AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ SPEKTRAL PARAMETR OLAN DİRAK OPERATORU ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏ

İxtisas: 1211.01-Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Abid Qalib oğlu Fərzullazadə**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin Riyaziyyat və informatika kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
İbrahim Mayıl oğlu Nəbiyev

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
İlqar Qürbət oğlu Məmmədov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Anar Adil oğlu Nəbiyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasnın sədri: AMEA-nın həqiqi üzvü,
f.-r.e.d., professor
Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev

Dissertasiya şurasnın elmi katibi: f.-r.e.n., dosent
Zakir Fərman oğlu Xankişiyev

Z. Xankişiyev

Elmi seminarın sədri: f.e.d., professor
Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov

Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyi
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ p.h.ş.
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan
Baku State University l.e.p.l.
BDU ELMİ KATİB
SCIENTIFIC SECRETARY
İmzanı təsdiq edirəm:
"26" 12 2024

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Səbəbləri aşkar etmək üçün nəticələrdən başlamaq əsrlər boyu tədqiqatçıları maraqlandıran məsələ olub. Müşahidələrlə hadisələrin yaranma səbəblərini müəyyən etmək elmdə tərs məsələlər adlandırılmışdır. Tərs məsələlər təbiətşünaslığın, elm və texnikanın bir sıra sahələrinin mühüm məsələlərindəndir, onlar bizə birbaşa müşahidə edə bilmədiyimiz parametrlər haqqında məlumat verir.

Diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi müasir riyaziyyatın sürətlə inkişaf edən bir sahəsidir. Bu nəzəriyyənin əsas məsələlərinə spektrin tədqiqi, verilən funksiyanın diferensial operatorun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılışı, spektral analizin düz və tərs məsələlərinin həlli və s. daxildir. Diferensial operatorların müəyyən spektral verilənlər (spektrlər, normallaşdırıcı ədədlər ardıcıllığı, spektral funksiya, Veyl funksiyası, səpilmə verilənləri və s.) üzrə bərpa edilməsi məsələsi spektral analizin tərs məsələsi adlanır. Tərs spektral məsələlər nəzəriyyəsi mexanikada, fizikada, geofizikada, elektronikada, meteorologiyada və təbiətşünaslığın və texnikanın müxtəlif sahələrində geniş tətbiq olunur. Kvant mexanikasının inkişafı son illərdə müxtəlif diferensial operatorlar üçün tərs spektral məsələlərin tədqiqinə marağı artırmışdır. Buna görə də tərs məsələlərin müxtəlif variantlarının tədqiqi müasir riyaziyyatın aktual istiqamətlərindən birinə çevrilmişdir.

Geniş tədqiq olunan diferensial tənliklərdən biri də Dirak tənliyidir. Dirak tənliyi ingilis fiziki Paul Dirak tərəfindən 1928-ci ildə verilən relyativistik dalğa tənliyidir. Birölçülü stasionar Dirak sisteminin kanonik şəkli 1966-cı ildə M.G. Qasımov və B.M. Levitan tərəfindən alınmışdır.

Kanonik Dirak sistemi üçün müxtəlif qoyuluşlu tərs məsələlərə M.G. Qasımovun, B.M. Levitanın, H.M. Hüseynovun, M. Klausun, X.R. Məmmədovun, R.X. Əmirovun, V.A. Yurkonun, D.B. Hintonun, A.K. Jordanın, J.K. Şovun, M. Kissin, B.A. Vatsonun, S. Albeverionun, R. Qrinivin, Y. Mykytyukun, M.M. Malamudun, İ.M. Nəbiyevin, B. Keskinin, A.S. Özkanın və digər tədqiqatçıların elmi işlərində baxılmışdır. Sərhəd şərtləri ayrılan olduqda Dirak operatoru üçün iki spektrə görə tərs məsələ M.G. Qasımov və T.T. Cəbiyev tərəfindən tam həll edilmişdir.

Analitik əmsallı, cəmlənən potensiallı, kəsilən əmsallı, ayrılan sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan, baxılan aralığın daxili nöqtəsində məxsusiyyətə və kəsilmə şərtinə malik diferensial tənliklər sistemləri üçün (parçada, yarımoxda və bütün oxda) düz və tərs spektral məsələlərin müxtəlif variantları M.G. Qasımov, H.M. Hüseynov, F. Qestizi, N.B. Kərimov, M. Horvat, X.R. Məmmədov, V.M. Qurbanov, K. Li, M. Zhang, R.X. Əmirov, Y. Mykytyuk, Z.S. Əliyev, A.A. Shkalikov, E.S. Pənahov, Ç-Fu Yang, N.P. Bondarenko və onların tələbələri tərəfindən araşdırılmışdır. Bərpa məsələlərinin həlli zamanı onlar spektral verilənlər qismində iki və daha çox spektr, spektral funksiya, spektr və normallaşdırıcı ədədlər, Veyl funksiyası (matrisi) və səpilmə verilənləri istifadə etmişlər. Sərhəd şərtləri ayrılmayan, o cümlədən periodik, antiperiodik, kvaziperiodik və ümumiləşmiş periodik olduqda həmin operator üçün bərpa məsələləri T.V. Misyuranın, İ.M. Nəbiyevin, Y.L. Korotyayevin və A.S. Makinin elmi işlərində tədqiq olunmuşdur.

Qeyd etmək lazımdır ki, Dirak operatoru üçün ayrılmayan sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan halda T.Ş. Abdullayev və İ.M. Nəbiyevin məqaləsi istisna olmaqla tərs məsələlər heç bir işdə baxılmamışdır. Buna görə də bu tipli məsələlərin tədqiqi elmi maraq kəsb edir.

Təqdim olunan dissertasiyada ayrılmayan sərhəd şərtinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda Dirak operatoru üçün tərs məsələ tam həll olunmuşdur. Bu cür tərs məsələlərin həlli üçün zəruri və kafi şərtlərin tapılması işin ən çətin və əhəmiyyətli hissəsidir. İşdə spektral verilənlər olaraq iki spektr, müəyyən işarələr ardıcıllığı və bir kompleks ədəd götürülmüşdür və bu spektral verilənlərin tam xarakteristikası verilmişdir.

