

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

PAULİ OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİ ÜÇÜN OBLASTA NƏZƏRƏN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏR

İxtisas: 1211.01- Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Aynurə Ruslan qızı Əliyeva**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2024

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin "Diferensial tənliklər və optimallaşdırma" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riyaziyyat üzrə elmlər doktoru
Yusif Soltan oğlu Qasimov

Rəsmi opponətlər:



fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Fərman İmran oğlu Məmmədov

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor

Yaşar Topuş oğlu Mehəliyəv

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent

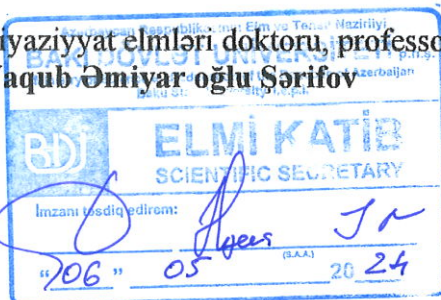
İlqar Qürbət oğlu Məmmədov

Azərbaycan Respublikasının Prezident yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının akademik, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
 **Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev**

Dissertasiya şurasının fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,
elmi katibi:  dosent **Zakir Fərman oğlu Xankişiyev**

Elmi seminarın riyaziyyat elmləri doktoru, professor
sədri:  **Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov**



İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Təqdim olunan dissertasiya işi Pauli operatoru üçün müxtəlif tip düz və tərs məsələlərin qoyulması və onların həll üsullarının işlənməsinə həsr edilmişdir. Məlumdur ki, Pauli operatoru kvant zərrəciyinin maqnit sahəsindəki hərəkətini xarakterizə edir. Bu operatorun məxsusi ədədləri isə onun məxsusi funksiyası ilə təyin olunan halda zərrəciyin tam enerjisinə bərabərdir. Odur ki, bu operator üçün qoyulmuş müxtəlif tip məsələlərin həlli həm nəzəri, həm də müəyyən praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Digər tərəfdən, Pauli operatoru zərrəciyinin hərəkətinə maqnit sahəsində baxıldığından, həm də Şredinger operatorundan fərqli olaraq onun spinini də nəzərə aldığından daha müəkkəb bir riyazi formaya malikdir. Bu isə onun tədqiqini daha da çətinləşdirir.

Dissertasiyanın özünəməxsus cəhətlərindən biri də odur ki, burada baxılan məsələlər əsasən dəyişən oblastlı məsələlərdir. Belə məsələlər daha az öyrənilib və öz spesifikasiyasına görə xüsusi yanaşmalar tələb edir. Axtarılan riyazi obyektlərin ənənəvi məsələlərdə olduğu kimi funksiyalar deyil, oblastlar olması ona gətirir ki, bu məsələlərin tədqiqinə ənənəvi üsulların tətbiqi kifayət etmir. Əsasən son 40 ildə bu sahədə daha ciddi tədqiqatlar aparılmış və ciddi nəticələr alınmışdır. Dəyişən oblastlı məsələlərin həlli istiqamətində bir neçə istiqaməti qeyd etmək olar.

Birinci istiqamət baxılan sistemin müəyyən xarakteristikalarını təsvir edən funksiyaların oblasta nəzərən minimallaşdırılması məsələlərində varlıq problemləridir. Belə məsələlər [5, 6, 8, 9, 11, 32, 55, 76, 94, 111, 115, 116] kimi işlərdə araşdırılmışdır. Göstərilmişdir ki, oblastlar üzərinə müəyyən həndəsi şərtlər, minimallaşdırılan funksionallar üzərinə isə monotonluq və az sayda fiziki xarakteristiklardan asılılıq şərtləri qoyulduqda oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələləri korrektdirlər [35, 43].

İkinci istiqamət oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələləridir. Belə optimalaşdırma məsələləri xeyli müəllif tərəfindən araşdırılırsa da, hələ ki, onların vahid həll üsulu işlənilib hazırlanmamışdır [109, 110].

Üçüncü istiqamət oblasta nəzərən tərs spektral məsələlərin tədqiqidir. Bu tip məsələlər daha az tədqiq edilib və belə məsələlərin qoyuluşunun verilməsi, spektral verilənlərin identifikasiya edilməsi öz-özlüyündə ciddi riyazi problemlərdir. Və nəhayət, növbəti istiqamət baxılan məsələlərin ədədi həll üsullarının işlənməsidir. Bu zaman artıq nəzəri olaraq müəyyən edilmiş optimal oblastlarda məsələlərə baxmaq, onların effektiv həll üsullarını işləmək ciddi nəticələr hesab edilməlidir [15, 22, 41, 71, 78, 82, 85, 86, 104].

Odur ki, dissertasiya mövzusunun aktual hesab etmək olar.

Tədqiqatın obyektı və predmeti. Təqdim olunan dissertasiya işinin tədqiqat obyektı Şredinger operatorunun ümumiləşməsi olan ikiölçülü Pauli operatorunun məxsusi ədədləri üçün dəyişən və qeyd olunmuş oblastlarda düz və tərs məsələlərdir. Tədqiqatın predmeti isə baxılan məsələlərin analitik və ədədi üsullarla həll etməyə imkan verən yanaşmalar və həll üsullarıdır.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri. Dəyişən və qeyd olunmuş oblastlarda ikiölçülü Pauli operatorunun məxsusi ədədləri və onların funksiyaları üçün qoyulmuş düz və tərs məsələləri həll etmək üçün analitik və ədədi həll üsullarının işlənməsi, müxtəlif hallarda ədədi eksperimentlərin aparılması, onların nəticələrinin təhlil edilməsi və effektlərin meydana çıxarılmasıdır.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində qarşıya qoyulan məsələləri həll etmək üçün funksional analiz, operatorların spektral nəzəriyyəsinin, optimallaşdırma nəzəriyyəsinin və təqribi hesablama nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

