AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

BƏZİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARININ TƏTBİQİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Günay Qəfil qızı İsmayılova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2024

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi fizika tənlikləri" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Hamlet Fərman oğlu Quliyev

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Rəşad Sirac oğlu Məmmədov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Ağamalı Qulu oğlu Ağamalıyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
____________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi
____________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
____________ **Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Tərs məsələlər və korrekt olmayan məsələlərin həllinə olan maraq keçən əsrin ortalarından başlamışdır. Bu hər şeydən əvvəl belə məsələlərin elmin və praktikanın bir çox sahələrində - fizikada, geofizikada, seysmologiyada, tibbdə, biologiyada, tomoqrafiyada, ekologiyada və s. sahələrdə meydana gəlməsi ilə bağlıdır. Bundan əlavə riyaziyyatın öz daxili tələbatı ilə əlaqədar olaraq çoxlu sayda belə məsələlər diferensial tənliklər, riyazi fizika tənlikləri, hesablama riyaziyyatı və s. sahələrdə də meydana gəlir və öyrənilir. Bunların arasında xüsusi törəməli tənliklər üçün tərs məsələlər mühüm yer tutur. Məlumdur ki, tərs və ya korrekt olmayan məsələni müəyyən düz korrekt olan məsələyə tərs məsələ olaraq ifadə etmək mümkündür. Ümumiyyətlə, düz məsələlər deyilən zaman prosesin, hadisənin və s. modelləşdirilmə məsələləri başa düşülür. Bu səbəbdən də riyazi fizikada düz məsələlərdə fiziki hadisələri göstərən funksiyaları tapırlar. Düz məsələlərin həll edilməsi məqsədilə prosesin öyrənilmiş olduğu oblast, ona uyğun olan tənliyin əmsalları həmçinin sağ tərəfi eyni zamanda sərhəd şərtləri və başlanğıc şərti verilir. Lakin əksər vaxtlarda tənliyin sağ tərəfləri (xarici qüvvələr, mənbə və s.), tənliyin əmsalları (mühitin xassələri), başlanğıc şərtləri (prosesin başlanğıc vəziyyəti), sərhəd şərti məlum olmur. Onda elə tərs məsələlər yaranır ki, düz məsələlərin həlli barədə informasiyalara əsasən bu məlum olmayan kəmiyyətləri təyin etmək lazım gəlir. Yuxarıda dediklərimizi nəzərə alsaq, tərs məsələnin həlli zamanı sərhəd məsələsinin həll edilməsilə bərabər düz məsələdə iştirak edən bəzi naməlum funksiyaları da tapmaq tələbatı meydana çıxır.

Adətən tərs məsələlər qeyri-korrektdir (ya məsələnin həlli yeganə olmur, ya da məsələnin həlli verilənlərdən kəsilməz asılı olmur) və belə korrekt olmayan məsələləri həll etmək üçün müxtəlif üsullardan istifadə olunur. Tixonovun requlyarlaşdırma üsulu, Lionsun kvazidönmə üsulu, Lavrentyevin kvazihəll üsulu və s. XXI əsrin əvvəllərindən başlayaraq xüsusi törəməli tənliklərin sərhəd və başlanğıc funksiyalarının, sağ tərəflərinin və kiçik həddin əmsalının tapılması barədə tərs məsələlər məhz optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmiş olur, alınmış məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarının köməyi ilə öyrənilir. Bu zaman riyazi fizika tənliklərinin axtarırmış sağ tərəfi, başlanğıc və eyni zamanda sərhəd funksiyalarının, əmsalları idarəedici roluna malikdirlər o cümlədən əlavə şərtlərin köməyi ilə qurulan uyğunsuzluq funksionalı yaxud məqsəd funksionalı və yaxud dəyər meyarı olaraq götürülür. Əgər məqsəd funksionalının minimumu sıfra bərabər olarsa, onda tərs məsələdə əlavə şərt və yaxud şərtlər ödənilir. Tərs məsələlərə bu cür yanaşma üsulu onların variasional yaxud optimallaşdırma həll metodu adlanır. Qeyd edək ki, bu üsul müxtəlif məsələlərə geniş tətbiq olunur.

Parabolik tənliklər üçün tərs məsələlərin variasional qoyuluşları K.R.Ayda-zadə, V.M.Abdullayev, O.M.Alifanov, E.A.Artyuxin, S.V.Rumyançev, A.D.İskəndərov, R.K.Tağıyev, R.A.Qasumov, İ.K.Şakenovun işlərində tədqiq olunmuşdur. Elliptik tənliklər üçün tərs məsələlərin variasional qoyuluşları baxılan tənliklərdə kiçik həddin əmsalının axtarılması məsələsi üçün A.D.İskəndərov, R.A.Həmidovun, tənliyin baş hissəsində əmsalın axtarılması məsələsinə R.K.Tağıyev, R.S.Qasımovanın, Helmhols tənliyində kiçik həddin əmsalının axtarılması məsələsi üçün isə A.B.Rəhimov, A.Litman, G.Ferrandın işlərində öyrənilmişdir. Hiperbolik tənliklər üçün kiçik həddin əmsalının axtarılması haqqında tərs məsələnin Hilbert fəzasında operator tənliyə gətirilməsi, həmin operator tənliyin köməyi ilə kvadratik funksionalın qurulması, onun minimallaşdırılması məsələsi S.K.Kabanixinin, həmin tənliklər üçün variasional qoyuluşlar qeyri-lokal sərhəd şərtli dalğa tənliyinin sağ tərəfinin axtarılması məsələsi üçün H.F.Quliyev, Y.S.Qasımov, H.T.Tağıyevin, tənliyin baş əmsalının axtarılması məsələsi üçün H.F.Quliyev, V.N.Nəsibzadənin, simin rəqsləri tənliyi üçün akustika məsələsində əmsalın axtarılması H.F.Quliyev, V.N.Nəsibzadənin, bir qeyri-xətti dalğa tənliyi üçün qarışıq məsələdə əmsalın tapılması Z.R.Səfərovanın işlərində tədqiq olumuşdur.

