AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

KÖNÜL HƏMİD qızı BƏDƏLOVA

BİR SİNİF OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN QRİN FUNKSİYASININ VƏ SPEKTRİNİN TƏDQİQİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2015

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КЕНУЛ ГАМИД кызы БАДАЛОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА И СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2015

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Гамидулла И.Асланов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Сабир С. Мирзоев** (Бакинский Государственный Университет);
кандидат физико-математических наук, доц. **Азад М. Байрамов** (Университет Раджаб Таюп Ердогана, Ризе, Турция).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 23 октября 2015 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 14 сентября 2015 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доц. Ровшан Бандалиев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Данная диссертационная работа посвящена изучению функции Грина асимптотики собственных значений и взвешенного следа, а также вычисленного регуляризованных следов дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве.

Исследование спектральных свойств дифференциальных операторов с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве начато известным математиком Ф.С.Рофе-Бекетовым. Впервые он для уравнения Штурма-Лиувилля с ограниченным операторнозначным потенциалом получил формулы разложения по собственным вектор-функциям как для самосопряженных, так и в несамосопряженных случаях. В дальнейшем появились работы М.Л.Горбачука, М.Г.Гасымова, Р.З.Халиловой, В.В.Жикова, Б.М.Левитана, М.Байрамоглы, Д.Р.Яфаева, Э.Абдукадырова и др.

В работе А.Г.Костюченко и Б.М.Левитана впервые рассмотрена уравнения Штурма-Лиувилля с неограниченным самосопряженным операторным коэффициентом с дискретным спектром и найдена асимптотическая формула для числа собственных значений, не превосходящих данного числа λ. После этой работы появились многочисленные работы по исследованию спектральных свойств дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.

Отметим работы М.Байрамоглы, Э.Абдукадирова, Г.И.Асланова, К.Х.Бойматова, М.Л.Горбачука, В.И.Горбачука м М.Л.Горбачука, В.И.Михай-леца, Б.М.Левитана, Б.М.Левитана и Г.А.Суворченковой, М.Л.Горбачук и В.А.Кутовой, В.М.Маслова, Г.А.Мишнаевского, М.Отелбаева, Г.Д.Оруджева,

Цель работы.

1.Исследовать функцию Грина, доказать дискретность спектра операторно-дифференциального уравнения высокого четного порядка на конечном отрезке.

2.Изучить асимптотическое распределение собственных значений операторно-дифференциального уравнения высокого четного порядка на полуоси.

3.Получить асимптотическую формулу для взвешенного следа операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на полуоси.

4.Исследовать структуру спектра операторного уравнения Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

5.Получить формулу третьего регуляризованного следа для операторного уравнения Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

Общая методика исследований. В диссертации использованы методы теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория операторных функций в гильбертовом пространстве, методы спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Научная новизна. В работе получены следующие результаты:

– построена функция Грина операторно-дифференциального уравнения высокого четного порядка на конечном отрезке;

– получена равномерная оценка функции Грина данного оператора;

– доказана дискретность спектра операторного уравнения высокого порядка на конечном отрезке;

– доказана асимптотическая формула для числа собственных значений операторного уравнения высокого порядка на полуоси;

– доказана асимптотическая формула для взвешенного следа операторного уравнения высокого четного порядка на полуоси;

– исследована структура спектра операторного уравнения Штурма-Лиувилля на конечном отрезке;

– получена асимптотическая формула для третьего регуляризованного следа операторного уравнения Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации представляют теоретический интерес. Они могут быть использованы при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов, а также в квантовой теории.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах отделов «Функциональный анализ» и «Дифференциальные уравнения» ИММ НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Математический анализ и теория функций», «Дифференциальные уравнения» Сумгаитского Государственного Университета, а также на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку-2009), на Международной конференции «Спектральная теория и ее приложения» посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова (Баку-2010), на IV Международном Конгрессе Турецкого Математического Общества (Баку-2011), на Международном конференции «Функциональный анализ и ее приложения», посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова (Баку-2011), на Международной Турецко-Украинской научной конференции «Mathematical Analysis, Differential equations and their Applications» (Мерсин, Турция-2012).