- Pauli operatorunun məxsusi ədədlərindən asılı olan funksiyanın oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinin araşdırılması;

- Pauli operatorunun Neyman məxsusi ədədlərinin maksimallaşdırılması məsələsinin tədqiqi;

- Pauli operatoru üçün oblasta nəzərən tərs məsələnin qoyuluşu və onun həll üsulunun işlənməsi;

- Qeyri-xətti halda baxılan məsələnin ədədi tədqiqi;

- Qeyd olunmuş oblastda baxılan məsələnin ədədi tədqiqi.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

- ✓ Pauli operatorunun məxsusi ədədlərindən asılı olan funksiyanın oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinin araşdırılmış, optimal oblastın varlığı haqqında teoremlər isbat olunmuşdur;
- ✓ Pauli operatorunun Neyman məxsusi ədədlərinin maksimallaşdırılması məsələsi tədqiq edilmiş və uyğun teoremlər isbat edilmişdir;
- ✓ Pauli operatoru üçün oblasta nəzərən tərs spektral məsələ qoyulmuş və onun analitik- ədədi həll üsulu təklif olunmuşdur;
- ✓ Qeyri-xətti halda baxılan məsələnin ədədi həlli üçün həll üsulu təklif olunmuş, ədədi eksperimentlər yerinə yetirilmişdir;
- ✓ Qeyd olunmuş oblastda baxılan məsələ ədədi tədqiq edilmiş, ədədi eksperimentlər yerinə yetirilmiş, meydana çıxan effektlər analiz edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyanın tədqiqat obyektinin praktiki əhəmiyyətini nəzərə alaraq demək olar ki, yerinə yetirilmiş tədqiqat operatorların spektral nəzəriyyəsi, dəyişən oblastlı məxsusi ədəd məsələləri sahəsində nəzəri əhəmiyyət daşımaqla yanaşı, həm də müəyyən praktiki əhəmiyyətə malikdir. Dissertasiyada alınmış nəticələr geniş praktiki əhəmiyyətə malik optimal oblastların seçilməsi ilə bağlı olan bir sıra düz və tərs məsələlərin analitik və ədədi həllində istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı elmi seminar və konfranslarda məruzə edilmişdir: Sumqayıt Dövlət Universitetinin Diferensial tənliklər kafedrasının seminarında (rəhbər prof. F.Feyziyev), Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi Riyaziyyat ETİ-nin elmi seminarında (rəhbər akad. F.Əliyev), V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bishkek–2014), Control and Optimization with Industrial Applications (Bakı– 2015), “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları” III respublika elmi konfransında (Sumqayıt–2016), “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri” beynəlxalq elmi konfransında (Sumqayıt–2017), International conference on “Modern Trends in Physics” (Bakı–2017), Gənc tədqiqatçıların II respublika elmi-praktik konfransında (Bakı–2019), 8th International Eurasian conference on “Mathematical Sciences and Applications” (Bakı–2019), Riyaziyyat

və Mexanika İnstitutunun 60-illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Müasir Problemləri” beynəlxalq konfransında (Bakı–2019), Gənc Tədqiqatçıların III respublika elmi-praktik konfransında (Bakı–2020), Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” respublika elmi konfransında (Bakı-2022).

Müəllifin şəxsi tövhəsi. Dissertasiya işində öz əksini tapan elmi nəticələrin hamısı şəxsən iddiaçının fəaliyyətinin və elmi rəhbərin ideya istiqamətinin, məsələnin qoyuluşunun konkret tədqiqat obyektinə tətbiqinin nəticəsidir.

Müəllifin elmi nəşrləri. Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin 16 elmi əsərində nəşr edilib. Bu əsərlərin siyahısı dissertasiyanın sonunda verilib.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin Riyaziyyat fakültəsinin “Diferensial tənliklər və optimallaşdırma” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işinin ümumi həcmi - 189770 işarədir (titul -335, mündəricat -2710, giriş – 27912 işarə, birinci fəsil –94000 işarə, ikinci fəsil – 40000 işarə, üçüncü fəsil – 24830 işarə, nəticə-813). Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə, 15 şəkil, 2 cədvəl və 116 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

DİSSERTASIYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, üç fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Dissertasiyanın **girişində** mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış və onun işlənmə dərəcəsi göstərilmiş, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri söylənilmiş, elmi yeniliyi verilmiş, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti qeyd olunmuş, həmçinin işin aprobasiyası barədə məlumat yer almışdır.

Dissertasiyanın “Pauli operatorunun məxsusi ədədləri üçün dəyişən oblastlı bəzi məsələlər” adlanan **birinci fəslə** üç paragrafdan ibarətdir.

Bu fəsildə Şredinger operatorunun ümumiləşməsi olan və kvant mexanikasında geniş tətbiq edilən Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün qoyulmuş oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinə baxılır. Baxılan məsələ üçün varlıq məsələləri araşdırılmış və uyğun teoremlər isbat edilmişdir.

Məlumdur ki, müxtəlif operatorların məxsusi ədədləri müxtəlif fiziki proseslərin və təbiət hadisələrinin müəyyən parametrlərini təsvir edir. Bəzən bu prosesləri modelləşdirərkən, onların baş verdiyi mühitin həndəsəsini də nəzərə almaq tələb olunur. Bir çox hallarda isə prosesin baş verdiyi oblastın özü qeyd olunmur və dəyişən parametr kimi modelə daxil olur. Belə məsələlər dəyişən oblastlı məsələlər adlanır. Prosesin hansısa parametrini oblasta nəzərən minimallaşdırmaq (maksimallaşdırmaq) tələb edildikdə isə belə məsələlər oblasta görə optimallaşdırma məsələləri (shape optimization) adlanırlar. Bu zaman baxılan funksionalın arqumentində ənənəvi hallardan fərqli olaraq funksiyalar deyil, oblast dayandığından, belə məsələlərin həlli ciddi riyazi çətinliklərlə bağlıdır [29]. Bir çox təbii prosesləri tədqiq edərkən, bu və ya digər fiziki-mexaniki parametrlər hansısa operatorların məxsusi ədədləri vasitəsilə təsvir olunur. Məsələn, kvant fizikasında geniş istifadə olunan Şredinger operatorunun məxsusi ədədləri yüklü zərrəciyin enerji səviyyələrini, bikvadrat operatorun məxsusi ədədləri membranın eninə rəqsləri zamanı onun məxsusi tezliyini xarakterizə