Dissertasiya işində ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərində tənliklərin sağ tərəflərinin, başlanğıc funksiyaların, sərhəd funksiyaların, əmsalların axtarılması haqqında bəzi tərs məsələlərin, ikitərtibli elliptik tənlik üçün sərhəd funksiyasının axtarılması haqqında tərs məsələnin variasional qoyuluşları verilmiş və alınan məsələlər optimal idarəetmə məsələləri kimi tədqiq olunmuşdur.

K.R.Ayda-zadə, Y.R.Əşrəfova, K.R.Ayda-zadə, S.Z.Quliyev, J.-L.Arman, K.T.Əhmədov, S.S.Axiyev, A.Q.Butkovski, F.P.Vasilyev, K.Q.Həsənov, A.İ.Eqorov, Y.V.Yeqorov, A.D.İskəndərov, R.K.Tağıyev, S.İ.Kabanixin, K.T.İskakov, S.İ.Kabanixin, A.L.Karçevski, V.Komkov, H.F.Quliyev, H.T.Tağıyev, T.M.Hüseynova, H.F.Quliyev, G.Q.İsmayılova, J.L.Lions, K.A.Lurye, K.B.Mənsimov, M.C.Mərdanov, T.K.Məlikov, V.İ.Plotnikov, M.A.Sadıqov, C.C.Məmmədova, S.Y.Serovayski, T.K.Sirazətdinov, R.K.Tağıyev, R.S.Qasımova, Y.A.Şərifov, F.T.İbiyev, Ş.Ş.Yusubov, M.A.Yaqubov, J.Sokolovski, M.B.Suryanarayana, T.Zolezzi xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün optimal idarəetmənin müxtəlif məsələləri ilə məşğul olmuşlar.

Təqdim olunan dissertasiya işində ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması və ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini barədə tərs məsələlər məhz optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmiş və alınmış məsələlər optimal idarəetmə üsullarının köməyi ilə tədqiq olunmuşdur.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiyanın tədqiqat obyekti ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması məsələləri, həmçinin tərs məsələlər və optimal idarəetmə məsələləri o cümlədən ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini haqqında tərs məsələlər və optimal idarəetmənin məsələləridir.

Dissertasiya işinin tədqiqatının predmeti isə hiperbolik və elliptik tənliklərin sərhəd və başlanğıc funksiyalarının tapılması, ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini barədə tərs məsələnin optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilməsinə əsaslanmış yanaşmalar o cümlədən optimal idarəetmə məsələlərin həll edilməsi üsullarından ibarətdir.

Tədqiqat işinin məqsədi və vəzifələri. Ümumiyyətlə ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması və ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini haqqında tərs məsələlərin müvafiq optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilməsi, alınmış məsələlərə optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarını tətbiq edilməsi, optimallıq şərtlərini çıxarılması.

Tədqiqat üsulları. Dissertasiyada optimal idarəetmənin riyazi nəzəriyyəsi, optimallaşdırma, riyazi fizika və funksional analiz üsullarından istifadə edilir.

Müdafiəyə çıxarılmış əsas müddəalar.

- ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması məsələlərinin optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilməsi;
- ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini məsələlərinin optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilməsi;
- optimal idarəetmə nəzəriyyəsi metodlarının tətbiqi ilə optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiq edilməsi;
- funksionalların diferensiallarının hesablanması;
- optimallıq şərtinin çıxarılması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmişdir;
- ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmişdir;
- alınmış optimal idarəetmə məsələləri araşdırılmışdır;
- funksionalların diferensiallanan olması göstərilmiş və onların qradientləri üçün ifadələr tapılmışdır;
- Variasional bərabərsizlik tipli optimallıq şərtləri əldə edilmişdir.

Tədqiqat işinin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Tətdqiqat işində alınmış nəticələr əsasən nəzəri xarakterlidir. İşdə istifadə olunmuş üsullar digər xüsusi törəməli tənliklər üçün də tətbiq edilə bilər. İşin praktik əhəmiyyəti odur ki, alınmış nəticələr rəqs, dalğa və stasionar proseslərdə müxtəlif tərs və korrekt olmayan məsələlərin təqribi həll edilməsi üçün istifadə edilə bilər.

Aprobasiya və tətbiqi. Dissertasiya işinin nəticələri aşağıdakı elmi seminarlarda və konfranslarda məruzə edilmişdir: Sumqayıt Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi" (rəhbər prof. Qurbanov N.T.) və "Diferensial tənliklər və optimallaşdırma" (rəhbər prof. Feyziyev F.G.) kafedralarının seminarlarında, Bakı Dövlət Universitetinin "İdarəetmə nəzəriyyəsinin riyazi üsulları" (rəhbər prof. Quliyev H.F.) kafedrasının seminarlarında, eləcədə "Control and Optimization with Industrial Applications" adlı V beynəlxalq konfransda (Bakı 2015), "Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları" adlı III Respublika Elmi konfransında (Sumqayıt 2016), Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" adlı Beynəlxalq Elmi konfransında (Sumqayıt 2017), AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60 illik yubileyinə həsr olunmuş "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" adlı Beynəlxalq konfransında (Bakı 2019), "Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi" adlı Respublika Elmi konfransında (Sumqayıt 2020), Sumqayıt Dövlət Universitetinin 60 illiyinə həsr olunmuş "Universitet elminin və təhsilinin müasir problemləri" adlı Respublika Elmi konfransında (Sumqayıt 2022), "Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi" adlı II Respublika Elmi konfransında (Bakı 2022), "III İnternational Istanbul Current Scientific Research Congress" adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Türkiyə 2023).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi fizika tənlikləri" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. İşdə alınan bütün nəticələr şəxsən müəllifə məxsusdur.

