AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN DÖRDÜNCÜ TƏRTİB ADİ DİFERENSİAL OPERATORLAR ÜÇÜN SPEKTRAL AYRILIŞLARIN YIĞILMASI

İxtisas: 1202.01 – Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Könül Fail qızı Abdullayeva**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Ziyatxan Seyfəddin oğlu Əliyev

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Valid Fətəli oğlu Salmanov

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
Elmin Ağalar oğlu Ağayev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

______________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

______________ **Alik Malik oğlu Nəcəfov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Müasir riyaziyyatın ən mühüm bölmələrindən biri sərhəd şərtlərində spektral parametr iştirak edən adi diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsidir. Həm tənliyə, həm də sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan sərhəd məsələləri mexanikanın, fizikanın və təbiətşünaslığın digər sahələrinin bir çox məsələlərinin riyazi modelini qurarkən meydana çıxır. Təqdim olunmuş dissertasiya işi sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemi üzrə spektral ayrılışlarının müntəzəm yığılmalarının tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələlərinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları üzrə Furye sırasına ayrılışlarının müntəzəm yığılması N.Yu.Kapustin və E.İ. Moiseyevin, N.Yu. Kapustinin, D.A. Qulyayevin, N.B. Kərimov və E.A. Marisin, N.B. Kərimov, S. Goktas və E.A. Marisin, S. Goktas və E.A. Marisin işlərində tədqiq olunmuşdur.

Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların spektral xassələri V. Stenberq, H. Berner, H.J. An, S.V. Meleşko və Yu.V. Pokornı, E.M.E. Zayed və S.F.M. İbrahim, C. Ben Amara və A.A.Vladimirov, N.B. Kərimov və Z.S. Əliyev[1], Z.S. Əliyev[2,3], Z.S. Əliyev və S.B. Quliyeva, Z.S. Əliyev, N.B. Kərimov və V.A. Mehrabov, C. Gao, X. Li və R. Man, C. Gao və M. Ran, Z.S. Əliyev və F.M. Namazov, V.A. Mehrabov, Z.S. Əliyev və G.T. Mamedova, J. Qin, K. Li, Z. Zheng, J. Cai tərəfindən tədqiq edilmişdir. Bu tip məsələlərin məxsusi və qoşulmuş

---

[1] Керимов, Н.Б., Алиев, З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференц. уравнения, – 2007. т. 43, № 7, – с. 886–895.

[2] Aliyev, Z.S. Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition // Cent. Eur. J. Math., - 2010. v. 8, no 2, - p. 378-388

[3] Алиев, З.С. Базисные свойства в пространстве систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференц. уравнения, – 2011. т. 46, № 6, – с. 764–775.

funksiyalarının bazislik xassələri N.B. Kərimov və Z.S. Əliyevin, Z.S. Əliyevin, Z.S. Əliyev və S.B. Quliyevanın, Z.S. Əliyev və F.M. Namazovun, Z.S. Əliyev, N.B. Kərimov və V.A. Mehrabovun, Z.S. Əliyev və G.T. Mammədovanın işlərində öyrənilmiş və məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin alt sistemlərinin L_p, $1 < p < \infty$, fəzasında bazisliyi üçün kafi şərtlər müəyyənləşdirilmişdir.

Dördüncü tərtib adi diferensial operatorların məxsusi və qoşulmuş funksiyaları üzrə Furye ayrılışlarının müntəzəm yığılması yalnız sərhəd şərtləri spektral parametrdən asılı olmadığı halda V.M. Qurbanov[4], Y.İ. Hüseynova və V.M. Qurbanov[5] tərəfindən tədqiq edilmişdir.

Beləliklə sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün spektral məsələlərin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemi üzrə Furye sıralarına ayrılşlarının tədqiqi həm tətbiqi, həm də nəzəri cəhətdən mühüm əhəmiyyət kəsb edir və aktualdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti.

Tədqiqatın obyekti sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorlar, predmeti isə məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri.

Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəzifələri sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların köklü alt fəzalarının strukturunun və məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələrinin öyrənilməsi, məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturların alınması, məxsusi və qoşulmuş funksiyaları siteminin alt

---

[4] Kurbanov, V.M. Conditions for the absolute and uniform convergence of the biorthogonal series corresponding to a differential operator //Doklady Mathematics, - 2008, v. 78, no. 2, - p. 748-750.

[5]Kurbanov, V.M., Huseynova, Y.I. On convergence of spectral expansion of absolutely continuous vector-function in eigenvector-functions of fourth order differential operator // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics–Baku: – 2014. v. 34, no. 1, – p. 83–90

sistemlərinin $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələrinin və bu alt sistemlər üzrə spektral ayrılışlarının müntəzəm yığılmalarının tədqiq olunmasından ibarətdir.

Tədqiqat metodları.

Dissertasiya işində diferensial tənliklərin, riyazi analizin, funksional analizin, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin, adi diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

Dissertasiya işinin müdafiəsində əsas müddəalar aşağıdakılardır: sərhəd şərtlərindən üçüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların

– köklü alt fəzalarının strukturunun öyrənilməsi;

– məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikasının verilməsi;

– bütün məxsusi funksiyalarının intervaldakı sıfırlarının sayının müəyyən edilməsi;

– məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturların alınması;

– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün şərtlərin müəyyənləşdirilməsi;

– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması üçün şərtlərin tapılması;

sərhəd şərtlərindən dördüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların

– məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturların alınması;

– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması üçün şərtlərin tapılması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır: sərhəd şərtlərindən üçüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib

adi diferensial operatorların
– köklü alt fəzalarının strukturu öyrənilmişdir;
– məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilmişdir;
– bütün məxsusi funksiyalarının intervalda yerləşən sıfırlarının sayı müəyyən edilmişdir;
– məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturlar alınmışdır;
– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün şərtlər müəyyənləşdirilmişdir;
– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması üçün şərtlər tapılmışdır;
sərhəd şərtlərindən dördüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların
– məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturlar alınmışdır;
– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması üçün şərtlər tapılmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.