edir. Bəzən isə sadəcə bu operatorların məxsusi ədədlərini (və ya onların xarakterizə etdikləri uyğun fiziki-mexaniki kəmiyyətləri) deyil, onlardan birindən və ya bir neçəsindən asılı olan funksiyaları və yaxud funksionalları araşdırmaq lazım gəlir. Baxılan prosesin baş verdiyi oblast dəyişən kəmiyyət kimi götürüldükdə isə bu funksionallar son nəticədə oblastdan asılı olur. Beləliklə, biz oblastdan asılı məxsusi ədəd məsələlərinə gəlirik. Bu məsələlər öz tətbiq sahəsinin genişliyi səbəbindən son onilliklərdə ciddi şəkildə tədqiq olunmaqdadırlar. Belə məsələlərin həllinin varlığı, ekstremal həllərin tapılması, ədədi həll alqoritmlərin qurulmasına müxtəlif müəlliflərin çoxlu sayda işləri həsr edilmişdir. Lakin hələ də nə dəyişən oblastlı məsələlərin analitik həlli, nə də bu həllərin ədədi olaraq qurulması üçün ümumi üsullar işlənib hazırlanmamışdır.

Fəsilə Şredinger operatorunun ümumiləşməsi olan və kvant mexanikasında geniş tətbiq edilən Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün qoyulmuş oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinə baxılır. Məlumdur ki, Pauli operatoru xarici maqnit sahəsində hərəkət edən spinli zərrəciyin hərəkətini təsvir edir. Şredinger operatorundan fərqli olaraq həm zərrəciyin spininin nəzərə alınması, həm də onun xarici maqnit sahəsində hərəkət etməsi Pauli operatorunun formal olaraq xeyli mürəkkəbləşməsinə və uyğun məsələlərin çətinləşməsinə səbəb olur. Bu operatorun məxsusi ədədləri isə spinli zərrəciyin xarici maqnit sahəsində tam enerji səviyyələrini təsvir edir.

Dissertasiyanın birinci fəslinin birinci paragrafında biz Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün qoyulmuş oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinə baxacağıq.

Aşağıdakı məxsusi ədəd məsələsinə baxaq:

$$P\varphi = \lambda\varphi, x \in D \quad (1)$$

$$\varphi = 0, x \in S_D \quad (2)$$

Burada P aşağıdakı kimi təyin edilmiş Pauli operatorudur

$$P = P(a, \nu) \cdot J + \sigma B \quad (3)$$

harada ki,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (a, \nu) = (-i\nabla - a)^2 + V$$

i – xəyali vahid; V - kifayət qədər hamar funksiya;

$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$; $a = (a_1, a_2) \in R^2$ -vektor potensial B isə a vektor

potensialın doğurduğu maqnit sahəsidir

$$B = \frac{\partial}{\partial x} a_2 - \frac{\partial}{\partial y} a_1$$

Bütün bu işarələmələri nəzərə alsaq, onda ikiölçülü Pauli operatorunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar

$$P = \begin{pmatrix} (-i\nabla - a)^2 + a_2 \frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial y} + V & 0 \\ 0 & (-i\nabla - a)^2 - a_2 \frac{\partial}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial y} + V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

harada ki,

$$b_{11} = -\Delta + (2ia_1 + a_2) \frac{\partial}{\partial x} + (2ia_2 - a_1) \frac{\partial}{\partial y} + a^2 + V$$

$$b_{22} = -\Delta + (2ia_1 - a_2) \frac{\partial}{\partial x} + (2ia_2 + a_1) \frac{\partial}{\partial y} + a^2 + V$$

Ω ilə R^2 -nin verilmiş məhdud açıq altçoxluğunu, K ilə isə Ω -nın bütün kvaziaçıq altçoxluqları çoxluğunu işarə edək. Tutaq ki, K_c çoxluğu Ω -nın Lebeq ölçüsü c olan altçoxluqları çoxluğudur.

Biz burada K_c çoxluğunda Pauli operatorunun ilk iki məxsusi ədədindən asılı olan funksiya üçün aşağıdakı məsələyə baxacağıq

$$\min \{F(K), K \in K_c\} \quad (5)$$

burada,

$$F(K) = f(\lambda_1(K), \lambda_2(K))$$

harada ki, f kəsilməz, mənfi olmayan funksiya, $\lambda_1(K)$ və $\lambda_2(K)$ isə P operatorunun K oblastında uyğun olaraq birinci və ikinci məxsusi ədədləridir.

R^2 - nin aşağıdakı altçoxlugunu daxil edək

$$E_c = \{(x, y) \in R^2 : x = \lambda_1(K), y = \lambda_2(K), K \in K_c\}$$

Yəni faktiki olaraq E_c çoxluğu R^2 -nin elə altçoxlugudur ki, onun elementləri (2) sərhəd şərti ilə verilmiş Pauli operatorunun birinci və ikinci məxsusi ədədlərindən formalaşdırılmış cütlərdir. Onda (5) məsələsini bu formada yazmaq olar

$$\min \{f(x, y) : (x, y) \in E_c\}.$$

Buradan alınır ki, E_c çoxluğunun R^2 -də qapalı olması çox vacib informasiya verə bilər, çünki bu halda (5) məsələsinin həllinin olması buradan birbaşa nəticə kimi çıxır.