Nəşrlər. İddiaçının dissertasiya mövzusu üzrə 11 məqalə və 8 tezisi çap olunmuşdur.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, mündəricat, iki fəsil, nəticə və istinad olunmuş 108 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi 226824 işarədir (titul səhifəsi-352 işarə, mündəricat - 5852 işarə, giriş - 47667 işarə, birinci fəsil - 98000 işarə, ikinci fəsil - 74000 işarə, nəticə -953).

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və istifadə olunmuş ədəbiyyat sahəsindən ibarətdir.

Dissertasiya işinin I fəsli altı paraqrafdan ibarət olub, ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması məsələlərinin optimallaşdırma üsulları ilə tədqiqinə həsr olunub.

1.1-də simin rəqsləri tənliyi üçün tərs sərhəd məsələsi və onun optimal idarəetmə üsulu ilə tədqiqi məsələsi öyrənilir.

1.2-də ikitərtibli xətti hiperbolik tənlik üçün sərhəd məsələsində başlanğıc funksiyanın təyini haqqında məsələ tədqiq olunur.

$Q=\Omega\times(0,T)$ silindrində

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Lu=f(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{0.1}$$

$$u(x,0)=v(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ x\in\Omega, \tag{0.2}$$

$$u\big|_s=0, \tag{0.3}$$

sərhəd məsələsinə baxılır, burada $\Omega\subset R^n-$ hamar Γ sərhədli məhdud oblast, $S=\Gamma\times(0,T)-Q$ silindrinin yan səthi, $f\in L_2(Q)$, $u_1\in L_2(\Omega)$ məlum funksiyalar, $v(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ isə naməlum funksiya,

$$Lu\equiv-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_0(x,t)u,$$

belə ki,

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}),\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in C(\overline{Q}),\ a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t),$$
$$(x,t) \in Q,\ i,j = 1,\ldots,n,\ a_0 \in C(\overline{Q})$$

və

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\quad \mu = const > 0$$

şərtləri ödənilir.

$v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ funksiyası verilmişsə, (0.1)-(0.3) məsələsi Q silindrində düz məsələsi olur. Əgər $v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ naməlum funksiya olarsa, onda $v(x)$ funksiyasını təyin etmək üçün

$$u(x,T) = \chi(x),\qquad x \in \Omega, \tag{0.4}$$

əlavə informasiyasından istifadə edilir, burada $\chi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ məlum funksiyadır. Onda (0.1)-(0.4) məsələsi (0.1)-(0.3) məsələsinə uyğun tərs məsələ olur.

(0.1)-(0.4) məsələsi optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir: (0.1)-(0.3) məsələsinin həlləri üzrə

$$J_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}[u(x,T;v) - \chi(x)]^2\,dx \tag{0.5}$$

uyğunsuzluq funksionalını minimallaşdırmalı, burada $v(x)$ funksiyası idarəedici adlandırılır, $u(x,t;v)$ funksiyası $v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ funksiyasına uyğun (0.1)-(0.3) məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)-$ dən olan həllidir.

Qeyd edək ki, (0.1)-(0.3), (0.5) məsələsi, ümumiyyətlə, qeyri-korrekt məsələdir.

Əgər (0.1)-(0.3), (0.5) məsələsində $\min\limits_{v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} J_0(v) = 0$ olarsa, onda (0.4) əlavə şərti ödənilir.

İşdə əvvəlcə $\inf\limits_{v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} J_0(v) = 0$ olması göstərilir. Sonra (0.1)-(0.3), (0.5) məsələsi əvəzinə aşağıdakı məsələyə baxılır:

$V_m \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ qabarıq qapalı çoxluğunda (0.1)-(0.3) şərti daxilində

$$J_\alpha(v) = J_0(v) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{0.6}$$

funksionalını minimallaşdırmalı, burada $\alpha > 0$ verilmiş ədəd, V_m isə mümkün idarəedicilər sinfi adlandırılır.

Teorem 0.1. Tutaq ki, verilmiş (0.1)-(0.3), (0.6) məsələsi üçün $f \in L_2(Q)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $a_{ij} \in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in C(\overline{Q})$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $i, j = 1,\ldots,n$, $a_0 \in C(\overline{Q})$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \mu \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\mu = const > 0$ şərtləri ödənilir. Onda (0.6) funksionalı $V_m -$ də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in V_m$ nöqtəsində $\delta v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ artımlı diferensialı

$$< J'_\alpha(v), \delta v >= \int\limits_\Omega \left\{ \left[-\frac{\partial \psi(x,0;v)}{\partial t} + \alpha v(x) \right] \delta v(x) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial x_i} \right\} dx$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Teorem 0.2. Tutaq ki, verilmiş (0.1)-(0.3), (0.6) məsələsi üçün teorem 0.1-in şərtləri ödənilir. Onda bu məsələdə $v_* = v_*(x) \in V_m$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt

$$\int\limits_\Omega \left[-\frac{\partial \psi(x,0;v_*)}{\partial t} + \alpha v_*(x) \right] (v(x) - v_*(x)) dx +$$
$$+ \alpha \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_*}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial v_*(x)}{\partial x_i} \right) dx \ge 0 \qquad \forall v \in V_m$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $\psi(x,t;v_*)$ funksiyası $v = v_*(x)$ olduqda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + L\psi = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$\psi(x,T;v) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x,T;v)}{\partial t} = -[u(x,T;v) - \chi(x)], \ x \in \Omega,$$

$$\delta\psi\big|_s = 0$$

qoşma məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)-$dən olan ümumiləşmiş həllidir.