Dissertasiya işində alınmış nəticələr əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Bu nəticələrdən adi diferensial operatorlar üçün sərhəd məsələlərinin, mexanikanın və fizikanın müxtəlif məsələlərinin tədqiqi zamanı istifadə edilə bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi.

Dissertasiya işində alınmış nəticələr Sumqayıt Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi” kafedrasının (prof. N.T.Qurbanov), Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz” kafedrasının (prof. R.Ə.Əliyev), Xəzər Universitetinin Riyaziyyat departamentinin (prof. N.B.Kərimov), Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Diferensial tənliklər” (prof. Ə.B.Əliyev) və “Funksional analiz” (prof. H.İ.Aslanov) şöbələrinin seminarlarında, akademik Mirabbas Qasımovun 80-illiyinə həsr olunmuş “Spektral nəzəriyyə və onun tətbiqləri” adlı Beynəlxalq seminarda (Bakı, 2019), “Funksiyalar nəzəriyyəsinin müasir metodları və əlaqədar problemlər” adlı beynəlxalq Voronej qış riyaziyyat məktəbində (Russiya, Voronej, 2021), “Müasir riyaziyyatın və riyazi təhsilin bəzi aktual problemləri” mövzusunda “Herzen oxunuşları – 2021” Beynəlxalq elmi konfransında (Rusiya, Sankt-Peterburq, 2021) və Azərbaycan xalqının Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda Respublika elmi konfransında məruzə edilmişdir.

İddiaçının şəxsi töhfəsi. Dissertasiyada alınan bütün nəticələr iddiaçıya aiddir.

İddiaçının nəşrləri.

Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının tövsiyə etdiyi elmi jurnallarda müəllifin məqalələri – 5 (o cümlədən 2 WOS, 2 SCOPUS), konfrans materialları – 4 (3 beynəlxalq konfrans, 1 respublika, 2-i xaricdə keçirilmişdir).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin “Riyazi anliz və funksiyalar nəzəriyyəsi” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrı-ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işinin ümumi həcmi 206011 işarə (titul vərəqi 394, mündəricat -2658, giriş- 62959, I fəsil - 78000, II fəsil – 60000, nəticə - 2000 işarə). Ədəbiyyat siyahısı 79 addan ibarətdir.

DİSSERTASİYA İŞİNİN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Birinci fəsildə sərhəd şərtlərindən üçüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün məxsusi qiymət məsələsinə baxılır. Məsələnin məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda (kompleks müstəvidə) yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilir, köklü alt fəzalarının strukturu və məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri və $L_p,\, 1<p<\infty,$ fəzasında bazislik xassələri tədqiq olunur. Bundan başqa məsələnin məxsusi funksiyaları üzrə Furye sıralarına ayrılışlarının müntəzəm yığılması öyrənilir.

1.1-də məsələnin qoyuluşu şərh olunur.

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ 0<x<l, \tag{1}$$

$$y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$(a\lambda + b)y'(l) + (c\lambda + d)y''(l) = 0, \tag{4}$$

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \tag{5}$$

burada $\lambda \in C$ spektral parametrdir, $Ty \equiv y''' - qy',$ $q(x)$ funksiyası $[0,\, l]$ parçasında təyin olunmuş müsbət və mütləq kəsilməz funksiyadır, $\alpha, \beta, \delta, a, b, c, d$ həqiqi sabitlərdir, belə ki, $0 \le \alpha, \beta \le \pi/2,$ $\pi/2 \le \delta < \pi$ $(\beta = \delta = \pi/2$ halı istisna olmaqla), $\sigma = bc - ad > 0.$

Qeyd edək ki, (1)-(5) məsələsi en kəsiklərində uzununa qüvvə təsir edən, sərbəst ucunda isə elastik yayın köməyi ilə tarazlıqda saxlanılan çəkisiz çubuq vasitəsilə yük bağlanmış elastiki konsol çubuğun kiçik əyilmə rəqslərini təsvir edərkən yaranır.

(1)-(5) məxsusi qiymət məsələsi $\alpha = \beta = 0$ halında Z.S. Əliyevin[2] işində tədqiq edilmişdir. Həmin işdə göstərilmişdir ki, bu məsələnin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan ardıcıllıq əmələ gətirirlər. Bundan başqa, məxsusi funksiyaların osillyasiya xassələri öyrənilmiş, məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar alınmış, məxsusi funksiyalar sistemindən ixtiyari biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p(0,l),\ 1<p<\infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi göstərilmişdir.

1.2-də (1)-(5) məsələsinin operator interpretsiyası və bəzi köməkçi məlumatlar verilir.