Bu fəsildə köməkçi faktlar və aşağıdakı əsas teorem verilir.

Teorem 1. Tutaq ki, $c \in [0, |\Omega|]$. Onda E_c qapalı çoxluqdur.

1.2. bu teoremin isbatına həsr olunmuşdur. Burada göstərilir ki, əgər verilmiş c üçün B şarı kifayət qədər böyükdürsə, onda E_c

R^2 -də qapalıdır. Bu faktdan geniş sinif Φ funksiyası üçün

$$\min \{\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) : A \in A_c(B)\}$$

tip minimallaşdırma məsələsinin həllinin varlığı alınır.

Tutaq ki, $c > 0$ ədədi verilmişdir və $B \subseteq R^N$ iki kəsişməyən və

$$mes B' = \frac{c}{2}, mes B'' = \frac{c}{2} \text{ şərtlərini ödəyən şarların birləşməsidir.}$$

Teorem 2. E çoxluğu R^2 -də qapalıdır.

Teoremin isbatı üçün mühüm olan aşağıdakı lemma isbat edilir.

Lemma 1. Əgər E çoxluğu vertikal və horizontal istiqamətlərdə qabarıqdıqsa, onda bu çoxluq R^2 -də qapalıdır.

Bu lemmadan istifadə edərək E çoxluğunun qapalılığı iki addımda isbat ediləcəkdir.

Addım 1. A horizontal düz xətlər boyunca qabarıqdır. Bu o deməkdir ki, əgər $A \in A_c(B)$ olarsa, onda $(\lambda_1(A), \lambda_2(A))$ və $(\lambda_2(A), \lambda_2(A))$ nöqtələrini birləşdirən interval E -nin daxilindədir.

Addım 2. A vertikal düz xətlər üzrə qabarıqdır. Bu isə o deməkdir ki, əgər $A \in A_c(B)$, olarsa, onda $(\lambda_1(A), \lambda_2(A))$ və $\left(\lambda_1(A), \frac{\lambda_2(B_1)}{\lambda_1(B_1)} \lambda_1(A)\right)$ nöqtələrini birləşdirən interval E -nin daxilindədir.

A_1 və A_2 arasında mövcud ola biləcək əlaqəni qurmaq üçün aşağıdakı lemmadan istifadə olunur.

Lemma 2. Əgər C_1 və C_2 $\text{cap}(C_1 \cap C_2) = 0$ şərtini ödəyən iki kvaziyaçıq çoxluqdursa, və $u \in H_0^1(C_1 \cup C_2)$ onda, $u|_{C_1} \in H_0^1(C_1)$ və $u|_{C_2} \in H_0^1(C_2)$.

Lemma 3. Tutaq ki, A elə kvaziyaçıq çoxluqdur ki, $\lambda_1(A) < \lambda_2(A)$. Onda A_1 -in dəqiq daxili çoxluğu dəqiq əlaqəlidir. Burada iki hal mövcud ola bilər: ya $A_2 \subseteq A_1$ ya da uyğun ikinci φ_2 məxsusi funksiyası üçün $\text{cap}(A_1 \cap A_2) = 0$ şərti ödənilir.

Nəticə 1. Hər bir $A \in A_c(B)$ və hər bir müsbət i tam ədədi üçün $t \mapsto \lambda_i(A^t)$ inikası sağdan aşağıdan yarımkəsilməzdir və sağdan yuxarıdan yarımkəsilməzdir.

Bu nəticə göstərir ki, Pauli operatorunun ikinci məxsusi ədədi Darbu tipli xassəyə malikdir, yəni əgər $t_1 < t_2$ və $\lambda_2(A^{t_1}) < \lambda_2(A^{t_2})$ olarsa, onda $\forall \lambda^* \in [\lambda_2(A^{t_1}), \lambda_2(A^{t_2})]$ üçün elə $t^* \in [t_1, t_2]$ var ki, $\lambda_2(A^{t^*}) = \lambda^*$ şərti ödəniləcəkdir.

Burada kvaziyaçıq çoxluqlar üçün aşağıdakı faktı isbat edilir.

Lemma 4. Fərz edək ki, $A \in A_c(B)$. Onda A -nın Şteyner simmetrikləşdirmələrinin elə $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ardıcılığı vardır ki, $m(A_n \setminus A^\#) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Nəticə 2. Hər bir $A \in A_C(B)$ üçün A -nın Şteyner asimmetrikləşməsinin elə $\{A_n\}_{n \in N}$ ardıcılığı var ki, $\{A_n\}_{n \in N}$ -nin hər bir zəif γ -limit nöqtəsi $A^\#$ -nin daxilindədir.

Nəticə 3. Lemma 4-də təyin edilmiş $\{A_n\}_{n \in N}$ ardıcılığı üçün aşağıdakı münasibət doğrudur.

$$\lambda_2(A^\#) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(A_n).$$

Nəticələrin isbatı. İndi isə Lemma 1 və Lemma 2 –nin isbatını verək. Bu məqsədlə d_1 ilə $\{ts(B_1): t \geq 1\}$ yarım düz xəttini, d_2 ilə $\{ts(B_2): t \geq 1\} = \{(x, x) \in \mathfrak{R}^2 : x \geq \lambda_1(B_2)\}$ yarım düz xəttini işarə edək.

Yuxarıda isbat edilən nəticələrdən istifadə edərək, Lemma 1 isbat edilir.

Təklif 1. Tutaq ki, A_0 və A_1 iki kvazi açıq çoxluqlardır və $A_1 \subseteq A_0$. Onda A_0 və A_1 arasında γ –kəsilməz azalan homotopiya vardır. Yəni elə γ –kəsilməz $h: [0, 1] \rightarrow A(R^N)$ inikası vardır ki, $t_1 < t_2$ olduqda $h(t_1) \supseteq h(t_2)$ ödənilir və bununla yanaşı $h(0) = A_0, h(1) = A_1$ doğrudur.