1.3-də ikiölçülü dalğa tənliyində sərhəd funksiyalarının təyini və onun optimal idarəetmə üsulu ilə araşdırılması məsələsinə baxılır.

$$(u(x_1,x_2,t), v_1(x_2,t), v_2(x_1,t)) \in W_2^1(Q) \times$$
$$\times L_2((0,l_2)\times(0,T)) \times L_2((0,l_1)\times(0,T))$$

funksiyaları aşağıdakı münasibətlərindən təyin olunur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (x_1,x_2,t) \in Q, \tag{0.7}$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2), \ (x_1,x_2) \in \Omega, \tag{0.8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Omega \tag{0.9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=l_1} = v_1(x_2,t), \ (x_2,t) \in (0,l_2)\times(0,T), \tag{0.10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=l_2} = v_2(x_1,t), \ (x_1,t) \in (0,l_1)\times(0,T), \tag{0.11}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x_2,t) = a_1(x_2,t), \ (x_2,t) \in (0,l_2)\times(0,T), \\ &u(x_1,0,t) = a_2(x_1,t), \ (x_1,t) \in (0,l_1)\times(0,T). \end{aligned} \tag{0.12}$$

Burada $Q = \Omega \times (0,T)-$ paralelepiped, $\Omega = \{0 < x_1 < l_1, \ 0 < x_2 < l_2\}-$ düzbucaqlı, $l_1 > 0, \ l_2 > 0, \ T > 0-$verilmiş ədədlər, $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $a_1(x_2,t) \in W_2^1((0,l_2)\times(0,T))$, $a_2(x_1,t) \in W_2^1((0,l_1)\times(0,T))$ verilmiş funksiyalardır.

Bu məsələ aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir: (0.7)-(0.11) şərti daxilində

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^{l_2}\left[u(0,x_2,t;v)-a_1(x_2,t)\right]^2 dx_2dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^{l_1}\left[u(x_1,0,t;v)-a_2(x_1,t)\right]^2 dx_1dt, \qquad (0.13)$$

funksionalının minimumunun tapılması tələb olunur, burada $u(x_1,x_2,t;v)$ funksiyası $v=(v_1(x_2,t),v_2(x_1,t))$ vektor funksiyasına uyğun (0.7)-(0.12) məsələsinin həllidir.

Qeyd edək ki, (0.7)-(0.11), (0.13) məsələsi, ümumiyyətlə, qeyri-korrekt məsələdir.

Fərz edək ki, hər bir

$v=(v_1(x_2,t),v_2(x_1,t))\in L_2((0,l_2)\times(0,T))\times L_2((0,l_1)\times(0,T))$

idarəedicisinə uyğun (0.7)-(0.11) məsələsinin $W_2^1(Q)$-dən olan yeganə ümumiləşmiş həlli var.

Əgər (0.13) funksionalına sıfır qiymətini verən idarəedici tapılarsa, onda (0.12) əlavə informasiyası ödənilir.

Teorem 0.3. Tutaq ki, verilmiş (0.7)-(0.11), (0.13) məsələsi üçün $u_0\in W_2^1(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $a_1(x_2,t)\in W_2^1((0,l_2)\times(0,T))$, $a_2(x_1,t)\in W_2^1((0,l_1)\times(0,T))$ şərtləri ödənilir. Onda (0.7)-(0.11), (0.13) optimal idarəetmə məsələsində

$$\inf J(v)=0, v=(v_1,v_2)\in L_2((0,l_2)\times(0,T))\times L_2((0,l_1)\times(0,T)). \qquad (0.14)$$

Sonra gələcəkdə alınacaq optimallıq şərtinin cırlaşan olmaması üçün (0.7)-(0.11) məsələsinin həlli ilə birlikdə idarəedicilərin özləri və t-yə görə birinci tərtib törəmələri $L_2((0,l_2)\times(0,T))\times L_2((0,l_1)\times(0,T))$ fəzasından olan V_m qapalı qabarıq çoxluğunda

$$J_\beta(v)=J(v)+\frac{\beta}{2}\left[\int_0^T\int_0^{l_2}v_1^2dx_2dt+\int_0^T\int_0^{l_1}v_2^2dx_1dt\right], \qquad (0.15)$$

funksionalının minimallaşdırılması məsələsinə baxılır, burada $\beta>0$ verilmiş ədəddir. Bu məsələni (0.7)-(0.11), (0.15) məsələsi adlandıracağıq. Bu məsələdə yeganə optimal idarəedici var.

(0.7)-(0.11), (0.15) məsələsinə qoşma olan məsələ daxil edilir:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2},\quad (x_1,x_2,t)\in Q, \tag{0.16}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0, \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T}=0,\quad (x_1,x_2)\in\Omega, \tag{0.17}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}=-[u(0,x_2,t;v)-a_1(x_2,t)],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=l_1}=0,\ (x_2,t)\in(0,l_2)\times(0,T), \tag{0.18}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0}=-[u(x_1,0,t;v)-a_2(x_1,t)],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=l_2}=0,\ (x_1,t)\in(0,l_1)\times(0,T). \tag{0.19}$$

Qeyd edək ki, (0.16)-(0.19) qoşma məsələsinin həlli olan $\psi(x_1,x_2,t;v)$ funksiyası $W_2^1(Q)-$ yə daxildir.

Teorem 0.4. Tutaq ki, verilmiş (0.7)-(0.11), (0.15) məsələsi üçün $u_0\in W_2^1(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $a_1(x_2,t)\in W_2^1((0,l_2)\times(0,T))$, $a_2(x_1,t)\in W_2^1((0,l_1)\times(0,T))$ şərtləri ödənilir. Onda V_m-də (0.15) funksionalı Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v\in V_m$ nöqtəsində diferensialı

$$\left\langle J'_\beta(v),\delta v\right\rangle_{L_2((0,l_2)\times(0,T))\times L_2((0,l_1)\times(0,T))}=$$

$$=\int_0^T\int_0^{l_2}[\psi(l_1,x_2,t;v)+\beta v_1(x_2,t)]\delta v_1(x_2,t)dx_2dt+$$

$$+\int_0^T\int_0^{l_1}[\psi(x_1,l_2,t;v)+\beta v_2(x_1,t)]\delta v_2(x_1,t)dx_1dt,$$

düsturu ilə təyin olunur.