Yuxarıda qeyd olunanlardan dissertasiya mövzusunun aktuallığı aydın olur.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Tədqiqatın obyektini ayrılmayan sərhəd şərtində spektral parametrin xətti funksiyası olan Dirak operatoru, predmetini isə tərs məsələnin həlli, bərpa alqoritmləri, zəruri və kafi şərtlər təşkil edir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda Dirak operatoru üçün tərs spektral məsələnin həllindən ibarətdir. Belə ki, işdə baxılan sərhəd məsələsinin spektral xassələrinin tədqiqi, tərs məsələlərin müxtəlif formalı qoyuluşlarında yeganəlik teoremlərinin verilməsi, baxılan Dirak sistemi üçün bərpa alqoritmlərinin tərtib edilməsi və nəhayət tədqiq olunan tərs spektral məsələnin həlli üçün zəruri və kafi şərtlərin alınması işdə qarşıya qoyulan əsas vəzifələrdir.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində riyazi analiz, diferensial tənliklər, riyazi fizika, həqiqi dəyişənli və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analizin metodlarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. İşdə müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar aşağıdakılardır:

Ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda

- Dirak sisteminin spektral verilənlərinin əsas xassələrini öyrənmək;
- sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri üçün asimptotik düstur almaq;
- sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanması və növbələşməsi qaydalarını göstərmək;
- sərhəd məsələsi üçün müxtəlif formalarda tərs məsələlər qoyub yeganəlik teoremlərini isbat etmək;
- Dirak operatorunun bərpası üçün alqoritmlər tərtib etmək;
- tərs spektral məsələnin həlli üçün zəruri və kafi şərtlər almaq.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

Ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda

- Dirak sisteminin spektral verilənlərinin əsas xassələri öyrənilmişdir;
- sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin asimptotikası tapılmışdır;
- məxsusi ədədlərin (həmçinin xarakteristik funksiyasının sıfırlarının) təkrarlanması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
- məxsusi ədədlərinin növbələşməsi qaydaları göstərilmişdir;

- sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasının sonsuz hasil şəklində göstərilişi alınmışdır;
- müxtəlif qoyuluşlu tərs məsələlərin həlli üçün yeganəlik teoremləri isbat edilmişdir;
- sərhəd məsələlərinin bərpası üçün alqoritmlər qurulmuşdur;
- spektral verilənlərin xarateristikası verilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti. İşdə alınan nəticələr nəzəri xarakter daşıyır və onlardan operatorların spektral nəzəriyyəsinin bir sıra məsələlərinin həllində istifadə oluna bilər. Həmçinin alınan nəticələr fizika və texnikada tətbiq oluna bilər. Belə ki, riyazi fizikanın bəzi qeyri-xətti evolyusion tənliklərinin inteqrallanmasında, kvant mexanikasının müxtəlif məsələlərinin həlli zamanı və rəqslər nəzəriyyəsində bu nəticələrdən istifadə edilə bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri Lənkəran Dövlət Universitetində keçirilmiş "İnformasiya, elm, texnologiya və universitet perspektivləri" mövzusunda doktorantların və gənc tədqiqatçıların respublika elmi konfransında (Lənkəran, Azərbaycan, 2020), "6th International IFS and Contemporary Mathematics Conference" (Mersin, Turkey, 2019), 2nd International Scientific and Practical Internet Conference "Integration of Education, Science and Business in Modern Environment: Winter Debates" (Dnipro, Ukraine, 2021), "4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications" (Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey, 2021), "1st International Symposium on Recent Advances in Fundamental and Applied Sciences" **(**Atatürk University, Erzurum, Türkiye, 2021), XI International Youth Scientific-Practical Conference "Mathematical modeling of processes and system" (Bashkir State University, Ufa Respublic of Bashkortostan, Russia, 2021), XXXVII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (Sheki-Lankaran, Republic of Azerbaijan, Kyiv, Ukraine, 2022), XII International Youth Scientific-Practical Conference "Mathematical modeling of processes and system" (Bashkir State University, Ufa Respublic of Bashkortostan, Russia, 2022), Спектральная Теория Операторов и Смежные Вопросы (Уфа Республика Башкортостан, Россия,

2023) beynəlxalq elmi konfranslarında məruzə edilmiş və müzakirə olunmuşdur.

Dissertasiya işində alınan nəticələr riyazi fizikanın, relyativistik kvant nəzəriyyəsinin və diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərinin tədqiqində tətbiq oluna bilər.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Dissertasiya işində alınan bütün nəticə və təkliflər iddiaçıya aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Tədqiqat üzrə Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 5 məqalə (1-i Web of Science: Science Citation Index –Expanded (SCIE), 1-i Web of Science: Emerging Sources Citation Index (ESCI) siyahısına daxildir), 9 konfrans materialı (bunlardan 7-si ölkə xaricində beynəlxalq, 1-i ölkə daxilində beynəxlaq, 1-i isə respublika səviyyəli) olmaqla ümumilikdə 14 iş nəşr olunmuşdur. Əsərlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin "Riyaziyyat və informatika" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi –215485 işarədir (titul səhifəsi –333 işarə, mündəricat –1057 işarə, giriş –33340 işarə, I fəsil – 110000 işarə, II fəsil –32000 işarə, III fəsil –38000 işarə, nəticə –755 işarə). İstifadə olunan ədəbiyyat siyahısı 102 addan ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Birinci fəsil altı, ikinci və üçüncü fəsillərin hər biri üç paraqrafdan ibarətdir. İşin giriş hissəsində mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi, tədqiqatın obyekti və predmeti, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri, tədqiqat metodları, müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar, tədqiqatın elmi yeniliyi, tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti, aprobasiyası və tətbiqi haqqında məsələlərə yer verilmişdir. Daha sonra dissertasiyada alınan nəticələr haqqında qısa məlumat verilmişdir.

Birölçülü stasionar Dirak sisteminin kanonik şəkli aşağıdakı kimidir:

$$BY'(x)+Q(x)Y(x)=\lambda Y(x) \tag{1}$$

burada $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $Y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}$,

$\lambda-$spektral parametr, $p(x),\ q(x)\in W_2^1[0,\pi]$ $-$həqiqi funksiyalar, $W_2^1[0,\pi]$ isə $[0,\pi]$ parçasında törəməsi kvadratı ilə cəmlənən (yəni $L_2[0,\pi]$-yə daxil olan) mütləq kəsilməz funksiyalardan ibarət olan Sobolev fəzasıdır. $[0,\pi]$ parçasında (1) tənliyinin və

$$A_0Y(0)+A_1Y(\pi)=0 \tag{2}$$

ümumi ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələsinə baxaq, burada

$$A_0=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{pmatrix},$$

$a_{ik}\ \left(i=1,2;\ k=\overline{1,4}\right)$ istənilən kompleks ədədlərdir.

Tərif 1. Əgər λ parametrinin $\lambda=\lambda_0$ qiymətində (1), (2) məsələsinin $Y_0(x)$ trivial olmayan həlli varsa, onda λ_0 ədədinə bu məsələnin məxsusi ədədi, $Y_0(x)$ vektor-funksiyasına isə λ_0 məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor-funksiyası deyilir. Verilən λ_0 məxsusi ədədi üçün (1), (2) məsələsinin xətti asılı olmayan həllərinin sayı λ_0 məxsusi ədədinin təkrarlanma dərəcəsi adlanır.