Təklif 2. Hər bir $A \in A_C(B)$ üçün elə $\bar{A} \in A_C(B)$ çoxluğu var ki, o $s(\bar{A}) \in \mathfrak{R}_{\inf}(A)$ münasibətini ödəyən zəif əlaqəlidir ya da şardır.

1.2-də Pauli operatorunun Neyman məxsusi ədədlərinin maksimalaşdırılması məsələsinə baxılır.

Tutaq ki, $N \geq 2$ və $\Omega \subseteq R^N$ məhdud açıq çoxluqdur, belə ki, $H_1(\Omega)$ Sobolev fəzası $L_2(\Omega)$ fəzasına kompakt daxildir. Biz belə çoxluqları requlyar çoxluqlar adlandıracağıq. Belə oblastlarda Neyman şərtlə Pauli operatorunun spektri ancaq məxsusi ədələrdən ibarətdir. Bu məxsusi ədədləri onların tərtibini də nəzərə almaqla

$$0 = \mu_0(\Omega) \leq \mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Omega) \leq \dots \rightarrow \infty$$

kimi işarə edək. Onda hər bir $k \geq 1$ üçün yazı bilərik

$$\mu_k(\Omega) = \min_{S \in S_k} \max_{u \in S} \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Burada S_k ilə $H^1(\Omega)_{/\mathfrak{R}} := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u dx = 0 \right\}$ – da bütün k ölçülü altfəzaların ailəsidir. Əgər Ω əlaqəli çoxluq olsa, onda $\mu_1(\Omega) > 0$.

Szegö 1954-cü ildə isbat etmişdir ki, bütün sadə əlaqəli, iki ölçülü, hamar sərhədli $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$ çoxluqları arasında μ_1 məxsusi ədədini maksimallaşdıran çoxluq B şarıdır. Bu o deməkdir ki,

$$|\Omega| \mu_1(\Omega) \leq |B| \mu_1(B)$$

Weinberger bu nəticəni sonralar daha da gücləndirdi. O, göstərdi ki, heç bir topoloji məhdudiyyət olmadan hər bir $N \geq 2$ və requlyar $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^N$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir

$$|\Omega|^{\frac{2}{N}} \mu_1(\Omega) \leq \mu_1.$$

Burada,

$$\mu_1^* = |B|^{\frac{2}{N}} \mu_1(B).$$

həcmi şərtlər daxilində Neyman məxsusi ədədlərinin maksimallaşdırılması Polyanın hipotezi ilə də əlaqədardır. Polya bu hipotezində hökm edirdi ki, Veyl qanununun baş hissəsi faktik olaraq məxsusi ədədlərin qiymətləndirilməsini təmin edir. Yəni N ölçülü halda

$$\forall k \geq 1, \mu_k(\Omega) \leq 4\pi^2 \left(\frac{k}{\omega_N |\Omega|} \right)^{\frac{2}{N}}$$

münasibəti doğrudur. Burada ω_N ilə $\mathfrak{R}^N$ - də vahid şarın həcmi işarə edilmişdir. Lakin bu hipotez yalnız müəyyən sinif oblastlar üçün doğrudur. Ümumi halda requlyar oblastlar üçün bu hökm yalnız $k=1$ olduqda doğrudur. Kröger elə qiymətləndirmələr seriyası müəyyən etmişdir ki, onlar nəzərdə tutulandan daha böyükdürlər.

Məsələn, o göstərmişdir ki, $k = 2$ olduqda ikiölçülü oblastlar üçün $\mu_2(\Omega) \leq \frac{16\pi}{|\Omega|}$ qiymətləndirməsi doğrudur. $\frac{16\pi}{|\Omega|}$ kəmiyyəti əslində

nəzərdə tutulandan iki dəfə böyükdür. Pauli operatorunun k -cı məxsusi ədədini maksimallaşdıran oblastın təyin edilməsi, onun həndəsəsinin müəyyənləşdirilməsi ciddi riyazi problem olaraq qalmaqdadır. Bu problem hətta $k = 2$ olduqda ciddi çətinliklərlə bağlıdır və $k \geq 2$ olduqda isə onun analitik həllinin tapılması istiqamətində heç bir ciddi nəticə alınmamışdır. Bəzi işlərdə $k \leq 10$ halında məsələnin ədədi həlli verilsə də, alınan həllərin varlığı isbat edilməmişdir.

Bu paraqrafda biz isbat edirik ki, $\mathfrak{R}^N$ – də qeyd edilmiş ölçüyə malik istənilən oblastlar sinfində Pauli operatorunun ikinci Neyman məxsusi ədədi öz maksimumunu iki bərabər kəsişməyən şarda alır.

Bundan əlavə isbat olunur ki, Polya hipotezi oblastların ölçüsü, həndəsəsi və topologiyası üzərinə heç bir məhdudiyyət olmadan $k = 2$ halında Pauli operatorunun Neyman məxsusi ədədləri üçün də doğrudur.

İxtiyari B şarı götürək və aşağıdakı invariant kəmiyyəti daxil edək

$$\mu_2^* = 2^{\frac{2}{N}} |B|^{\frac{2}{N}} \mu_1(B).$$

Onda həcmi $\frac{1}{2}$ olan iki bərabər kəsişməyən B_1, B_2 şarları üçün yaza bilərik

$$\mu_0(B_1 \cup B_2) = 0, \mu_1(B_1 \cup B_2) = 0, \mu_2(B_1 \cup B_2) = \mu_2^*$$

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 3. Tutaq ki $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^N$ requlyar çoxluqdur. Onda baxılan Pauli operatoru üçün

$$|\Omega|^{\frac{2}{N}} \mu_2(\Omega) \leq \mu_2^*.$$

Əgər bərabərlik halı doğru olarsa, onda Ω çoxluğu demək olar ki, hər yerdə iki bərabər kəsişməyən şarın birləşməsi ilə üst-üstə düşür.