Teorem 0.5. Tutaq ki, teorem 0.4-ün şərtləri ödənilir. Onda (0.7)-(0.11), (0.15) məsələsində $v_*=(v_{1*},v_{2*})\in V_m$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $v=\left(v_1\left(x_2,t\right),v_2\left(x_1,t\right)\right)\in V_m$ üçün

$$\int_0^T\int_0^{l_2}\left[\psi_{1*}\left(l_1,x_2,t\right)+\beta v_{1*}\left(x_2,t\right)\right]\left(v_1\left(x_2,t\right)-v_{1*}\left(x_2,t\right)\right)dx_2dt+$$

$$+\int_0^T\int_0^{l_1}\left[\psi_{2*}\left(x_1,l_2,t\right)+\beta v_{2*}\left(x_1,t\right)\right]\left(v_2\left(x_1,t\right)-v_{2*}\left(x_1,t\right)\right)dx_1dt\geq 0,$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $\psi_*\left(x_1,x_2,t\right)=\psi\left(x_1,x_2,t;v_*\right)$ (0.16)-(0.19) qoşma məsələsinin $v=\left(v_{1*}\left(x_2,t\right),v_{2*}\left(x_1,t\right)\right)$-ə uyğun həllidir.

1.4-də dalğa tənliyi üçün Koşi məsələsində başlanğıc funksiyasının tapılmasının tərs məsələsinə baxılır.

Bu məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları ilə tədqiq olunur.

1.5-də termoakustikanın bir tərs məsələsinin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi və onun tədqiqinə baxılır.

1.6-da elliptik tənliklər üçün davam məsələsinin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi və öyrənilməsi tədqiq olunur.

$\Omega=\left\{(x,y)\in R^{n+1}:x\in(0,l),\ y\in D\subset R^n\right\}$ silindrində

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)-a(y)u=f(x,y),(x,y)\in\Omega,\qquad(0.20)$$

$$u(0,y)=\varphi(y),\ \ \frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0\quad y\in D,\qquad(0.21)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v_A}\right|_{\partial D}=0,\quad x\in(0,l)\qquad(0.22)$$

başlanğıc-sərhəd məsələsinə baxılır. Burada $D\subset R^n-$ kifayət qədər hamar ∂D sərhədli məhdud oblast, $l>0-$ verilmiş ədəd, $f\in L_2(\Omega),\ \varphi\in L_2(D)-$ verilmiş funksiyalar, $a_{ij}(y),\ i,j=\overline{1,n}-$ əmsalları və $a(y)$ əmsalı aşağıdakı xassələri ödəyən verilmiş funksiyalardır:

$a_{ij}\in C^1\left(\overline{D}\right),\ a\in C\left(\overline{D}\right),\ a_{ij}(y)=a_{ji}(y),\ i,j=\overline{1,n},\ a(y)\geq 0,\ y\in\overline{D}$ və ixtiyari $\xi \in R^n$ və bütün $y \in \overline{D},\ \alpha = const > 0$ üçün

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 .$$

(0.20)-(0.22) məsələsi davam məsələsi olub, qeyri-korrekt məsələdir. Yəni, məsələnin həlli verilənlərdən kəsilməz asılı olmur. Bu məsələyə tərs olan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) - a(y)u = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \qquad (0.23)$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial u(l,y)}{\partial x} = v(y),\ y \in D, \qquad (0.24)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{\partial D} = 0, \quad x \in (0,l) \qquad (0.25)$$

düz məsələsi daxil edilir.

Tərs məsələ

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad y \in D \qquad (0.26)$$

əlavə informasiyasından və (0.23)-(0.25) münasibətlərindən təyin olunan $v(y)$ funksiyasının tapılmasından ibarətdir.

$v(y)$ funksiyasının tapılması haqqında tərs məsələ aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir:
$V_m = \{v(y): v \in L_2(D),\ a \leq v(y) \leq b\ \ s.h.y.D\}$ sinfindən olan elə $v(y)$ funksiyası tapmalı ki, o (0.23)-(0.25) məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J_0(v) = \frac{1}{2}\int_D [u(0,y;v) - \varphi(y)]^2\,dy, \qquad (0.27)$$

uyğunsuzluq funksionalına minimum versin. Burada $u(x,y;v)$ funksiyası (0.23)-(0.25) məsələsinin $v = v(y)$ olduqda həlli, $a,b -$ verilmiş ədədlərdir, $a < b$.

Məlumdur ki, hər bir $v(y)$ funksiyası üçün verilmiş şərtlər daxilində (0.23)-(0.25) məsələsinin $W_2^1(\Omega)$ fəzasında yeganə ümumiləşmiş həlli var.

$v(y)$ funksiyasını idarəedici, $V_m -$ i isə mümkün idarəedicilər sinfi adlandıracağıq. Bu məsələni (0.23)-(0.25), (0.27) məsələsi adlandıraq.

Gələcəkdə optimallıq üçün alınmış zəruri və kafi şərtin cırlaşmaması üçün (0.27) funksionalı requlyarlaşdırılır:

$$J_\beta(v) = J_0(v) + \frac{\beta}{2}\int_D |v(y)|^2 dy, \qquad (0.28)$$

burada $\beta > 0 -$ verilmiş ədəddir. V_m sinfində (0.23)-(0.25) şərtləri daxilində (0.28) funksionalının minimumunun tapılması məsələsinə baxılır. (0.23)-(0.25) məsələsi xətti, (0.28) funksionalı isə $L_2(D) -$ də kvadratik və ciddi qabarıq olduğundan V_m sinfində (0.23)-(0.25), (0.28) məsələsinin yeganə optimal idarəedicisi var.

(0.23)-(0.25), (0.28) məsələsinə qoşma olan

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\right) - a(y)\psi = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad (0.29)$$

$$\frac{\partial \psi(0,y)}{\partial x} = -[u(0,y;v) - \varphi(y)], \quad \frac{\partial \psi(l,y)}{\partial x} = 0, \quad y \in D, \qquad (0.30)$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A}\right|_{\partial D} = 0, \quad x \in (0,l), \qquad (0.31)$$

məsələsi daxil edilir və aşağıdakı teoremlər isbat olunur.