Aşagıdakı sərhəd şərtinə baxaq:

$$y'(l)\cos\gamma + y''(l)\sin\gamma = 0, \tag{6}$$

burada $\gamma \in [0,\ \pi/2].$

(1)- (3), (6), (5) məsələsi $\delta \in [0, \pi)$ olduqda D.O. Banks və G.J.Kurovskinin[6], N.B.Kərimov və Z.S.Əliyevin[7] işlərində araşdırılmışdır. Bu işlərdə göstərilmişdir ki, $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$ və $\delta \in [0, \pi)$ olduqda (1)-(3), (6), (5) məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan $\{\lambda_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığını əmələ gətirirlər, belə ki, $k \geq 2$ olduqda $\lambda_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > 0$ olur və elə $\delta_0(\alpha, \beta, \gamma) \in [\pi/2, \pi)$ bucağı var ki, $\delta \in [0, \delta_0(\alpha, \beta, \gamma))$ olduqda $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > 0,$ $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, \gamma))$ olduqda $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$ $\delta \in (\delta_0(\alpha, \beta, \gamma), \pi)$ olduqda isə $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) < 0$ olur. Bundan başqa, $\lambda_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ məxsusi ədədinə uyğun $y_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ məxsusi funksiyasının $(0, l)$ intervalında $k \geq 2$ olduqda $k-1$ sayda sadə sıfırı var, $k=1$ olduqda isə $\delta \in [0, \delta_0(\alpha, \beta, \gamma)]$ halında sıfırı yoxdur, $\delta \in (\delta_0(\alpha, \beta, \gamma), \pi)$ halında isə onun sıfırlarının sayı ixtiyari ola bilər.

(1)-(5) məsələsinin spektral xassələrini öyrənmək üçün (1)-(3), (5) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllərinin xassələri araşdırılır.

Lemma 1. *Hər bir qeyd olunmuş $\lambda \in C$ üçün (1)-(3), (5) məsələsinin sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə trivial olmayan $y(x, \lambda)$ həlli mövcuddur.*

Nəticə 1. Hər bir qeyd olunmuş $x \in [0, l]$ üçün $y(x, \lambda)$ funksiyası λ parametrinin tam funksiyasıdır.

Biz $\mu_k = \lambda_k(\alpha, \beta, 0, \delta)$ və $\nu_k = \lambda_k(\alpha, \beta, \pi/2, \delta)$ işarələmələri aparaq. Qeyd edək ki,

$$\nu_1 < \mu_1 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots < \nu_k < \mu_k < \ldots \tag{7}$$

münasibəti doğrudur.

---

[6]Banks, D.O., Kurowski, G.J. A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Differential Equations, – 1977. v. 24 no. 1, – p. 57-74.

[7]Kerimov, N.B., Aliyev, Z.S. The oscillation properties of the boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition // – Baku: Transaction. NAS Azerbaij., ser. phys.-tech. mathem. sci., math. mech., – 2005, v. 25, no. 7, – p. 61–68

Tutaq ki, $m(\lambda) = ay'(l) + cy''(l)$.

Lemma 2. *Əgər λ ədədi (1)-(5) məsələsinin məxsusi ədədidirsə, onda $m(\lambda) \neq 0$ olar.*

1.3 paraqrafında (1)-(3), (5) məsələsinin həllərinin osillyasiya xassələri tədqiq olunur. Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$y(x, \lambda) = 0, \; x \in [0, l], \; \lambda \in R. \tag{8}$$

Aydındır ki, bu tənliyin hər bir həlli λ parametrinin funksiyasıdır.

Lemma 3. *(8) tənliyinin hər bir $x(\lambda) \in (0, l)$ kökü sadədir və λ parametrinin kəsilməz diferensiallanan funksiyasıdır.*

Nəticə 2. $\lambda, \lambda > 0$ (uyğun olaraq $\lambda \leq 0$*) parametrini dəyişdirərkən $y(x, \lambda)$ funksiyası o vaxt sıfırı itirə və ya əldə edə bilər ki, əgər bu sıfır $(0, l)$ intervalının $x = l$ (uyğun olaraq $x = 0$) uc nöqtəsindən bu intervala daxil olsun və ya bu intervaldan çıxsın.*

Tutaq ki, $s(\lambda)$, $\lambda \in R$, ədədi $y(x, \lambda)$ funksiyasının $(0, l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayıdır. (1)-(3), (6), (5) məsələsinin osillyasiya xassələri haqda yuxarıdakı qeydlərimizə, lemma 1, lemma 3 və nəticə 2-yə əsasən $\lambda > 0$ olduqda $y(x, \lambda)$ funksiyası üçün aşağıdakı osillyasiya teoremi doğrudur.

Teorem 1. *Əgər $k \geq 3$ və $\lambda \in (\mu_{k-1}, \nu_k)$ olarsa, onda $k - 2 \leq s(\lambda) \leq k - 1$ olar; əgər $k \geq 3$ və $\lambda \in [\nu_k, \mu_k]$ olarsa, onda $s(\lambda) = k - 1$ olar. Bundan başqa, əgər $\delta \in [0, \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2))$ olarsa, onda $\lambda \in [0, \mu_1]$ olduqda $s(\lambda) = 0$, $\lambda \in (\mu_1, \nu_2)$ olduqda $0 \leq s(\lambda) \leq 1$ və $\lambda \in [\nu_2, \mu_2]$ olduqda $s(\lambda) = 1$ olar, əgər $\delta \in [\delta_0(\alpha, \beta, \pi/2), \delta_0(\alpha, \beta, 0))$ olarsa, onda $\lambda \in [0, \nu_2]$ olduqda $0 \leq s(\lambda) \leq 1$ və $\lambda \in [\nu_2, \mu_2]$ olduqda $s(\lambda) = 1$ olar, əgər $\delta \in [\delta_0(\alpha, \beta, 0), \pi)$ olarsa, onda $\lambda \in [0, \mu_2]$ olduqda $s(\lambda) = 1$ olar.*

Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ kifayət qədər kiçik ədəddir, μ isə $\beta = 0$ olduqda (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), $\beta \in (0, \pi/2]$ olduqda isə (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5) spektral məsələsinin məxsusi ədədidir. $y(x, \lambda)$ funksiyasının uyğun olaraq $\lambda \in (\mu - \varepsilon, \mu)$ və

$\lambda \in (\mu, \mu+\varepsilon)$ olduqda $(0, l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayları fərqinə μ məxsusi ədədinin osillyasiya indeksi deyilir. Bu tərifdən görünür ki, $y(x,\lambda)$ funksiyasının $(0, l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayı $\beta = 0$ olduqda (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), $\beta \in (0, \pi/2]$ olduqda isə (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5) spektral məsələsinin $(\lambda,0)$ intervalında yerləşən məxsusi ədədlərinin osillyasiya indekslərinin cəminə bərabərdir.