Buradan aşağıdakı nəticəni alınır.

Nəticə 2. $k = 2$ olduqda Polya hipotezi fəzanın ölçüsündən asılı olmayaraq Pauli operatorunun bütün Neyman məxsusi ədədləri üçün doğrudur.

Lemma 5. $\mathfrak{R}^N$ -dən olan iki $A \neq B$ nöqtəsini götürək. Onda bütün $x \in \mathfrak{R}^N$ nöqtələri üçün

$$g_A(x) \cdot \overrightarrow{ab} > g_B(x) \cdot \overrightarrow{ab}$$

münasibəti doğrudur.

Lemma 6. Fərz edək ki, A və B nöqtələri $\mathfrak{R}^N$ -dən olan olan elə iki nöqtədir ki,

$$\forall i = 1, \dots, N, \int_{\Omega} g_A(x) \cdot e_i dx = \int_{\Omega} g_B(x) \cdot e_i dx$$

münasibəti ödənilir. Onda bütün $v \in R^N$ nöqtələri üçün

$$\int_{\Omega} g_A(x) \cdot v dx = \int_{\Omega} g_B(x) \cdot v dx$$

münasibəti doğrudur və $A = B$.

İsbati. Lemmanın birinci hökmü birbaşa yoxlama ilə alınır. İkinci hökmü almaq üçün Lemma 5-də $v = ab$ götürmək kifayətdir.

Təklif 3. Elə iki müxtəlif A, B nöqtələri var ki, ortoqonallıq şərti ödənilir.

Lemma 7. Elə $C > 0$ ədədi var ki, $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{m - \tilde{\mu}_1(\rho)}{2}\right)$ və

$$\int_{\mathfrak{R}^N} \rho g_i u_1 dx = 0 \text{ münasibətini ödəyən hər bir } (g_i)_i \in G \text{ üçün}$$

$$\forall i = 1, \dots, N, \tilde{\mu}_2(\rho) \leq \int_{\mathfrak{R}^N} \rho |\nabla g_i|^2 dx + C_\varepsilon \quad (6)$$

ödənilir.

Dissertasiyanın “Pauli operatorunun məxsusi ədədləri üçün bir tərs məsələ” adlanan birinci fəslinin üçüncü paragrafında Pauli operatorunu məxsusi ədədləri üçün oblasta nəzərən bir tərs məsələnin qoyuluşu verilir. Bu məsələnin analitik həlli üçün sxem təklif olunur.

Fəsilə aşağıdakı məsələyə baxılır:

$$P\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in D, \quad (7)$$

$$\varphi = 0, \quad x \in S_D. \quad (8)$$

Burada P yuxarıdakı kimi təyin olunmuş Pauli operatorudur. M ilə bütün məhdud qabarıq $D \in R^2$ çoxluqlarını işarə edək. Tutaq ki,

$$K = \{D \in M : S_D \in C^2\}.$$

Aşağıdakı kimi $S_j(x)$ funksiyalarını təyin edək

$$S_j(x) = \frac{|\nabla u_j(x)|^2}{\lambda_j}, \quad x \in S_D, \quad j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Elə $D \in K$ oblastı tapmaq tələb olunur ki, həmin oblastda

$$S_j(x) = g_j(x), \quad x \in S_D, \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

bərabərlikləri ödənilsin. Burada $g_j(x), j = 1, 2, \dots, R^N$ – də verilmiş funksiyalardır.

Başqa sözlə K çoxluğundan elə D oblastı tapmaq tələb olunur ki, həmin oblastın sərhəddində (1)-(2) məsələsinin spektral verilənləri ilə təyin olunan funksiyalar verilmiş funksiyalara bərabər olsunlar.

Tutaq ki, V funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir

$$t^2 V(xt) = V(x) \quad (11)$$

Teorem 4. Tutaq ki, V funksiyası (11) şərtini ödəyir. Onda (1), (2) məsələsi üçün yuxarıda qoyulmuş oblasta nəzərən tərs spektral məsələnin həlli olan $D \in K$ oblastının B vahid şarı üzərində verilmiş basis üzrə ayrılışının $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$ əmsalları aşağıdakı münasibətlərlə təyin olunur.

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} A_{k,m}(j) \alpha_k \alpha_m = 2, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

Burada

$$A_{k,m}(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{G_n^k}} g_j(x) [P_{G_n^m}(n(x)) - P_{H_n^m}(n(x))] ds - \int_{S_{H_n^k}} g_j(x) [P_{G_n^m}(n(x)) - P_{H_n^m}(n(x))] ds \right].$$

Dissertasiyanın **ikinci fəsl**i “Qeyri-xətti halda qeyd olunmuş oblastda təqribi həllin araşdırılması” adlanır. Bu fəsildə qeyri xətti halda qeyd olunmuş oblastda baxılan tənlik üçün qoyulmuş başlanğıc və sərhəd məsələsinin ədədi həlli üçün effektiv ədədi həll metodunun işlənməsi məsələsinə baxılır. Bunun üçün Saulyev sonlu fəqlər sxemindən istifadə edilir.

Məlumdur ki, aşkar sonlu fərq metodlarının xüsusiyyətlərindən biri sabitlik tələblərinə görə zaman addımının ölçüsünün məhdudlaşdırılmasıdır [50]. Bu isə bir çox hallarda belə üsulların tətbiqini çətinləşdirir. Digər tərəfdən, məlumdur ki, qeyri-aşkar üsullar sabitdirlər, lakin hər zaman səviyyəsində matris sistemində həll edilməlidirlər. Buna görə də, elə aşkar sxemlər tapmağa çalışmalıyıq ki, onlar həm də sabit olsunlar.

Aşağıdakı qeyi-xətti xüsusi törəməli differensial tənliyə baxaq

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(1 + \Psi \left(a^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in [0, \infty), \tau \in [0, T] \quad (13)$$

harada ki, σ_0 və a verilmiş ədədlərdir.