Teorem 0.6. Tutaq ki, (0.23)-(0.25), (0.28) məsələsində verilənlər üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənilir. Onda (0.28) funksionalı $V_m -$ də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in V_m$ nöqtəsindəki $\delta v \in L_2(D)$ artımlı diferensialı

$$\left\langle J'_\beta(v), \delta v \right\rangle = \int_D [\psi(l,y) + \beta v(y)]\delta v(y) dy$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Teorem 0.7. Tutaq ki, teorem 0.6-nın şərtləri ödənilir. Onda (0.23)-(0.25), (0.28) məsələsində $v_* \in V_m$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $v = v(y) \in V_m$ üçün

$$\int_D [\psi_*(l,y) + \beta v_*(y)](v(y) - v_*(y))dy \geq 0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $\psi_*(x,y)$ funksiyası $v = v_*(y)$ olduqda (0.29)-(0.31) qoşma məsələsinin həllidir.

Dörd paraqrafdan ibarət olan ikinci fəsildə ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddin əmsalının tapılması məsələsinin optimallaşdırma üsulları ilə tədqiqi məsələlərinə baxılır.

2.1-də qeyri-lokal sərhəd şərtli simin rəqsləri tənliyinin sağ tərəfinin təyini məsələsi tədqiq olunur.

Bu məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilərək tədqiq olunur.

2.2-də simin rəqsləri tənliyində

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{n} v_i(t) h_i(x) u = f(x,t), (x,t) \in Q = (0,\ell) \times (0,T), \quad (0.32)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \ 0 \le x \le \ell, \quad (0.33)$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \quad (0.34)$$

$$u(x_i,t) = g_i(t), \ 0 \le t \le T, \ i = 1,...,n \quad (0.35)$$

münasibətlərindən $(u(x,t), v(t)) \in W_2^1(Q) \times (L_\infty(0,T))^n$ cütünün tapılması məsələsinə baxaq, burada $\ell > 0, \ T > 0$–verilmiş ədədlər, $f \in L_2(Q), u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell), \quad u_1 \in L_2(0,\ell), \ g_i \in L_2(0,T), \ h_i \in L_\infty(0,\ell)$, $i = 1,\dots,n$ – verilmiş funksiyalar, $x_i \in (0,\ell)$, $i = 1,\dots,n$ - verilmiş müxtəlif nöqtələrdir; $v(t) = (v_1(t),..., v_n(t))$ - vektor funksiyadır.

$v(t)$ vektor-funksiya verildikdə (0.32)-(0.34) məsələsi Q oblastında düz məsələ olur. (0.32)-(0.35) məsələsi isə (0.32)-(0.34) məsələsinə uyğun tərs məsələ adlanır.

(0.32)-(0.34) məsələsi qeyri-korrekt məsələdir, yəni bu məsələnin həlli verilənlərdən kəsilməz asılı olmur.

(0.32)-(0.35) tərs məsələsini aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirək:

$$V_m = \{v(t) \in (L_2(0,T))^n, v(t) = (v_1(t),\dots,v_n(t)) : \alpha_i \le v_i(t) \le \beta_i$$

$i=1,\ldots,n,(0,T)-$ də sanki hər yerdə} sinfindən elə $v(t)$ vektor funksiyasını tapmalı ki, o

$$J_0(v)=\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n\left[u(x_i,t;v)-g_i(t)\right]^2dt \tag{0.36}$$

uyğunsuzluq funksionalına (0.32)-(0.34) məhdudiyyətləri daxilində minimum qiymət versin, burada $u(x,t;v)$ funksiyası (0.32)-(0.34) məsələsinin $v=v(t)$ üçün həllidir, $\alpha_i,\beta_i,\alpha_i<\beta_i$, $i=1,\ldots,n-$verilmiş ədədlərdir. $v=v(t)$ vektor funksiyasını idarəedici, V_m sinfi mümkün idarəedicilər sinfi adlandırılır. Qeyd edək ki, əgər $\min\limits_{v\in V_m} J_0(v)=0$ olarsa, onda (0.35) əlavə şərti ödənir.

(0.32)-(0.34), (0.36) məsələsini requlyarlaşdıraq: elə $v(t)\in V_m$ idarəedicisini tapmalı ki, o

$$J_\beta(v)=\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n\left[u(x_i,t;v)-g_i(t)\right]^2dt+\frac{\beta}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n\left|v_i(t)-\omega_i(t)\right|^2dt \tag{0.37}$$

funksionalına minimum versin, burada $\beta>0-$ verilmiş ədəd, $\omega(t)=(\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t))\in(L_2(0,T))^n-$ verilmiş vektor-funksiyadır. Bu məsələni (0.32)-(0.34), (0.37) məsələsi adlandıracağıq.

Teorem 0.8. Tutaq ki, (0.32)-(0.34), (0.37) məsələsinin verilənləri $f\in L_2(Q)$, $u_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, $u_1\in L_2(0,l)$, $g_i\in L_2(0,T)$, $h_i\in L_\infty(0,l)$, $i=1,\ldots,n$, $x_i\in(0,l)$ şərtlərini ödəyir. Onda $(L_2(0,T))^n$ fəzasının elə G sıx alt çoxluğu var ki, ixtiyari $\omega\in G$ üçün $\beta>0$ olduqda (0.32)-(0.34), (0.37) optimal idarəetmə məsələsinin yeganə həlli var.

Tutaq ki, $\psi=\psi(x,t;v)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\sum_{i=1}^n v_i(t)\cdot h_i(x)\psi=-$$

$$-\sum_{i=1}^n\left[u(x_i,t;v)-g_i(t)\right]\delta(x-x_i),\ (x,t)\in Q, \tag{0.38}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T}=0,\quad 0\le x\le l,$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\ \ 0\le t\le T, \qquad (0.39)$$

qoşma sərhəd məsələsinin həllidir.