Tutaq ki, $i(\varsigma_k)$, $k \in \mathrm{N}$, $\beta = 0$ olduqda (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), $\beta \in (0, \pi/2]$ olduqda isə (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5) spektral məsələsinin ς_k məxsusi ədədinin osillyasiya indeksidir. Onda $\lambda < 0$ olduqda $y(x,\lambda)$ funksiyasının $(0,l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$s(\lambda) = \sum_{\varsigma_k \in (\lambda, 0)} i(\varsigma_k) \tag{9}$$

1.4-də (1)-(5) məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanma tərtibləri müəyyənləşdirilir, həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilir və məxsusi ədədlərinin osillyasiya xassələri öyrənilir.

$a \neq 0$ $(c \neq 0)$ olduqda $k_a\,(k_c)$ natural ədədini aşağıdakı bərabərsizlik vasitəsilə təyin edək:

$$\nu_{k_a - 1} \leq -b/a < \nu_{k_a} \quad (\mu_{k_c - 1} < -d/c \leq \mu_{k_c})$$

Qeyd 1. Əgər $ac \neq 0$ olarsa, onda $ac > 0$ olduqda $k_a \leq k_c + 1$, $ac < 0$ olduqda isə $k_a \geq k_c$ olar.

Teorem 2. *(1)-(5) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ardıcıllığı əmələ gətirirlər, belə ki,* $k \geq 3 + \mathrm{sgn}\,|c|$ *olduqda* $\lambda_k > 0$ *olur.*

Bu paraqrafda (1)-(5) məsələsinin məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri tam öyrənilmişdir. Biz sadəlik üçün burada yalnız $c = 0$ halında bu xassələri şərh edəcəyik.

Teorem 3. *Tutaq ki,* $c = 0$. *Onda (1)-(5) spektral məsələsinin* λ_k, $k \in \mathrm{N}$, *məxsusi ədədinə uyğun* $y_k(x)$ *məxsusi funksiyasının* $(\delta \leq \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2)$ *və* $k_a \geq 2$ *halında* $k \geq 1$, *həm* $\delta \leq \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2)$ *və*

$k_a = 1$, həm $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2) < \delta \le \delta_0(\alpha,\beta,0)$, həm də $\delta > \delta_0(\alpha,\beta,0)$ və $k_a \ge 3$ hallarında $k \ge 2$, $\delta > \delta_0(\alpha,\beta,0)$ və $k_a \le 2$ halında isə $k \ge 3$ götürülməklə) $k < k_a$ olduqda $(0,l)$ intervalında düz $k-1$ sayda sadə sıfırı, $k \ge k_a$ olduqda isə ya $k-2$ ya da $k-1$ sayda sadə sıfırı var; $y_1(x)$ funksiyasının $\delta < \delta_0(\alpha,\beta,0)$ olduqda $(0,l)$ intervalında ya sıfırı yoxdur, ya da $s(\lambda_1) = \sum\limits_{\varsigma_k \in (\lambda_1,0)} i(\varsigma_k)$ sayda sadə sıfırı var, $\delta \ge \delta_0(\alpha,\beta,0)$ olduqda isə $s(\lambda_1) = \sum\limits_{\varsigma_k \in (\lambda_1,0)} i(\varsigma_k)$ sayda sadə sıfırı var; $y_2(x)$ funksiyasının $\delta > \delta_0(\alpha,\beta,0)$ və $k_a \le 2$ olduqda $(0,l)$ intervalında ya $s(\lambda_2) = \sum\limits_{\varsigma_k \in (\lambda_2,0)} i(\varsigma_k)$ sayda sadə sıfırı var, ya sıfırı yoxdur, ya da bir sadə sıfırı var.

Aşağıdakı sərhəd şərtinə baxaq:

$$ay'(l) + cy''(l) = 0. \tag{10}$$

1.5-də (1)-(5) və $q(x) \equiv 0$ olduqda (1)-(3), (10), (5) məsələlərinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar alınmışdır. Sadəlik üçün bu düsturlardan $\alpha = 0$, $c = 0$ halına uyğunları qeyd edək.

Teorem 4. *Tutaq ki, $q(x) \equiv 0$, $\alpha = 0$ və $c = 0$. Onda (1)-(3), (10), (5) məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:*

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - (1 + 3\operatorname{sgn}\beta)/4\right)\pi/l + O\left(1/k^2\right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_k(x) = \sqrt{(1+\operatorname{sgn}\beta)/l}\ \Big\{&(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin\sqrt[4]{\tau_k}\,x - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos\sqrt[4]{\tau_k}\,x + \\ &+ (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\tau_k}\,x} + O\left(1/k^2\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{12}$$

burada (12) düsturu $x \in [0,\ l]$-ə nəzərən müntəzəm ödənilir.

