, - 2018. 38 (1), - p. 22-29.

9. Asgarova, A.Kh., Ismailov, V.E. A central best approximation operator of the algebra of continuous functions // “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”, Материалы международной научной конференции, Стерлитамак, Уфа: - 25 июнья - 29 июнья, - 2018, -p. 279-281.

10. Asgarova, A. Kh. Generalization of the Stone–Weierstrass theorem to sums of algebras // International Conference on “Modern Problems of Innovative Technologies and Applied Mathematics in Oil and Gas Production” devoted to the 90th anniversary of Azad Mirzajanzade, - Baku: - 13 December - 14 December, - 2018, – p. 139-142.

11. Asgarova, A. Kh. Levelling algorithm for the approximation by sums of two compositions // “Complex Analysis and Approximation Theory”, - Ufa: - 29 May - 31 May, - 2019, - p. 9-10.

12. Asgarova, A. Kh., Babayev, A.M-B., Maharov, I.K. On sums of ridge functions with two fixed directions // “Complex Analysis and Approximation Theory”, - Ufa: - 29 May - 31 May, - 2019, - p. 10.

13. Asgarova, Aida Kh., Babayev, Arzu M-B., Maharov, Ibrahim K. // On the approximation by radial functions with fixed centers, International Conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, - Baku: - 23 October - 25 October, - 2019, - p. 127-130.

14. Asgarova, A. Kh. On the density of a sum of algebras in the space of continuous functions // - Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, - 2020. 10 (1), - p. 102-109.

15. Askarova, A. Kh., Ismailov, V. E. A Chebyshev-Type Theorem Characterizing Best Approximation of a Continuous Function by Elements of the Sum of Two Algebras // - Russia: Математические Заметки, - 2021. 109 (1), - p. 19–26; Mathematical Notes, - 2021. 109 (1), - p. 15–20.

Защита диссертации состоится 29 июня 2021 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 26 мая 2021 года.

Подписано в печать: 25.05.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 40000
Тираж: 70