(2) sərhəd şərtlərində

$$A_0=\begin{pmatrix}\alpha\lambda+\beta & 1\\ -\overline{\omega} & 0\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$$

olduqda sərhəd şərtləri

$$\begin{aligned}&y_2(0)+(\alpha\lambda+\beta)y_1(0)+\omega y_1(\pi)=0,\\ &y_2(\pi)+\gamma y_1(\pi)-\overline{\omega}y_1(0)=0,\end{aligned} \tag{3}$$

şəklinə düşər, burada $\alpha,\beta,\gamma-$həqiqi ədədlər, ω isə kompleks ədəddir. İşdə $\alpha\omega\neq 0$ halına baxılmışdır, yəni sərhəd şərtləri ayrılmayandır və bu şərtlərin birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxildir. (1), (3) sərhəd məsələsini $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ ilə işarə edək.

Tutaq ki, $C(x,\lambda)=\begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) \\ c_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ və $S(x,\lambda)=\begin{pmatrix} s_1(x,\lambda) \\ s_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ $-(1)$ tənliyinin

$$C(0,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix},\ S(0,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həlləridir. Bu həllərin Vronski determinantı eyniliklə 1-ə bərabərdir, yəni

$$c_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda)-c_2(x,\lambda)s_1(x,\lambda)\equiv 1.$$

(1) tənliyinin ümumi həlli

$$Y(x,\lambda)=M_1C(x,\lambda)+M_2S(x,\lambda)$$

şəklində olacaqdır, burada M_1 və M_2 istənilən sabitlərdir. Bu həlli (3) sərhəd şərtlərində nəzərə alsaq, onda $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyası

$$d(\lambda)=\det(A_0+A_1e(\pi,\lambda)) \tag{4}$$

şəklində olar, burada $e(\pi,\lambda)=\begin{pmatrix} c_1(\pi,\lambda) & s_1(\pi,\lambda) \\ c_2(\pi,\lambda) & s_2(\pi,\lambda)\end{pmatrix}$. Bu funksiyanın sıfırları $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ məsələsinin məxsusi ədədləridir. (4) münasibətində A_0 və A_1-in ifadələrini nəzərə alsaq xarakteristik funksiya

$$d(\lambda)=2\operatorname{Re}\omega-c_2(\pi,\lambda)-\gamma c_1(\pi,\lambda)+$$
$$+|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda)+(\alpha\lambda+\beta)[s_2(\pi,\lambda)+\gamma s_1(\pi,\lambda)] \tag{5}$$

şəklinə düşər.

Dissertasiya işinin birinci fəslində Dirak sisteminin fundamental həllərinin komponentləri üçün göstərilişlər və $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin spektral xassələri alınmışdır.

Birinci fəslin birinci paraqrafında Dirak sisteminin fundamental həllərinin $c_1(x,\lambda)$, $c_2(x,\lambda)$, $s_1(x,\lambda)$, $s_2(x,\lambda)$ komponentləri üçün göstərilişlər alınmışdır.

Teorem 1. Əgər $p(x),\ q(x)\in W_2^1[0,x]$ olarsa, onda aşağıdakı göstərilişlər doğrudur:

$$c_1(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{b+q(x)+d(x)}{2\lambda}\sin\lambda x-\frac{a-p(x)}{2\lambda}\cos\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x R_1(x,t)e^{2i\lambda t}dt,$$

$$c_2(x,\lambda)=\sin\lambda x-\frac{b+d(x)-q(x)}{2\lambda}\cos\lambda x-\frac{a+p(x)}{2\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x R_2(x,t)e^{2i\lambda t}dt\,,$$

$$s_1(x,\lambda)=-\sin\lambda x+\frac{d(x)+q(x)-b}{2\lambda}\cos\lambda x-\frac{a+p(x)}{2\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x R_3(x,t)e^{2i\lambda t}dt\,,$$

$$s_2(x,\lambda)=\cos\lambda x-\frac{b+q(x)-d(x)}{2\lambda}\sin\lambda x+\frac{a-p(x)}{2\lambda}\cos\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x R_4(x,t)e^{2i\lambda t}dt\,,$$

burada $a=p(0),\ b=q(0),\ \ d(x)=\int_0^x\left[p^2(t)+q^2(t)\right]dt,\ \ R_q(x,t)\ \left(q=\overline{1,4}\right)$ isə hər bir $x\in[0,\pi]$ üçün t - yə nəzərən kvadratı ilə cəmlənən funksiyadır.

$x=\pi$ xüsusi halı üçün bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınmışdır.

Nəticə. $c_1(\pi,\lambda)$, $c_2(\pi,\lambda)$, $s_1(\pi,\lambda)$ və $s_2(\pi,\lambda)$ funksiyaları üçün aşağıdakı göstərilişlər doğrudur:

$$c_1(\pi,\lambda)=\cos\pi\lambda+B_1\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}-C_1\frac{\cos\pi\lambda}{\lambda}+\frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda},$$
$$c_2(\pi,\lambda)=\sin\pi\lambda+B_2\frac{\cos\pi\lambda}{\lambda}+C_2\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}+\frac{\psi_2(\lambda)}{\lambda},$$
$$s_1(\pi,\lambda)=-\sin\pi\lambda+B_3\frac{\cos\pi\lambda}{\lambda}+C_2\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}+\frac{\psi_3(\lambda)}{\lambda},$$
$$s_2(\pi,\lambda)=\cos\pi\lambda+B_4\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}+C_1\frac{\cos\pi\lambda}{\lambda}+\frac{\psi_4(\lambda)}{\lambda},$$

burada

$$B_1=A-Q_1\,,\ B_2=-A+Q_2\,,\ B_3=A+Q_2\,,\ B_4=A+Q_1\,,$$
$$C_1=\frac{p(0)-p(\pi)}{2},\ C_2=-\frac{p(0)+p(\pi)}{2},$$
$$A=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[p^2(x)+q^2(x)\right]dx,\quad Q_1=-\frac{q(0)+q(\pi)}{2},\ \ Q_2=\frac{q(\pi)-q(0)}{2},$$

$$\psi_p(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\psi}_p(t)e^{i\lambda t}dt\,,\ \tilde{\psi}_p(t)\in L_2[-\pi,\pi],\ \ p=\overline{1,4}\,.$$

Bu göstərilişlər Dirak operatoru üçün müxtəlif qoyuluşlu düz və tərs spektral məsələlərin həllində mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Bu fəslin ikinci paraqrafında tədqiq olunan sərhəd məsələsinin sadə spektral xassələri alınmışdır. Burada məxsusi ədədlərin sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması üçün şərtlər tapılmışdır. Həmçinin məxsusi ədədlərin qoşulmuş funksiyaları haqqında teorem isbat edilmişdir.