Qeyd 2. Hər bir $k \in \mathrm{N}$ üçün $\Psi_k(x)$ ilə $q(x) \equiv 0$ olduqda (1)-(3), (10), (5) məsələsinin τ_k məxsusi ədədinə uyğun normallaşdırılmış məxsusi funksiyasını işarə edək, yəni $\Psi_k(x) = \vartheta_k / \|\vartheta_k\|_2$.

q_0 ədədini və $q_0(x),\ x \in [0,\ l],$ funksiyasını uyğun olaraq aşağıdakı kimi təyin edək:

$$q_0 = \int_0^l q(t)dt \quad \text{və} \quad q_0(x) = \int_0^x q(t)dt.$$

Teorem 5. *Tutaq ki, (1) tənliyində* $\alpha = 0,\ c = 0.$ *Onda (1)-(5) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:*

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - (5 + 3\operatorname{sgn}\beta)/4\right)\pi/l + q_0/4k\pi + O\left(1/k^2\right), \qquad (13)$$

$$y_k(x) = \sqrt{(1+\operatorname{sgn}\beta)/l} \quad \{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin\sqrt[4]{\lambda_k}\,x - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos\sqrt[4]{\lambda_k}\,x +$$
$$(1-\operatorname{sgn}\beta)\ e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}\,x} +$$
$$(-1)^{\operatorname{sgn}\beta}(((1-\operatorname{sgn}\beta)\,q_0 - q_0(x))/4\sigma_k)\ \sin\sqrt[4]{\lambda_k}\,x +$$
$$+((q_0 + (1-\operatorname{sgn}\beta)\,q_0(x))/4\sigma_k)\cos\sqrt[4]{\lambda_k}\,x +$$
$$+\ (1-\operatorname{sgn}\beta)\ ((q_0 - q_0(x))/4\sigma_k)e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}\,x} + O\left(1/k^2\right)\Big\}, \qquad (14)$$

burada (14) münasibəti $x \in [0,\ l]$*-ə nəzərən müntəzəm ödənilir.*

1.6 paraqrafında (1)-(5) məsələsinin məxsusi funksiyaları sisteminin alt sistemlərinin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələri tədqiq edilir.

Teorem 6. *Tutaq ki,* r *ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir. Onda (1)-(5) məsələsinin* $\{y_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ *məxsusi funksiyaları sistemi* $L_p(0,\ l),\ 1 < p < \infty,$ *fəzasında bazis əmələ gətirir, belə ki,* $p = 2$ *olduqda bu bazis şərtsiz bazis olur.* $\{y_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ *sisteminə qoşma olan* $\{u_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ *sistemi aşağıdakı kimi təyin olunur:*

$$u_k(x) = \delta_k^{-1}\{y_k(x) - m_k m_r^{-1} y_r(x)\},\ \ k \in \mathrm{N},\ k \neq r, \qquad (15)$$

burada $\delta_k = \| y_k \|_2^2 + \sigma^{-1} m_k^2 > 0.$

1.7-də (1)-(5) məsələsinin məxsusi funksiyaları üzrə Furye sırasına ayrılışların müntəzəm yığılması öyrənilir.

Tutaq ki, r ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir. Onda teorem 6-ya əsasən ixtiyari $f(x) \in C[0, l]$ funksiyasının (1)-(5) spektral məsələsinin $\{y_k\}_{k=1, k\neq r}^{\infty}$ məxsusi funksiyaları sistemi üzrə

$$f(x) = \sum_{k=1, k\neq r}^{\infty} (f, u_k) y_k(x), \tag{16}$$

Furye sırasına ayrılışı $L_p(0, l), 1 < p < \infty,$ fəzasında yığılır, belə ki, bu sıra $L_2(0, 1)$ fəzasında şərtsiz yığılır.

Teorem 7. *Tutaq ki, r ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir, $f(x)$ funksiyası $[0, l]$ parçasında kəsilməz funksiyadır və onun $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ funksiyalar sistemi üzrə Furye sırası $[0, l]$ parçasında müntəzəm yığılır. Onda (16) sırası $[0, l]$ parçasında müntəzəm yığılır.*

İkinci fəsildə sağ ucunda yük bərkidilmiş, en kəsiklərində uzununa qüvvə təsir edən bircins çubuğun əyilmə rəqslərini təsvir edən məsələyə baxılır. Bu məsələ sərhəd şərtlərindən dördüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün məxsusi qiymət məsələsidir. Burada məsələnin müxtəlif hallarda məxsusi funksiyaları sistemi üzrə spektral ayrılışlarının müntəzəm yığılması üçün şərtlər müəyyənləşdirilir.

2.1-də məsələnin qoyuluşu və fiziki mənası şərh edilir.

Burada baxılan mexanika məsələsinə uyğun dördüncü tərtib xüsusi törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsinə dəyişənlərə ayırma üsulunu tətbiq etdikdə biz aşağıdakı spektral məsələni əldə edirik:

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \ x \in (0, 1), \tag{17}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = 0, \tag{18}$$

$$(a\lambda + b)y(1) - Ty(1) = 0. \tag{19}$$

Burada $q(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında mütləq kəsilməz funksiyadır, a, b həqiqi sabitlərdir, belə ki, $a > 0, b < 0.$

(17)-(19) məsələsinin (həm tənlik, həm də sərhəd şərtləri daha ümumi şəkildə olduğu halda) spektral xassələri, o cümlədən məsələnin məxsusi funksiyalarının osillyasiya və bazislik xassələri, Z.S. Əliyevin[3] işində ətraflı tədqiq olunmuşdur. Bu fəslin əsas məqsədi həmin xassələrin köməyi ilə $[0,l]$ parçasında kəsilməz funksiyaların (17)-(19) məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalarının alt sistemləri üzrə Furye sıralarına ayrılışlarının müntəzəm yığılmasını araşdırmaqdır.