Bu tənliyə aşağıdakı başlanğıc və Dirixle sərhəd şərtləri ilə baxacağıq

$$u(x, 0) = \max(x - E, 0), u(0, \tau) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) = x \quad (14)$$

2.1-də məsələnin qoyuluşu və istifadə olunacaq bəzi faktlar verilir.

2.2-də qeyri xətti məsələ üçün Saulyev sxeminin təsviri verilir.

2.3-də baxılan sxemin uyğunluğu, monotonluluğu və dayanaqlılığı analiz edilir. Bu paragrafda baxılan məsələ üçün Saulyev sxeminin monotonluğunu ilə bağlı aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 5. Əgər tətbiq edilən ədədi sxemdə zaman addımı aşağıdakı kimi seçilsə,

$$k \leq \frac{h^2}{\alpha_i^n}, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N, \quad (15)$$

onda bu sxem dayanaqlıdır.

Bu paraqrafda baxılan məsələ üçün Saul'yev sxeminin dayanıqlılığı göstərilir.

2.4-də ədədi eksperimentlər aparılmış və nəticələr qrafiklər şəklində verilmişdir. Burada həmçinin tətbiq olunan üsulun effektivliyi nümayiş olunmuş, nəticələr digər mövcud üsullar vasitəsi ilə alınmış nəticələrlə müqayisə edilmişdir.

Dissrtasiyanın üçüncü fəslində qeyd olunmuş oblastda iki ölçülü Pauli operatoruna baxdıq və uyğun parametrlərin müxtəlif qiymətlərində bu operator üçün qoyulmuş məsələnin hiperbolik və periodik analitik həlləri alınmışdır. Parametrlərin müxtəlif qiymətlərində bu həllərin qrafikləri verilmişdir.

Pauli operatoru üçün qoyulmuş aşağıdakı məsələyə baxılır

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_1 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_1 + (2ia_1 + a_2) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 + (2ia_2 - a_1) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 + \left(a^2 + V + \frac{\partial}{\partial x} a_2 - \frac{\partial}{\partial y} a_1 \right) \varphi_1 = 0 \quad (16)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_2 + (2ia_1 - a_2) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 + (2ia_2 + a_1) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 + \left(a^2 + V - \frac{\partial}{\partial x} a_2 + \frac{\partial}{\partial y} a_1 \right) \varphi_2 = 0 \quad (17)$$

Alınan ikinci tərtib xüsusi törəməli tənliklərini belə formada yazı bilərik

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_1 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_1 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 + A_2 \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 + \left(a^2 + V + \frac{\partial}{\partial x} a_2 - \frac{\partial}{\partial y} a_1 \right) \varphi_1 = 0, \quad (18)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_2 + A_3 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 + A_4 \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 + \left(a^2 + V - \frac{\partial}{\partial x} a_2 + \frac{\partial}{\partial y} a_1 \right) \varphi_2 = 0, \quad (19)$$

$$A_1 = 2ia_1 + a_2, A_2 = 2ia_2 - a_1,$$

$$A_3 = 2ia_1 - a_2, A_4 = 2ia_2 + a_1. \quad (20)$$

Məsələnin həlli üçün əvvəlcə 3.2 – də

$$\xi = m_1 x + m_2 y$$

dalğa çevrilməsini tətbiq edilir. Burada m_1 və m_2 sabit və ya dəyişən parametrlər ola bilər. Bu çevrilmədən istifadə edərək baxılan tənliklərini aşağıdakı kimi çevirmək olar

$$\begin{aligned} & (m_1^2 + m_2^2)\varphi_1'' + (A_1 m_1 + A_2 m_2)\varphi_1' + \\ & + \left(a^2 + V + \frac{\partial}{\partial x} a_2 - \frac{\partial}{\partial y} a_1 \right) \varphi_1 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & (m_1^2 + m_2^2)\varphi_1'' + (A_3 m_1 + A_4 m_2)\varphi_1' + \\ & + \left(a^2 + V - \frac{\partial}{\partial x} a_2 + \frac{\partial}{\partial y} a_1 \right) \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

harada ki,

$$\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{d\xi}, i = 1, 2 \quad \text{və} \quad a_i(x, y), i = 1, 2. \quad (23)$$

3.3 – də isə baxılan qeyri xətti xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli üçün nəzərdə tutulan $\tan(\varphi/2)$ genişlənmə üsulunu tətbiq edilir.

3.3. – də baxılan tənliklərin həllərinin aşağıdakı kimi ifadə ilə təyin olunur

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=0}^m c_k [\tan(\varphi/2)]^k + \sum_{k=1}^m d_k [\tan(\varphi/2)]^{-k}, \quad (24)$$

harada ki, $c_k (0 \leq k \leq m), d_k (1 \leq k \leq m)$ tapılmalı olan parametrlərdir və $c_m, d_m \neq 0$ və $\phi = \phi(\xi)$ funksiyaları aşağıdakı adi törəməli diferensial tənliyi ödəyir.

$$\phi'(\xi) = k_1 \sin(\phi(\xi)) + k_2 \cos(\phi(\xi)) + k_3 \quad (25)$$

3.4 –də müxtəlif hallara baxılır və hər bir hal üçün baxılan tənliyin xüsusi həllərini hesablanması üçün ədədi həll metodunun addımları verilir.

3.5-də baxılan tənliyin hiperbolik və triqonometrik həllər çoxluqları tapılmışdır. Alınan həllərin qrafikləri verilmişdir. Alınan həllərin qoyulan fiziki şərtlərdən asılılığı analiz edilmişdir. Parametrlərin müxtəlif qiymətlərini seçməklə, müxtəlif həllər ailəsini alınmış və onların qrafikləri verilmişdir.