Teorem 0.9. Tutaq ki, teorem 0.8-in şərtləri ödənilir. Onda (0.37) funksionalı V_m – də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v\in V_m$ nöqtəsində δv artımlı diferensialı

$$\left\langle J'_\beta(v),\delta v\right\rangle=\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(\int_0^l u(x,t)\psi(x,t)h_i(x)dx\right)\delta v_i(t)dt+$$

$$+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(v_i(t)-w_i(t)\right)\delta v_i(t)dt$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Teorem 0.10. Tutaq ki, teorem 0.9-un şərtləri ödənir. Onda $v_*(t)=\left(v_1^*(t),\ldots,v_n^*(t)\right)\in V_m$ idarəedicisinin (0.32)-(0.34), (0.37) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n\left[\int_0^l u_*(x,t)\psi_*(x,t)h_i(x)dx+\right.$$

$$\left.+\beta\left(v_i^*(t)-\omega_i(t)\right)\right]\cdot\left(v_i(t)-v_i^*(t)\right)dt\ge 0\qquad \forall v\in V_m$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $u_*(x,t)=u(x,t;v_*)$, $\psi_*(x,t)=\psi(x,t;v_*)$ funksiyaları uyğun olaraq (0.32)-(0.34) və (0.38), (0.39) məsələlərinin $v(t)=v_*(t)$ üçün həlləridir.

2.3-də ikitərtibli çoxölçülü hiperbolik tənliyin kiçik həddinin əmsalının təyini haqqında məsələ araşdırılır.

$Q=\Omega\times(0,T)$ silindrində $\left(u(x,t),v(x)\right)\in W_2^1(Q)\times L_\infty(\Omega)$ funksiyalar cütünün

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+v(x)u=f(x,t),\quad (x,t)\in Q, \qquad (0.\ 40)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\quad x\in\Omega, \qquad (0.41)$$

$$u\big|_S = 0, \tag{0.42}$$

$$\int_0^T K(x,t)u(x,t)dt = \chi(x), \quad x \in \Omega \tag{0.43}$$

sistemindən təyin edilməsi məsələsinə baxılır. Burada $\Omega - R^n -$ də hamar Γ sərhədli məhdud oblastdır, $S = \Gamma \times (0,T) - Q$ silindrinin yan səthidir, $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $K(x,t) \in L_\infty(Q)$, $\chi(x) \in L_2(\Omega)$, $a_{ij}(x,t) \in L_\infty(Q)$, $i, j = \overline{1,n}$ – verilmiş funksiyalardır və $Q -$ də s.h.y. $\forall \xi \in R^n$ üçün $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2$, $\alpha = const > 0$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $i, j = \overline{1,n}$, $\left|\dfrac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\right| \leq M$, $i, j = \overline{1,n}$ şərtləri ödənilir.

Verilmiş $v(x) \in L_\infty(\Omega)$ funksiyası üçün (0.40)-(0.42) məsələsi düz məsələdir. (0.40)-(0.42) məsələsi qeyri-korrekt məsələdir, yəni məsələnin həlli verilənlərdən kəsilməz asılı olmur.

(0.40)-(0.43) tərs məsələsini aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətiririk:
$V_m = \{v(x) : v(x) \in L_2(\Omega),\ \alpha \leq v(x) \leq \beta\ \ \Omega - da\ \ s.h.y.\ \}$ sinfindən elə $v(x)$ funksiyasını tapmalı ki, o

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^T K(x,t)u(x,t;v)dt - \chi(x) \right)^2 dx, \tag{0.44}$$

uyğunsuzluq funksionalına minimum qiymət versin. Burada $u(x,t;v)$ funksiyası $v(x)$ funksiyasına uyğun (0.40)-(0.42) məsələsinin həllidir.

$v(x)$ funksiyasını idarəedici V_m çoxluğunu isə mümkün idarəedicilər sinfi adlandırırıq. Əgər (0.44) funksionalına sıfır qiymət verən mümkün idarəedicini tapsaq, onda (0.43) əlavə şərti ödənilir.

Teorem 0.11. Tutaq ki, (0.40)-(0.43) məsələsi üçün $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $K(x,t) \in L_\infty(Q)$, $\chi(x) \in L_2(\Omega)$ şərtləri ödənilir. Onda (0.40)-(0.42), (0.44) optimal idarəetmə məsələsində $V_* = \left\{ v_* \in V_m : J(v_*) = \inf_{v \in V_m} J(v) \right\}$ çoxluğu boş deyil, $L_2(\Omega)-$da zəif kompaktdır və $V_m -$dən olan ixtiyari minimallaşdırıcı ardıcıllıq $L_2(\Omega)-$da V_* çoxluğuna zəif yığılandır.

Teorem 0.12. Tutaq ki, teorem 0.11-in şərtləri ödənilir. Onda (0.44) funksionalı $V_m -$də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in V_m$ nöqtəsində $\delta v \in L_\infty(Q)$ artımlı diferensialı

$$\left\langle J'(v), \delta v \right\rangle = \int_Q u \, \psi \, \delta v \, dx dt,$$

ifadəsi ilə təyin olunur, burada $\psi = \psi(x,t;v)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + v\psi = -K(x,t) \times$$

$$\times \left[\int_0^T K(x,t) u(x,t;v) dt - \chi(x) \right], \; (x,t) \in Q, \qquad (0.45)$$

$$\psi\big|_S = 0, \quad \psi\big|_{t=T} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega \qquad (0.46)$$

qoşma məsələsinin $W_2^1(Q)-$dən olan ümumiləşmiş həllidir.

Teorem 0.13. Tutaq ki, teorem 0.12-nin şərtləri ödənilir. Onda (0.40)-(0.42), (0.44) məsələsində $v_*(x) \in V_m$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_\Omega \left(\int_0^T u_*(x,t) \psi_*(x,t) dt \right) (v(x) - v_*(x)) dx \geq 0 \quad \forall v \in V_m$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $u_*(x,t) = u(x,t;v_*)$, $\psi_*(x,t) = \psi(x,t;v_*)$ funksiyaları (0.40)-(0.42) və (0.45)-(0.46) məsələlərinin $v = v_*(x)$ idarəedicisinə uyğun həllidir.