2.2-də bəzi köməkçi məlumatlar verilir. Aşağıdakı sərhəd şərtinə baxaq:

$$(a\lambda + b)y(1) - (c\lambda + d)Ty(1) = 0, \tag{20}$$

burada c həqiqi sabitdir, belə ki,

$$\theta = bc - ad \neq 0. \tag{21}$$

Qeyd edək ki, (19) şərti (20) şərtindən $c = 0,\ d = 1$ və $\theta < 0$ olduqda alınır. Onu da qeyd edək ki, (17), (18), (20) məsələsinin spektral xassələri, o cümlədən məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin $L_p(0,\ 1),\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələri ((18) şərti daha ümümi şəkildə olduğu halda) $\theta > 0$ olduqda N.B. Kərimov və Z.S. Əliyevin[1] işində, $\theta < 0$ olduqda isə Z.S. Əliyevin[3] işində ətraflı tədqiq olunmuşdur. $\theta > 0$ olduqda (17), (18), (20) məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və qeyri-məhdud artan $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığını əmələ gətirirlər. $\theta < 0$ olduqda isə həmin məsələnin məxsusi ədədləri qeyri-məhdud azalmayan $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığı əmələ gətirirlər və yalnız aşağıdakı hallar mövcud ola bilər: (a) bütün məxsusi ədədlər həqiqi və sadədirlər; (b) bütün məxsusi ədədlər həqiqidirlər və bir ikiqat məxsusi ədəd istisna olmaqla yerdə qalanların hamısı sadədirlər; (c) bütün məxsusi ədədlər həqiqidirlər və bir üçqat məxsusi ədəd istisna olmaqla yerdə qalanların hamısı sadədirlər; (d) bütün məxsusi ədədlər sadədirlər və bir cüt həqiqi olmayan bir-birinə qoşma məxsusi ədədlər istisna olmaqla, yerdə qalanların hamısı həqiqidirlər (bu halda biz hesab edəcəyik ki, $\lambda_1 \in C \setminus R$ və $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$).

Məlumdur ki, (17), (18), (20) məsələsi skalyar hasili

$$(\hat{y}, \hat{\vartheta})_H = (\{y, m\}, \{\vartheta, s\}) = \int_0^1 y(x)\,\overline{\vartheta(x)}\,dx + |\sigma|^{-1}\, m\bar{s},$$

şəklində təyin olunan $H = L_2(0,\ 1) \oplus C$ Hilbert fəzasında təsir edən və təyin oblastı

$$D(A)=\{\,\hat{y}=\{y,m\}\in H: y\in W_2^4(0,\,1),(Ty)'\in L_2\,(0,\,1),$$
$$y(0)=y'(0)=y''(1)=0,\ m=ay(1)-cTy(1)\}$$

olan $A\hat{y}=A\{y,m\}=\{(Ty)',d\,Ty(1)-by(1)\}$ operatoru üçün
$$A\hat{y}=\lambda\hat{y},\hat{y}\in D(A)$$

məxsusi qiymət məsələsinə gətirilir.

Qeyd edək ki, $\theta>0$ olduqda A operatoru H-da öz-özünə qoşma və aşağıdan məhdud diskret spektrli operatordur. Bu halda A operatorunun $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}\ \hat{y}_k=\{y_k,m_k\},\ m_k=ay_k(1)-cTy_k(1)\}$, məxsusi vektorlar sistemi H-da ortoqonal bazis əmələ gətirir.

$\theta<0$ olduqda A operatoru H-da öz-özünə qoşma olmayan qapalı və kompakt resolventə malik operatordur. Bu halda $J\{y,m\}=\{y,-m\}$ münasibətilə təyin edilən $J:H\to H$ operatoru daxili hasili
$$(\hat{y},\hat{\vartheta})_{\Pi_1}=(\{y,m\},\{\vartheta,s\})_{\Pi_1}=(J\hat{y},\hat{y})_H=\int_0^1 y(x)\,\overline{\vartheta(x)}\,dx+\theta^{-1}m\bar{s}$$

olan $\Pi_1=L_2(0,\,1)\oplus C$ Pontryaqin fəzasını doğurur. Bu halda A operatoru Π_1-də $J-$öz-özünə qoşma operator olur. Bundan başqa, A operatoruna H-da qoşma olan A^* operatoru $A^*=JAJ$ münasibətilə təyin edilir; A operatorunun $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$ məxsusi və qoşulmuş vektorları sistemi H-da bazis əmələ gətirir.

Tutaq ki, $\{\hat{\vartheta}_k^*\}_{k=1}^{\infty},\ \hat{\vartheta}_k^*=\{\vartheta_k^*,s_k^*\}$, sistemi A^* operatorunun məxsusi və qoşulmuş vektorları sistemidir. Onda $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə qoşma olan $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty},\ \hat{\vartheta}_k=\{\vartheta_k,s_k\}$, sisteminin hər bir $\hat{\vartheta}_k,\quad k\in\mathrm{N}$, elementi $\hat{\vartheta}_k=\delta_k^{-1}\hat{\vartheta}_k^*$ düsturu ilə təyin olunur, burada $\delta_k\neq 0,\ k\in\mathrm{N}$, müəyyən ədədlərdir.

Qeyd edək ki, N.B. Kərimov, Z.S.Əliyevin[1] və Z.S. Əliyevin[3] işlərində alınan əsas nəticələr aşağıdakılardan ibarətdir: əgər r ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəd və $\theta>0$ və ya $\theta<0$ və $s_r\neq 0$ olarsa, onda (17), (18), (20) məsələsinin $\{y_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemi $L_p(0,1), 1<p<\infty,$ fəzasında bazis, belə ki, $p=2$ olduqda bu bazis şərtsiz bazis olur; əgər $\theta<0$ və $s_r=0$ olarsa, onda $\{y_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ sistemi $L_p(0,1)$, $1<p<\infty,$ fəzasında nə tam, nə də minimal olmur. Bundan başqa, $\{y_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ sisteminə qoşma olan $\{u_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ sisteminin hər bir u_k, $k\in\mathrm{N},$ elementi $u_k(x)=\delta_k^{-1}\{\vartheta_k(x)-s_k s_r^{-1}\vartheta_r(x)\}$ düsturu ilə təyin edilir.