Müəllif məsələlərin qoyuluşuna, müntəzəm diqqətinə və qiymətli məsləhətlərinə görə elmi rəhbəri f-r.e.d. Yusif Qasimova öz dərin minnətdarlığını bildirir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi Pauli operatoru üçün müxtəlif tip düz və tərs məsələlərin qoyulması və onların həll üsullarının işlənməsinə həsr edilmişdir.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Pauli operatorunun məxsusi ədədlərindən asılı olan funksiyanın oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsi qoyulmuş, bu məsələ araşdırılmış, optimal oblastın varlığı haqqında teoremlər isbat olunmuşdur [2,3,9,11];;
- Pauli operatorunun Neyman məxsusi ədədlərinin maksimalaşdırılması məsələsi tədqiq edilmiş və uyğun teoremlər isbat edilmişdir [4,6];
- Pauli operatoru üçün oblasta nəzərən tərs spektral məsələ qoyulmuş və onun analitik- ədədi həll üsulu təklif olunmuşdur [14];
- Qeyri-xəttilik halda baxılan məsələnin ədədi həlli üçün həll üsulu təklif olunmuş, ədədi eksperimentlər yerinə yetirilmişdir [12];
- Qeyd olunmuş oblastda baxılan məsələ ədədi tədqiq edilmiş, ədədi eksperimentlər yerinə yetirilmiş, meydana çıxan effektlər analiz edilmişdir [17].

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Gasimov, Y.S., Aliyeva, A.R. On a variation of the eigenvalues of Pauli operator with respect to domain // V Congress of the Turkic

- World Mathematicians Kyrgyzstan, “Issyk – Kul Aurora”, - Bishkek: - 5 -7 June, -2014, -p. 70.
2. Gasimov, Y.S., Aliyeva, A.R., Allahverdiyeva, N.A. On a minimization of one domain spectral functional // The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, –Baku: -27 - 29 August, - 2015, -p. 73-75.
3. Gasimov, Y.S., Allahverdiyeva, N.A., Aliyeva, A.R., Amirova L.I. Algorithm to the Solution of a Shape optimization problem for the eigenvalues of Pauli operator // The 5-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, - Baku: - 27 - 29 August, - 2015, -p. 75-78.
4. Aliyeva, A.R. On a domain optimization problem for the Pauli operator // - Baku: Advanced Mathematical Models & Applications, -2016. 1(1), -p. 14-19.
5. Gasimov, Y.S., Allahverdiyeva, N.A., Aliyeva, A.R. On an optimal shape problem for the eigenfrequency of the clamped plate // - Baku: TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, -2016. 7(1), -p. 28-33.
6. Əliyeva, A.R. Pauli operatoru üçün formaya görə optimallaşdırma məsələsi haqqında // “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları” adlı III Respublika elmi konfransının materialları, - Sumqayıt: -15-16 dekabr, - 2016, - s.107-108.
7. Gasimov, Y.S., Aliyeva, A.R. On a numerical solution a shape optimization problem for the eigenvalues of Pauli operator // Conference Proceedings Modern Trends in Physics, International Conference, - Baku: -20-22 April, - 2017, - p. 35-37.
8. Ю.С.Гасымов, А.А.Муртузаева, А.Р.Алиева. Об одной обратной задаче для уравнения составного типа // akad. M.Rəsulovun 100 illiyinə həsr olunmuş «Nəzəri və Tətbiqi Riyaziyyatın Aktual Məsələləri» Respublika elmi konfransı, - Şəki: - 28-29 oktyabr, - 2016, -p. 191-195.
9. Əliyeva, A.R. Oblasta nəzərən bir minimallaşdırma məsələsinin həllinin varlığı haqqında // Gənc tədqiqatçıların II Respublika elmi-praktik konfransı, -Bakı: -15 mart, - 2019, -s. 106-108.
10. Gasimov, Y., Agamaliev, L., Aliyeva, A.R. On the existence results for the domain functionals of the eigenvalues of the Pauli

operator // Proceedings of the international conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” devoted to the 60-th anniversary of IMM, - Baku: -23 -25 October, -2019, - p. 201-203.

11. Gasimov, Y.S., Aliyeva, A.R. On an existence of the optimal shape for one functional related with the eigenvalues of Pauli operator // 8th International Eurasian conference on Mathematical Sciences and Applications, dedicated to the 100 anniv. BSU, -Baku: - 27 -30 August, - 2019, - p. 94-96.

12. Pourghanbar S., Manafian J., Ranjbar M., Aliyeva A., Gasimov Y.S. An efficient alternating direction explicit method for solving a nonlinear partial differential equation // - Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing, - 2020, vol.2020, -p. 1-12.

13. Əliyeva, A.R. Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün minimallaşdırma məsələsi // Gənc Tədqiqatçıların III Respublika Elmi-praktik konfransı, - Bakı: -13 mart, -2020, -s. 80-81.

14. Aliyeva, A. Inverse problem for the eigenvalues of the Pauli operator // - Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, - 2021, 11(2), - pp.129-134.

15. Valdes, J.E.N., Gasimov, Y.S., & Aliyeva, A.R. On the oscillatory behavior of some generalized differential equation // - Pakistan: Punjab University Journal of Mathematics, - 2021, 53(1), - p. 71-82.

16. Allahverdiyeva, N.Ə., Aliyeva, A.R. Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün minimallaşdırma məsələsində optimal həllin varlığı haqqında // Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” mövzusunda Respublika elmi konfransı, -Bakı: 11-13 may, -2022, -s. 12-13.

17. Əliyeva, A.R. Pauli operatoru üçün bir məsələnin ədədi həlli haqqında // Gənc tədqiqatçıların VII Respublika elmi konfransı, - Bakı: -15 mart, - 2024, -s. 117-118.

Dissertasiyanın müdafiəsi **11 iyun 2024-cü il** tarixində saat **15³⁰-da** Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z. Xəlilov küçəsi, 23.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya işi və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universiteti rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **07 may 2024-cü il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 01.05.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcmi: 36284
Tiraj: 100