Teorem 2. $\alpha < 0$ olduqda $D(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir.

Qeyd edək ki, işdə hər yerdə fərz edəcəyik ki, $\alpha < 0$, yəni məxsusi ədədlərin həqiqi olan halına baxacağıq.

Tərif 2. Əgər

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(x) \\ y_{2,1}(x) \end{pmatrix}, \; Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{1,2}(x) \\ y_{2,2}(x) \end{pmatrix}, \; . \; . \; . \; . \; , \; Y_r(x) = \begin{pmatrix} y_{1,r}(x) \\ y_{2,r}(x) \end{pmatrix}$$

vektor-funksiyaları mütləq kəsilməz törəməyə malikdirsə,

$$B\, Y_j'(x) + Q(x)\, Y_j(x) - Y_{j-1}(x) = \lambda_0 Y_j(x)$$

diferensial tənliyini və

$$(\alpha\lambda + \beta) y_{1,j}(0) + y_{2,j}(0) + \omega y_{1,j}(\pi) + \alpha y_{1,j-1}(0) = 0,$$

$$-\overline{\omega} y_{1,j}(0) + \gamma y_{1,j}(\pi) + y_{2,j}(\pi) = 0,$$

$$j = 1,2,3,\ldots,r$$

sərhəd şərtlərini ödəyirsə, onda bu funksiyalar $Y_0(x) = \begin{pmatrix} y_{1,0}(x) \\ y_{2,0}(x) \end{pmatrix}$ məxsusi vektor-funksiyasının qoşulmuş vektor-funksiyaları adlanır.

Teorem 3. $\alpha < 0$ olduqda $D(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ sərhəd məsələsinin məxsusi vektor-funksiyalarının qoşulmuş vektor-funksiyaları yoxdur.

Teorem 4. Əgər

$$2\,\mathrm{Re}\left[\omega \overline{y_1(0)} y_1(\pi)\right] - \gamma |y_1(\pi)|^2 + \beta |y_1(0)|^2 + \int_0^{\pi} p(x) \left[|y_1(x)|^2 + |y_2(x)|^2\right] dx \neq 0$$

olarsa, onda $D(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri sıfırdan fərqlidir.

Birinci fəslin üçüncü paraqrafında $D(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlər ardıcıllığı üçün asimptotik düstur alınmışdır.

Teorem 1-dən alınan nəticədə verilən göstərilişlərdən istifadə etməklə (5) xarakteristik funksiyası üçün

$$d(\lambda)=2\operatorname{Re}\omega+\alpha\lambda(\cos\pi\lambda-\gamma\sin\pi\lambda)+(\alpha\gamma B_3+\alpha C_1+\beta-\gamma)\cos\pi\lambda+$$
$$+\left(\alpha B_4+\alpha\gamma C_2-1-|\omega|^2-\beta\gamma\right)\sin\pi\lambda+l(\lambda)$$

bərabərliyi alınmışdır, burada, $l(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{l}(t)e^{i\lambda t}dt$, $\tilde{l}(t)\in L_2[-\pi,\pi]$. Ruşe teoremindən istifadə etməklə göstərilir ki, $d(\lambda)=0$ tənliyinin γ_k $(k=\pm 0,\pm 1,\pm 2,...)$ kökləri $k\to\pm\infty$ olduqda

$$\gamma_k=k+a+\varepsilon_k$$

asimptotikasına malikdir. $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarının Teylor sırasına ayrılışlarından istifadə etməklə ε_k kəmiyyətinin asimptotikası tapılır.

Teorem 5. $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin γ_k $(k=\pm 0,\pm 1,\pm 2,...)$ ($|k|\to\infty$ olduqda) məxsusi ədədləri üçün aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$\gamma_k=k+a+\frac{(-1)^{k+1}\tilde{A}-\tilde{B}}{\pi k}+\frac{\xi_k}{k}$$

burada

$$\tilde{A}=-\frac{2\operatorname{Re}\omega}{\alpha b},$$

$$\tilde{B}=-A-\frac{q(\pi)(\gamma^2-1)-b^2q(0)-2\gamma p(\pi)}{2b^2}+\frac{b^2+|\omega|^2}{\alpha b^2},$$

$$a=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\gamma,\quad b=\sqrt{1+\gamma^2},\quad \{\xi_k\}\in l_2.$$

Birinci fəslin dördüncü paraqrafında məxsusi ədədlərin (həmçinin sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasının sıfırlarının) iki dəfə təkrarlanması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılır. Burada həmçinin $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanma dərəcəsi haqqında teorem isbat edilir.

Teorem 6. λ_0 ədədinin $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədi (həmçinin $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının təkrarlanan sıfrı) olması üçün zəruri və kafi şərt ω-nın sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması və

$$\alpha\lambda_0 + \beta + \omega c_1(\pi, \lambda_0) = 0,$$
$$s_2(\pi, \lambda_0) + \gamma s_1(\pi, \lambda_0) = 0$$

bərabərliklərinin ödənməsidir.

Teorem 7. $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının sıfrının təkrarlanma dərəcəsi ikidən böyük ola bilməz.

Alınan bu şərtlər spektrin strukturunun araşdırılmasında, operatorların məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşmə qaydasının müəyyən edilməsində, bərpa məsələlərində və kafi şərtlərin tapılmasında mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Birinci fəslin beşinci paraqrafında $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının spektr vasitəsi ilə sonsuz hasil şəklində bərpası üçün düstur alınır.

Teorem 8. ω məlum olduqda $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasını $\{\gamma_k\}$ $(k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ spektri vasitəsilə aşağıdakı düsturla birqiymətli təyin etmək olar:

$$d(\lambda) = -\pi\alpha b(\gamma_{-0} - \lambda)(\gamma_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma_k - \lambda}{k}, \qquad (6)$$

burada

$$\alpha b = \frac{2\,\mathrm{Re}\,\omega}{\pi \lim\limits_{k\to\infty} k(\gamma_{2k} - \gamma_{2k+1} + 1)}.$$

Xarakteristik funksiyanın sonsuz hasil şəklində göstərilişi tərs məsələnin həllində mühüm rol oynayır. Belə ki, tərs məsələnin həllində ilk olaraq xarakteristik funksiya spektral verilənlər vasitəsi ilə bərpa edilir. Daha sonra xarakteristik funksiyadan və spektral verilənlərdən istifadə etməklə sərhəd məsələsinin əmsalları tapılır.

Birinci fəslin sonuncu paraqrafında $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$ olduqda iki cüt $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$, $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha,\beta_1,\gamma)$, $D(\omega,\alpha,\beta_2,\gamma)$ sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşməsi qaydaları göstərilmişdir.