Aşağıdakı sərhəd şərtini nəzərdən keçirək:

$$y(1)=0. \tag{22}$$

(17)-(19) məsələsi ilə yanaşı (17), (18) və (22) məsələsinə baxaq. Bu məsələ D.O. Banks və G.J. Kurovskinin[4] işində araşdırılmışdır və orada göstərilmişdir ki, onun məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığını təşkil edirlər, belə ki, hər bir $k\in\mathrm{N}$ üçün $\mu_k>0$ olur.

N.B. Kərimov və Z.S.Əliyevin[1], Z.S.Əliyevin[3] işlərindən məlumdur ki, (17), (18), (22) məsələsinin $q\equiv 0$ olduqda və (17)-(19) məsələsinin uyğun olaraq $(\mu_k,\vartheta_k(x))$ və $(\lambda_k,y_k(x))$ məxsusi cütləri üçün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:

$$\sqrt[4]{\mu_k}=(k+1/4)\pi+O(1/k), \tag{23}$$

$$\upsilon_k(x)=\sin(k+1/4)\pi x-\cos(k+1/4)\pi x+e^{-(k+1/4)\pi x}+O(1/k), \tag{24}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k}=(k-3/4)\pi+O(1/k), \tag{25}$$

$$y_k(x)=\sin(k-3/4)\pi x-\cos(k-3/4)\pi x+e^{-(k-3/4)\pi x}+O(1/k), \tag{26}$$

burada (24) və (26) münasibətləri $x\in[0,1]$-ə nəzərən müntəzəm ödənilir.

Qeyd 3. Qeyd etmək lazımdır ki, (23)-(26) asimptotik düsturlardan istifadə etməklə kəsilməz funksiyanın (17)-(19) məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən birini atdıqdan sonra yerdə qalan sisitem üzrə Furye sırasına ayrılışının müntəzəm yığılması üçün şərtlər müəyyənləşdirmək mümkün deyil. Ona görə də həm $q\equiv 0$ olduqda (17), (18), (22) məsələsinin, həm də (17)-(19) məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün

(23)-(26) asimptotik düsturlarını $O(1/k^2)$ tərtibinə qədər dəqiqləşdirməliyik.

2.3-də (17), (18), (22) məsələsinin ($q \equiv 0$ halında) və (17)-(19) məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturlar alınmışdır.

Teorem 8. (17), (18), (22) *məsələsinin* $q \equiv 0$ olduqda *məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:*

$$\sqrt[4]{\mu_k} = (k + 1/4)\pi + O\left(1/e^{k\pi}\right), \tag{27}$$

$$\upsilon_k(x) = \sin(k + 1/4)\pi x - \cos(k + 1/4)\pi x + e^{-\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi x} + O\left(1/e^{k\pi}\right), \tag{28}$$

burada (28) münasibəti $x \in [0, 1]$*-ə nəzərən müntəzəm ödənilir.*

Teorem 9. *(17)-(19) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:*

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = (k - 3/4)\pi + (q_0 - 2/a)/4k\pi + O\left(1/k^2\right), \tag{29}$$

$$\begin{gathered} y_k(x) = \sin(k - 3/4)\pi x - \cos(k - 3/4)\pi x + e^{-\left(k-\frac{3}{4}\right)\pi x} + \\ (((q_0 - 2/a)x - q_0(x)/4k\pi)\sin(k - 3/4)\pi x + \\ + ((q_0 - 2/a)x - q_0(x)/4k\pi) \times \cos(k - 3/4)\pi x - \\ - ((q_0 - 2/a)x + q_0(x)/4k\pi) e^{-\left(k-\frac{3}{4}\right)\pi x} + O\left(1/k^2\right), \end{gathered} \tag{30}$$

burada (30) münasibəti $x \in [0, 1]$*-ə nəzərən müntəzəm ödənilir.*

2.4-də kəsilməz funksiyanın (17)-(19) spektral məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin alt sistemləri üzrə Furye sırasına ayrılışlarının müntəzəm yığılmaları tədqiq olunur.

Tutaq ki, $\Phi_k(x) = \upsilon_k(x)/\|\upsilon_k\|_2$, $x \in [0, 1]$, və r ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir, belə ki, $s_r \neq 0$. Onda istənilən $f(x)$ kəsilməz funksiyasının (17)-(19) məsələsinin $\{y_k(x)\}_{k=1, k\neq r}^{\infty}$ məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemi üzrə

$$\sum_{k=1, k\neq r}^{\infty} (f, u_k) y_k(x) \tag{31}$$

Furye sırıası $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, fəzasında yığılır, $p = 2$ olduqda isə bu sıra şərtsiz yığılır.

Bu fəsilin əsas nəticələrindən biri aşağıdakı teoremdir.

Teorem 10. *Tutaq ki, r ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir, belə ki, $s_r \neq 0$, $f(x) \in C[0, 1]$ və bu funksiyanın $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə Furye sırasına ayrılışı $[0, 1]$ parçasında müntəzəm yığılır. Əgər $(f, \vartheta_r) \neq 0$ olarsa, onda (31) sırası ixtiyari $\chi \in (0, 1)$ ədədi üçün $[0, \chi]$ parçasında müntəzəm yığılır, əgər $(f, \vartheta_r) = 0$ olarsa, onda (31) sırası $[0, 1]$ parçasında müntəzəm yığılır.*

2.5-də (17), (18), (20) məsələsinin $c \neq 0$ halında məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin alt sistemləri üzrə spektral ayrılışlarının müntəzəm yığılması araşdırılır.