2.4-də bir zəif qeyri-xətti dalğa tənliyi üçün qarışıq məsələdə kiçik həddin əmsalı ilə optimal idarəetmə məsələsi tədqiq olunur.

Sonda elmi rəhbərim professor Hamlet Quliyevə dissertasiya işində məsələlərin qoyuluşuna, işin yerinə yetirilməsi prosesindəki daimi diqqətinə və qayğısına görə dərin təşəkkürümü bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işində ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması və ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini haqqında tərs məsələlər optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilib, alınan məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsi üsullarının köməyi ilə tədqiq edilib, optimal idarəedicinin varlıq teoremləri isbat olunub, variasional bərabərsizlik şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər və kafi şərtlər çıxarılıb.

İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- ikitərtibli hiperbolik və elliptik tənliklər üçün sərhəd və başlanğıc funksiyaların tapılması məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmişdir;
- ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin və kiçik həddinin əmsalının təyini məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmişdir;
- alınan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq olunmuşdur;
- funksionalların diferensiallanan olması isbat olunmuş, onların qradiyentlərinin ifadələri tapılmışdır;
- variasional bərabərsizliklər tipli optimallıq şərtləri çıxarılmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Guliyev, H.F., Ismayilova, G.G. Inverse boundary value problem for string vibrations equation and its reduction to optimal control problem // -Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, -2013. XXXIX, -p.149-156.

2. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Об определении правой части уравнения колебаний струны с нелокальными краевыми условиями // -Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, -2015. № 3, -с. 27-33.

3. Guliyev, H.F., Ismayilova, G.G. On a determination of the right hand side of the string oscillation equation in the mixed problem // The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, -Baku: -27-29 August, -2015, -p. 84-86.

4. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Обратная задача нахождения начальной функции для волнового уравнения в задаче Коши // Azərbaycan Respublikasının dövlət müstəqilliyinin bərpasının 25-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları" adlı III Respublika Elmi konfransı, -Sumqayıt: -15-16 dekabr, -2016, -s. 112-113.

5. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Обратная задача нахождения начальной функции для волнового уравнения в задаче Коши // -Баку: Азербайджанский Технический Университет. Ученые записки, -2017. № 2, -с.70-74.

6. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Обратная граничная задача для уравнения колебаний струны и её исследование методом оптимального управления // -Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, -2017. № 3, -с. 21-27.

7. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Приведение одной обратной задачи термоакустики к задаче оптимального управления и её исследование // -Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, -2017. № 4, -с. 13-20.

8. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Приведение обратной задачи термоакустики к задаче оптимального управления и её исследование // Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" adlı Beynəlxalq Elmi konfransı, -Sumqayıt: -25-26 may, -2017,№ 4, -s. 222-223.

9. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Задача об определении граничных функций для двумерного волнового уравнения и её исследование методами оптимального управления // -Баку: Азербайджанский Технический Университет. Ученые записки, -2018. № 2, -с. 163-170.

10. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Об определении начальной функции в краевой задаче для линейного гиперболического уравнения второго порядка//-Баку: Азербайджанский Технический Университет. Ученые записки, -2018. № 4, -с. 132-139.

11. Guliyev, H.F., Ismayilova, G.G. On the determination of the lowest coefficient of one weakly nonlinear wave equation in a mixed problem // "Modern Problems of Mathematics and Mechanics", International conference devoted to the 60-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS, -Baku: -23-25 october, -2019, -p. 220-222.

12. Ismayilova, G.G. On determination of the coefficient of the lowest term of the multidimensional hyperbolic equation of the second order // Kiev: Journal of Automation and Information Sciences, -2019. vol. 51, №1, -pp.78-85.

13. Ismayilova, G.G. The problem of the optimal control with a lower coefficient for weakly nonlinear wave equation in the mixed problem //-USA: Maryland, European Journal of Pure and Applied Mathematics, -2020. vol. 13, №2, -p.314-322.

14. Исмаилова, Г.Г. О приведении задачи продолжения для эллиптического уравнения к задаче оптимального управления и её исследование // Фундаментальные проблемы математики и применение интеллектуальных технологий в образовании. Республиканская научная конференция, -Сумгаит: -03-04 июля, -2020. № 3, -с. 64-66.

15. Quliyev, H.F., İsmayılova, G.Q. Simin rəqsləri tənliyində kiçik həddin əmsalının tapılması məsələsi // -Bakı: Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat seriyası, -2022. №1, -s.5-14.

16. Ismayilova, G.G. On reducing the continuation problem for an elliptic equation to an optimal control problem and its study //-Baku: Advanced Mathematical Models & Applications, -2022. vol.7, №2, -pp. 205-213.

17. Quliyev, H.F., İsmayılova, G.Q. Simin rəqsləri tənliyində kiçik həddin əmsalının tapılması üçün optimal idarəetmə məsələsi // Sumqayıt Dövlət Universitetinin 60 illiyinə həsr olunmuş "Universitet elminin və təhsilinin müasir problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransı, -Sumqayıt: -17-18 noyabr, -2022, №8/I, -s. 35-38.

18. Кулиев, Г.Ф., Исмаилова, Г.Г. Об определении коэффициента при младшем члене в уравнении колебаний струны // «Фундаментальные проблемы математики и применение интеллектуальных технологий и образовании» II Республиканская научная конференция, -Сумгаит: -15-16 декабря, -2022, №10, -с. 110-112.

19. Ismayilova, G.G. The problem of obtaining boundary functions for the two-dimensional wave equation and its study using the methods of optimal control theory// III International Istanbul Current Research Congress, -Istanbul, Turkey: -February -8-9, -2023, -p.325-328.

Dissertasiyanın müdafiəsi **27 sentyabr 2024**-cü il tarixində saat **14^{00}-**da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya işi ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyasıyaları Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **05 iyul 2024**-cü il tarixdə zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 21.06.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcmi: 38535
Tiraj: 100