Teorem 9. $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ olduqda $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < 0)$ sərhəd məsələlərinin $\gamma_k^{(1)}$ və $\gamma_k^{(2)}$ $(\gamma_k^{(j)} \neq 0)$ $(k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ məxsusi ədədləri növbələşir, yəni

$$0<\gamma_{+0}^{(1)}<\gamma_{+0}^{(2)}<\gamma_{1}^{(1)}<\gamma_{1}^{(2)}<\gamma_{2}^{(1)}<\gamma_{2}^{(2)}<...,$$
$$0>\gamma_{-0}^{(1)}>\gamma_{-0}^{(2)}>\gamma_{-1}^{(1)}>\gamma_{-1}^{(2)}>\gamma_{-2}^{(1)}>\gamma_{-2}^{(2)}>...,$$

$\operatorname{Im}\omega=0$ olduqda isə aşağıdakı bərabərsizlikləri ödəyir:

$$0<\gamma_{+0}^{(1)}\le\gamma_{+0}^{(2)}\le\gamma_{1}^{(1)}\le\gamma_{1}^{(2)}\le\gamma_{2}^{(1)}\le\gamma_{2}^{(2)}\le...,$$
$$0>\gamma_{-0}^{(1)}\ge\gamma_{-0}^{(2)}\ge\gamma_{-1}^{(1)}\ge\gamma_{-1}^{(2)}\ge\gamma_{-2}^{(1)}\ge\gamma_{-2}^{(2)}\ge...,$$

belə ki, $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədi $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ məsələsinin sadə məxsusi ədədidir.

Teorem 10. $\operatorname{Im}\omega\neq 0$ olduqda $D(\omega,\alpha,\beta_1,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha,\beta_2,\gamma)$ sərhəd məsələlərinin $\mu_k^{(1)}$, $\mu_k^{(2)}$ $(k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$ məxsusi ədədləri növbələşir, yəni

$$...<\mu_k^{(1)}<\mu_k^{(2)}<\mu_{k+1}^{(1)}<\mu_{k+1}^{(2)}<\mu_{k+2}^{(1)}<\mu_{k+2}^{(2)}<...,$$

$\operatorname{Im}\omega=0$ olduqda isə

$$...\le\mu_k^{(1)}\le\mu_k^{(2)}\le\mu_{k+1}^{(1)}\le\mu_{k+1}^{(2)}\le\mu_{k+2}^{(1)}\le\mu_{k+2}^{(2)}\le...$$

bərabərsizlikləri ödənir, belə ki, məsələlərdən birinin təkrarlanan məxsusi ədədi digər məsələnin sadə məxsusi ədədidir.

Dissertasiya işinin ikinci fəslində $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha,\beta_j,\gamma)$ $(j=1,2)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri müəyyən edilərək tərs məsələlərin həlli üçün yeganəlik teoremləri isbat edilmişdir. Sonda isə spektral verilənlərə və yeganəlik teoremlərinə əsaslanaraq Dirak sisteminin bərpası üçün alqoritmlər qurulmuşdur. Burada spektral verilənlər qismində onların məxsusi ədədlər ardıcıllıqları, $\{\delta_n\}$ işarələr ardıcıllığı və ω ədədi götürülmüşdür.

Birinci paraqrafda $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsi üçün tərs məsələyə baxılır.

(3) sərhəd şərtlərinə uyğun olaraq

$$\begin{gathered} y_2(0)+(\alpha_j\lambda+\beta)y_1(0)+\omega y_1(\pi)=0,\\ y_2(\pi)+\gamma y_1(\pi)-\overline{\omega}y_1(0)=0,\\ j=1,2, \end{gathered} \tag{7}$$

şərtlərinə baxaq. (1), (7) məsələsini $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ ilə, bu məsələnin məxsusi ədədlər ardıcıllığını isə $\{\gamma_k^{(j)}\}$ $(j=1,2;\ k=\pm0,\pm1,\pm2,\ldots)$ ilə işarə edək. (5) xarakteristik funksiyasına əsasən $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ məsələsinin məxsusi ədədləri

$$d_j(\lambda)=2\operatorname{Re}\omega+U_+(\lambda)+(\alpha_j\lambda+\beta)\sigma(\lambda)$$

xarakteristik funksiyasının sıfırlarıdır, burada

$$U_+(\lambda)=|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda)-c_2(\pi,\lambda)-\gamma c_1(\pi,\lambda)\,,$$

$$\sigma(\lambda)=s_2(\pi,\lambda)+\gamma\, s_1(\pi,\lambda)\,.$$

Burada həmçinin (1) tənliyinin və

$$y_1(0)=y_1(\pi)=0\,, \tag{8}$$

$$y_1(0)=y_2(\pi)+\gamma y_1(\pi)=0 \tag{9}$$

sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədləri mühüm rol oynayır. (1), (8) məsələsinin məxsusi ədədlər ardıcıllığını $\{\lambda_n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$, (1), (9) məsələsinin məxsusi ədədlər ardıcıllığını isə $\{\upsilon_n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ ilə işarə edək**.** (1), (9) məsələsinin $\{\upsilon_n\}$ məxsusi ədədləri üçün

$$\upsilon_n=n+\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\gamma+m_n \tag{10}$$

asimptotik düsturu doğrudur, burada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} m_n^2<\infty$.

$D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsi üçün tərs spektral məsələni aşağıdakı şəkildə qoyaq.

Tərs məsələ 1. $\{\gamma_k^{(1)}\}$, $\{\gamma_k^{(2)}\}$ $(k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$ spektrləri,

$$\delta_n=\operatorname{sign}\left(1-|\omega s_1(\pi,\upsilon_n)|\right)\ (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

işarələr ardıcıllığı və ω ədədinin köməyi ilə (1) tənliyinin $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ əmsal matris funksiyasını və (7) sərhəd şərtlərinin $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta,\ \gamma$ əmsallarını bərpa etməli.

Sərhəd şərtləri ayrılmayan olduğundan $\{\gamma_k^{(1)}\}$, $\{\gamma_k^{(2)}\}$ spektrləri bu məsələləri yeganə qaydada bərpa etmək üçün kifayət etmir. Buna görə də əlavə spektral verilənlərin daxil edilməsi zərurəti yaranır.

Teorem 11. $\{\gamma_k^{(1)}\}$, $\{\gamma_k^{(2)}\}$ $(k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$ spektrləri,

$$\delta_n=\operatorname{sign}\left(1-|\omega s_1(\pi,\upsilon_n)|\right)\ (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

işarələr ardıcıllığı və ω ədədi $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələlərini birqiymətli olaraq təyin edir.