Aşağıdakı sərhəd şərtinə baxaq:

$$ay(1) - cTy(1) = 0. \tag{32}$$

Göründüyü kimi (17), (18), (22) məsələsi (17), (18), (32) məsələsindən $c = 0$ olduqda alınır. Qeyd edək ki, (17), (18), (32) məsələsinə Z.S. Əliyevin[3] işində baxılmış və orada göstərilmişdir ki, bu məsələnin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığını əmələ gətirirlər, belə ki, $k \geq 2$ olduqda $\nu_k > 0$ olur. Əvvəlki paraqraflarda olduğu kimi buradada kəsilməz funksiyanın (17), (18), (20) məsələsinin $c \neq 0$ olduğu halda məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin alt sistemləri üzrə Furye sırasına ayrılışlarının müntəzəm yığılması üçün (17), (18), (32) məsələsinin $q \equiv 0$ olduqda və (17), (18), (20) məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün məlum asimptotik düsturlar $O\left(1/k^2\right)$ həddinə qədər dəqiqləşdirilmişdir.

Aşağıdakı teorem də bu fəslin əsas nəticələrindən biridir.

Teorem 11. *Tutaq ki, r elə ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir ki, $\theta < 0$ olduqda $s_r \neq 0$ olur, $f(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında kəsilməzdir və bu funksiyanın $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə Furye sırasına ayrılışı $[0, 1]$ parçasında müntəzəm yığılır. Əgər $(f, \vartheta_r) = 0$ və ya $(f, \vartheta_r) \neq 0$ və $d = 0$ olarsa, onda $f(x)$*

funksiyasının $\{y_k\}_{k=1,k\neq r}^{\infty}$ *sistemi üzrə* (31) *Furye sırası* $[0, 1]$ *parçasında müntəzəm yığılır. Əgər* $(f, \vartheta_r) \neq 0$ *və* $d \neq 0$ *olarsa, onda (31) sırası ixtiyari* $\chi \in (0, 1)$ *ədədi üçün* $[0, \chi]$ *parçasında müntəzəm yığılır.*

Məsələnin qoyuluşuna və daim diqqətə görə elmi rəhbərim professor Ziyatxan Əliyevə öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

Təqdim olunmuş dissertasiya işi sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemlərinin alt sistemləri üzrə spektral ayrılışlarının müntəzəm yığılmasının tədqiqinə həsr edilmişdir.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

sərhəd şərtlərindən üçüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların

– köklü alt fəzalarının strukturu öyrənilmişdir;

– məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilmişdir;

– bütün məxsusi funksiyalarının intervalda yerləşən sıfırlarının sayı müəyyən edilmişdir;

– məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturlar alınmışdır;

– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin L_p, $1 < p < \infty$, fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün şərtlər müəyyənləşdirilmişdir;

– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması üçün şərtlər tapılmışdır;

sərhəd şərtlərindən dördüncüsünə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların

– məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün dəqiqləşdirilmiş asimptotik düsturlar alınmışdır;

– məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem üzrə spektral ayrılışların müntəzəm yığılması üçün şərtlər tapılmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Abdullayeva, K.F. Asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of some ordinary differential operators of fourth order // -Baku: Transactions National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, – 2018. v. 38, no. 4, – p. 8–16.
2. Kerimov N.B., Abdullayeva K.F. Uniform convergence of the spectral expansions in the terms of root functions of a spectral problem for the equation of vibrating rod // Görkəmli riyaziyyatçı, akademik Mirabbas Qasımovun 80-illiyinə həsr olunmuş "Spektral nəzəriyyə və onun tətbiqləri" adlı Beynəlxalq seminarın materialları, – Bakı: – 07-08 iyun, – 2019, – s. 98-99.
3. Abdullayeva, K.F. Uniform convergence of the Fourier series expansions in the subsystems of root functions of some spectral problem for ordinary differential equations of fourth order // -Baku: Transactions National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, – 2020. v. 40, no. 4, – p. 4–12.
4. Abdullayeva, K.F., Aliyev Z.S., Kerimov, N.B. On the uniform convergence of Fourier series expansions in the system of eigenfunctions of the equation of a vibrating rod at one end of which the mass is concentrated // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2020. v. 46, no. 2, – p. 226–242.
5. Алиев, З.С., Абдуллаева, К.Ф. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям дифференциального оператора четвертого порядка со спектральным параметром в

граничном условии // Материалы Международной конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”, – Воронеж: Россия, –28 января-2 февраля, – 2021, – с. 34–35.
6. Абдуллаева К.Ф. Базисные свойства корневых функций одной спектральной задачи с граничным условием, зависящим от спектрального параметра // Материалы научной конференции "Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2021",– Санкт-Петербург: Россия, – 5-10 апреля, – 2021, – с. 29–30.
7. Aliyev, Z.S., Abdullayeva, K.F. Uniform convergence of spectral expansions in the terms of root functions of a spectral problem for the equation of a vibrating beam // J. Math. Study, – 2021. v. 54, no. 4, – p. 435–450.
8. Абдуллаева, К.Ф. О равномерной сходимости рядов Фурье одной спектральной задачи // Azərbaycan Xalqının Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Respublika elmi konfransının materialları, – Bakı: –11-13 may, – 2022, – s. 234–235.
9. Abdullayeva, K.F. Uniform convergence of spectral expansions for a boundary value problem with a boundary condition depending on the spectral parameter // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, - 2022. v. 10, no. 1, - p. 3-14.

Dissertasiyanın müdafiəsi **29 noyabr 2024**-cü il tarixində **saat 14^{00} -**da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B. Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya işi ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **21 oktyabr 2024**-cü il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 11.10.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 37310
Tiraj: 100