İkinci fəslin ikinci paraqrafında $D(\omega,\alpha,\beta_j,\gamma)$ $(j=1,2)$ sərhəd məsələsi üçün tərs məsələyə baxılır və yeganəlik teoremi isbat edilir. Qeyd edək ki, burada sadəlik üçün $p(\pi)=q(\pi)=q(0)=0$ qəbul olunmuşdur.

(3) sərhəd şərtlərinə uyğun olaraq

$$\begin{gathered} y_2(0)+(\alpha\lambda+\beta_j)y_1(0)+\omega y_1(\pi)=0, \\ y_2(\pi)+\gamma y_1(\pi)-\overline{\omega}y_1(0)=0, \\ j=1,2, \end{gathered} \tag{11}$$

şərtlərinə baxaq. (1), (11) məsələsini $D(\omega,\alpha,\beta_j,\gamma)$ ilə, bu məsələnin məxsusi ədədlərini isə $\{\mu_k^{(j)}\}$ $(j=1,2;\ k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$ ilə işarə edək.

Tərs məsələ 2. $\{\mu_k^{(1)}\}$, $\{\mu_k^{(2)}\}$ $(k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$ spektrləri,

$$\delta_n=\operatorname{sign}\left(1-|\omega s_1(\pi,\upsilon_n)|\right),\ (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

işarələr ardıcıllığı və ω ədədinin köməyi ilə (1) tənliyinin $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ əmsal matris funksiyasını, (11) sərhəd şərtlərinin α, β_1, β_2, γ əmsallarını bərpa etməli.

Qoyulan tərs məsələnin birqiymətli olaraq bərpası üçün aşağıdakı yeganəlik teoremi doğrudur.

Teorem 12. $\{\mu_k^{(1)}\}$, $\{\mu_k^{(2)}\}$ $(k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$ spektrləri

$$\delta_n=\operatorname{sign}\left(1-|\omega s_1(\pi,\upsilon_n)|\right)\ (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

işarələr ardıcıllığı və ω ədədi $D(\omega,\alpha,\beta_1,\gamma)$, $D(\omega,\alpha,\beta_2,\gamma)$ sərhəd məsələlərini birqiymətli olaraq təyin edir.

İkinci fəslin üçüncü paraqrafında $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha,\beta_j,\gamma)$ $(j=1,2)$ sərhəd məsələlərinin hər biri üçün bərpa alqoritmləri tərtib olunmuşdur.

Alqoritm. Tutaq ki, $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələlərinin $\{\gamma_k^{(1)}\}$, $\{\gamma_k^{(2)}\}$ spektrləri, $\{\delta_n\}$ işarələr ardıcıllığı və ω ədədi verilmişdir.

Addım 1. $d_j(\lambda)$ xarakteristik funksiyalarının $\{\gamma_k^{(j)}\}$ ardıcıllığlarının köməyi ilə (6) sonsuz hasili şəklində bərpa edirik.

Addım 2. (7) sərhəd şərtlərinin $\gamma, \alpha_j, (j=1,2), \beta,$ parametrlərini

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} ctg\pi\left(\gamma_k^{(j)} - k\right),$$

$$\alpha_j = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{d_j(2k)}{k},$$

$$\beta = -2\operatorname{Re}\omega + \gamma + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\lim_{k\to\infty}\left[\alpha_1 d_2(2k) - \alpha_2 d_1(2k)\right]$$

düsturları vasitəsilə təyin edirik.

Addım 3. $\sigma(\lambda)$ funksiyasını

$$\sigma(\lambda) = \frac{d_1(\lambda) - d_2(\lambda)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda}$$

düsturundan bərpa edirik və bu funksiyanın υ_n sıfırlarını tapırıq.

Addım 4. $U_+(\lambda)$ funksiyasını

$$U_+(\lambda) = \frac{\alpha_2 d_1(\lambda) - \alpha_1 d_2(\lambda)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \beta\sigma(\lambda) - 2\operatorname{Re}\omega$$

bərabərliyinin köməyi ilə bərpa edirik.

Addım 5.

$$U_-(\lambda) = -|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda) - c_2(\pi,\lambda) - \gamma c_1(\pi,\lambda) \qquad (12)$$

funksiyasının $\{\upsilon_n\}$ nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayırıq

$$U_-(\upsilon_n) = (-1)^{n+1}\delta_n\sqrt{U_+^2(\upsilon_n) - 4|\omega|^2}$$

münasibəti vasitəsi ilə tapırıq.

Addım 6.

$$\eta(\lambda) = U_+(\lambda) - U_-(\lambda) + 2|\omega|^2 \sin\lambda\pi \qquad (13)$$

funksiyasını

$$\eta(\lambda) = \sigma(\lambda)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\eta(\upsilon_n)}{(\lambda - \upsilon_n)\sigma'(\eta_n)} \qquad (14)$$

interpolyasiya düsturu ilə bərpa edirik, burada

$$\eta(\upsilon_n) = U_+(\upsilon_n) + (-1)^n\delta_n\sqrt{U_+^2(\upsilon_n) - 4|\omega|^2} + 2|\omega|^2\sin\upsilon_n\pi.$$

Addım 7. (14) interpolyasiya düsturundan və $U_+(\lambda)$ funksiyasından istifadə edərək (13) bərabərliyindən (12)-də verilən $U_-(\lambda)$ funksiyasını qururuq.

Addım 8. $U_\pm(\lambda)$ funksiyalarından istifadə etməklə

$$s_1(\pi,\lambda)=\frac{1}{2|\omega|^2}\left[U_+(\lambda)-U_-(\lambda)\right]$$

düsturu vasitəsi ilə (1), (8) sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasını bərpa edirik və onun λ_n sıfırlarını tapırıq.

Addım 9. $\sigma(\lambda)$, $s_1(\pi,\lambda)$ funksiyalarından və γ parametrindən istifadə etməklə (1) tənliyinin və $y_1(0)=y_2(\pi)=0$ sərhəd şərtlərinin doğurduğu məsələnin $s_2(\pi,\lambda)$ xarakteristik funksiyasını belə qururuq:

$$s_2(\pi,\lambda)=\sigma(\lambda)-\gamma s_1(\pi,\lambda)$$

Addım 10. $\{\lambda_n\}$ və $\{\upsilon_n\}$ ardıcıllığlarının köməyi ilə məlum alqoritm üzrə (1) Dirak tənliyinin $Q(x)$ əmsalı bərpa olunur.

Oxşar qaydada $D(\omega,\alpha,\beta_j,\gamma)$ sərhəd məsələsinin bərpası üçün də alqoritm qurulmuşdur.

Dissertasiya işinin üçüncü fəslində $D(\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ sərhəd məsələsinin bərpası üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır. Məlumdur ki, bu şərtlərin alınması işin ən çətin və ən əhəmiyyətli hissəsidir.

Bu fəslin birinci paraqrafında $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ məsələsinin spektral verilənlərinin xarakteristikalarının alınmasında istifadə olunan lemmalar isbat edilmişdir.

Lemma 1.

$$\sigma(\lambda)=\cos\pi\lambda-\gamma\sin\pi\lambda+\frac{A}{\lambda}\left[\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda\right]+\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}$$

tam funksiyasının υ_n $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ sıfırları üçün aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$\upsilon_n=n+a+\frac{A}{\pi n}+\frac{\eta_n}{n},$$

burada

$$A=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[p^2(x)+q^2(x)\right]dx,$$

$$\psi(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\psi}(t)e^{i\lambda t}dt\ ,\ \tilde{\psi}(t)\in L_2[-\pi,\pi],$$

$$a=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\gamma,\ \ \{\eta_n\}\in l_2.$$

Lemma 2.

$$d(\lambda)=-\pi\alpha b(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_k-\lambda}{k}$$

tam funksiyası üçün

$$d(\lambda)=2\operatorname{Re}\omega+\alpha\lambda(\cos\pi\lambda-\gamma\sin\pi\lambda)+$$

$$+\left(\alpha a\gamma+\alpha A+\frac{\alpha\left(q(\pi)(\gamma^2-1)-b^2q(0)-2\gamma p(\pi)\right)}{2b^2}-\frac{b^2+|\omega|^2}{b^2}-\alpha\gamma\tilde{C}\right)\sin\pi\lambda+$$

$$+\left(\alpha\tilde{C}-\alpha a+\alpha\gamma A+\frac{\alpha\gamma\left(q(\pi)(\gamma^2-1)-b^2q(0)-2\gamma p(\pi)\right)}{2b^2}-\frac{\gamma\left(b^2+|\omega|^2\right)}{b^2}\right)\cos\pi\lambda-$$

$$-\alpha bf(\lambda-a)$$

göstərilişi doğrudur, burada $\tilde{C}$ həqiqi ədəd,

$$f(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(t)e^{i\lambda t}dt,\ \ \tilde{f}(t)\in L_2[-\pi,\pi].$$

Üçüncü fəslin ikinci paraqrafında $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ $(\alpha_1\neq\alpha_2)$ sərhəd məsələlərinin bərpası üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

Teorem 13. $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ $\left(|\omega|^2<\gamma^2+1,\ \alpha_1<\alpha_2<0\right)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $$\gamma_k^{(j)}=k+a+\frac{(-1)^{k+1}\tilde{A}_j-\tilde{B}_j}{\pi k}+\frac{\xi_k^{(j)}}{k},\qquad(15)$$

burada

$$a=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\gamma,\quad \tilde{A}_j=-\frac{2\operatorname{Re}\omega}{\alpha_j b},$$

$$\tilde{B}_j=-A-\frac{q(\pi)(\gamma^2-1)-b^2q(0)-2\gamma p(\pi)}{2b^2}+\frac{b^2+|\omega|^2}{\alpha_j b^2},\ b=\sqrt{1+\gamma^2},\ \{\xi_k^j\}\in l_2;$$

2) $\operatorname{Im}\omega\neq 0$ olduqda $\gamma_k^{(1)}$ və $\gamma_k^{(2)}$ məxsusi ədədləri növbələşir, yəni

$$0<\gamma_{+0}^{(1)}<\gamma_{+0}^{(2)}<\gamma_1^{(1)}<\gamma_1^{(2)}<\gamma_2^{(1)}<\gamma_2^{(2)}<...,$$
$$0>\gamma_{-0}^{(1)}>\gamma_{-0}^{(2)}>\gamma_{-1}^{(1)}>\gamma_{-1}^{(2)}>\gamma_{-2}^{(1)}>\gamma_{-2}^{(2)}>...,$$

$\operatorname{Im}\omega=0$ olduqda isə

$$0\le\gamma_{+0}^{(1)}\le\gamma_{+0}^{(2)}\le\gamma_1^{(1)}\le\gamma_1^{(2)}\le\gamma_2^{(1)}\le\gamma_2^{(2)}\le...,$$
$$0\ge\gamma_{-0}^{(1)}\ge\gamma_{-0}^{(2)}\ge\gamma_{-1}^{(1)}\ge\gamma_{-1}^{(2)}\ge\gamma_{-2}^{(1)}\ge\gamma_{-2}^{(2)}\ge...,$$

bərabərsizlikləri ödənir, belə ki, $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədi $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$ məsələsinin sadə məxsusi ədədidir;

3)

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_j b}\left[2\operatorname{Re}\omega-d_j\left(2k+a+\frac{1}{2}\right)\right]-2k-\frac{1}{2}\right\}=a+\frac{\beta}{\alpha_j}+\frac{\gamma|\omega|^2}{\alpha_j b^2},\qquad (16)$$

burada $d_j(\lambda)$ – $D(\omega,\alpha_j,\beta,\gamma)$ məsələsinin xarakteristik funksiyasıdır;

4) $b_n=d_j(\upsilon_n)-2\operatorname{Re}\omega$ üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) $b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{b^2+|\omega|^2}{b}+\dfrac{\chi_n}{n}$, $\{\chi_n\}\in l_2$;

b) $|b_n|\ge 2|\omega|$, burada $\{\upsilon_n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ ədədləri $d_1(\lambda)-d_2(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarıdır, yəni (1), $y_1(0)=y_2(\pi)+\gamma\, y_1(\pi)=0$ məsələsinin məxsusi ədədləridir;

5) Əgər $|b_n|=2|\omega|$ olarsa, onda $\delta_n=0$, əks halda isə $\delta_n=\pm1$ olar və lakin elə N natural ədədi var ki, $|n|>N$ olduqda $\delta_n=1$ olur.

Üçüncü fəslin üçüncü paraqrafında tərs məsələnin əsas teoremi alınmışdır.

Teorem 14. $\{\gamma_k^{(1)}\}$, $\{\gamma_k^{(2)}\}$ $(k=\pm0,\pm1,\pm2,...)$, $\{\delta_n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ ardıcıllıqlarının və ω ədədinin $D(\omega,\alpha_1,\beta,\gamma)$ və $D(\omega,\alpha_2,\beta,\gamma)$

$\left(|\omega|^2 < \gamma^2 + 1,\ \alpha_1 < \alpha_2 < 0\right)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri olması üçün kafi şərtlər aşağıdakılardır:

1) (15) asimptotik düsturu doğrudur, burada $\tilde{A}_j = -\dfrac{2\operatorname{Re}\omega}{\alpha_j b}$, $b = \dfrac{1}{\sin \pi a}$, α_j, a, $\tilde{B}_j$ –həqiqi ədədlərdir,

$$0 < a < 1,\quad \tilde{A}_1 < \tilde{A}_2,\quad \left\{\xi_k^j\right\} \in l_2;$$

2) $\gamma_k^{(1)}$ və $\gamma_k^{(2)}$ ədədləri teorem 13-ün 2) şərtindəki bərabərsizlikləri ödəyir;

3) (16) bərabərliyi ödənir, burada

$$d_j(\lambda) = -\pi\alpha_j b\left(\gamma_{-0}^{(j)} - \lambda\right)\left(\gamma_{+0}^{(j)} - \lambda\right)\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(j)} - \lambda}{k};$$

4) $b_n = d_j(\upsilon_n) - 2\operatorname{Re}\omega$ üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) $b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{b^2 + |\omega|^2}{b} + \dfrac{\chi_n}{n}$, $\{\chi_n\} \in l_2$;

b) $|b_n| \geq 2|\omega|$, burada $\{\upsilon_n\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ədədləri $d_1(\lambda) - d_2(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarıdır;

5) Əgər $|b_n| = 2|\omega|$ olarsa, onda $\delta_n = 0$, əks halda isə $\delta_n = \pm 1$ olar və lakin elə N natural ədədi var ki, $|n| > N$ olduqda $\delta_n = 1$ olur.

Qeyd: Teorem 13-dən göründüyü kimi 1), 3)-5) şərtləri həm də spektral verilənlər üçün zəruri şərtlərdir, lakin 2) şərti

$$2\operatorname{Re}\left[\omega\overline{y_1(0)}y_1(\pi)\right] - \gamma|y_1(\pi)|^2 + \beta|y_1(0)|^2 + \int_0^\pi p(x)\left[|y_1(x)|^2 + |y_2(x)|^2\right]dx \neq 0$$

bərabərsizliyi ödənildiyi halda zəruridir. Qeyd edək ki, bu teoremin isbatında qurulan $p(x)$ funksiyası həmin bərabərsizliyi ödəməyə bilər.

Sonda məsələnin qoyuluşuna, dəyərli məsləhətlərinə və səmimi diqqətinə görə elmi rəhbərim professor İ.M. Nəbiyevə öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiyada ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda Dirak operatoru üçün tərs spektral məsələnin həllindən bəhs edilmişdir.

İşdə aşağıdakı əsas elmi nəticələr alınmışdır:

1. Ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda Dirak operatorunun spektral xassələri öyrənilmişdir.
2. Sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin asimptotikası müəyyən edilmişdir.
3. Baxılan operatorların məxsusi ədədlərinin təkrarlanması araşdırılmış və növbələşməsi qaydaları göstərilmişdir.
4. Dirak sistemi üçün tərs məsələlər qoyulmuş və bu məsələlərin həlli üçün yeganəlik teoremləri isbat olunmuşdur.
5. Tərs məsələlərin həlli üçün alqoritmlər tərtib edilmişdir.
6. Tərs spektral məsələnin həlli üçün kafi şərtlər alınmışdır (müəyyən şərtlər daxilində bu şərtlər həm də zəruridir).

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Ferzullazadeh, A., Nabiev, I. On the spectrum of the Dirac operator with a spectral parametr in the boundary condition // 6th International İFS and Contemporary Mathematics Conference, – Mersin, Turkey: – 07-10 june, – 2019, – p. 69-69.

2. Fərzullazadə, A. Dirak tənliyinin həlli üçün göstəriliş // – Lənkəran: Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi Xəbərləri, Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, – 2019. № 2, – s. 52-58.

3. Fərzullazadə, A. Sərhəd şərtində spektral parametr olan Dirak operatorunun spektrinin asimptotikası haqqında // "İnformasiya, elm, texnologiya və universitet perspektivləri" mövzusunda doktorantların və gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi Konfransı, – Lənkəran, Azərbaycan: – 18 dekabr, – 2020, – s. 36-37.

4. Ferzullazadeh, A.G., Nabiev, I.M. Some properties of the spectrum of the Dirac operator with a spectral parameter in the

boundary condition // – Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, – 2020, 46 (2), – p. 189-196. (jurnal **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index) və **SCOPUS** bazalarına daxildir)

5. Fərzullazadə, A.Q. Dirak operatorunun məxsusi ədədlərinin təkrarlanması haqqında // – Bakı: Journal of Baku Engineering University, Mathematics and computer science, – 2020, 4 (2), – s. 111-119.

6. Ferzullazadeh, A.G. Criteria for the multiplicity of the eigenvalues of the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // International Electronic Scientific and Practical Journal "WayScience", – Dnipro, Ukrayna: – 4-5 february, – 2021, – p. 26-27.

7. Ferzullazadeh, A., Nabiev, I. Reconstruction of the characteristic function of the boundary value problem of the Dirac operator in the form of an infinite product // 4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications, –Istanbul, Turkey: – 26-29 may, – 2021, – p. 34.

8. Ferzullazadeh, A. An algorithm for reconstructing Dirac operator with the nonseparated boundary conditions // 1 st International symposium on recent advances in fundamental and applied sciences (ISFAS) – Erzurum, Turkey: – 10-12 september, – 2021, – p. 119.

9. Ferzullazadeh, A. Associated functions of the eigenfunction of the boundary value problem of the Dirac operator // XI International Youth Scientific-Practical Conference, Mathematical modeling of processes and system, – Ufa, Russia: – 10-12 november, – 2021, – p. 3-5.

10. Ferzullazadeh, A.G. Solution algorithm of the inverse spectral problem for Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // – Zagreb: Operators and Matrices, – 2022, 16 (1), – p. 113-122. (jurnal **Web of Science** (Science Citation Index-Expanded) və **SCOPUS** bazalarına daxildir)

11. Fərzullazadə, A.Q. Nəbiyev, İ.M. Dirak operatorunun məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşməsi // – Bakı: Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, – 2022. № 1, – s. 23-32.

12. Ferzullazadeh, A., Nabiev, I. Intermittency of the eigenvalues of the Dirac operator // XII International Youth Scientific-Practical Conference, Mathematical modeling of processes and system, – Ufa, Russia: – 17-19 november, – 2022, – p. 3-5.
13. Ferzullazadeh, A.G. The multiplicity of zeros of the characteristic function of the boundary value problem of the Dirac operator // XXXVII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties, – Sheki-Lankaran, Azerbaijan, Kyiv, Ukraine: – 23-25 november, – 2022, – p. 44-45.
14. Ferzullazadeh, A.G., Nabiev, I.M. A sufficient condition on the solution of the inverse problem for a Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // Spectral Theory of Operators and Related Issues, – Ufa, Russia: – 26-27 october, – 2023, – p. 36-37.

Dissertasiyanın müdafiəsi **<u>28 yanvar 2025</u>-**ci il tarixində saat **14^{00}-**da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat <u>24 dekabr 2024-cü il</u> tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 26.11.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcmi: 38932
Tiraj: 100