Публикации. Полное содержание диссертации опубликованы в 11 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка используемый литература, включающей 107 наименований. Объем диссертации составляет 119 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа посвящена некоторым вопросам спектральной теории операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

Первая глава посвящена исследованию операторно-дифференциальных уравнений $2n$-гл порядка на конечном интервале и на полуоси.

Построена функция Грина и получена равномерная оценка функции Грина при больших значениях спектрального параметра на конечном отрезке. Доказана дискретность спектра данного оператора и получена асимптотическая формула для функции распределения собственных значений. Вычислен главный член асимптотики взвешенного следа для данного оператора.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. В пространстве $H_1 = L_2[[a,b],H]$ рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell(y) = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)}, \quad a \le x \le b \tag{1}$$

и граничными условиями

$$y^{(\ell_1)}(0) = y^{(\ell_2)}(0) = \dots = y^{(\ell_n)}(0) = 0 \tag{2}$$

$$y^{(\tilde{\ell}_1)}(\pi) = y^{(\tilde{\ell}_2)}(\pi) = \dots = y^{(\tilde{\ell}_n)}(\pi) = 0 \tag{3}$$

Здесь
$0 \le \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_n \le 2n-1, \quad 0 \le \tilde{\ell}_1 < \tilde{\ell}_2 < \dots < \tilde{\ell}_n \le 2n-1$.

Пусть D' совокупность всех функций вида $\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x) f_k$, где $\varphi_k(x)$–финитные, $2n$ - раз непрерывно дифференцируемые, скалярные функции и $f_k \in D(Q)$ (везде через $Q(x)$ обозначим $Q_{2n}(x)$).

Определим оператор L', порожденный выражением (1) и граничными условиями (2), с областью определения D'. Оператор L' является положительным симметрическим оператором в H_1. Будем предполагать, что замыкание L оператор L' является самосопряженным и полуограниченным снизу оператором в H_1.

Предположим, что коэффициенты $Q_j(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Оператор $Q(x)$ для почти всех $x \in [0,\pi]$ самосопряжены в H, имеют общую плотную область определения D в H и для всех $f \in D$ выполняется неравенство
$$(Q(x)f, f) > (f, f).$$

2. Почти при всех $x \in [0,\pi]$, $Q(x)$ является обратным для вполне непрерывного оператора. Пусть $\beta_1(x) \le \beta_2(x) \le \dots \le \beta_n(x) \le \dots$ его собственные значения в порядке возрастания. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\frac{1-4n}{2n}}(x)$ сходится почти всюду и его сумма $F(x) \in L_1(0,\pi)$.

3. Для $|x-\xi| \le 1$ имеет место неравенство

$$\left\| [Q(\xi)-Q(x)]Q^{-a}(x) \right\| < A|x-\xi|, \quad A>0,\, 0<a<\frac{2n+1}{2n},$$

$$\left\| Q^{-\frac{1}{2n}}(x) Q^{\frac{1}{2n}}(\xi) \right\| < C_1, \quad \left\| Q^{\frac{1}{2n}}(x) Q^{-\frac{1}{2n}}(\xi) \right\| < C_2$$

C_1, C_2 – положительные постоянные.

4. Для $|x-\xi|>1$ имеет место неравенство

$$\left\| Q(\xi) exp\left(-\frac{Jm\omega_1}{2}|x-\xi| Q^{\frac{1}{2n}}(x) \right) \right\| < B, \quad B>0,$$

$$Jm\omega_1 = min\{Jm\omega_i > 0, \quad \omega_i^{2n} = -1\}.$$

5. $\left\| Q_j(x) Q^{\frac{1-j}{2n}+\varepsilon}(x) \right\| < C, \quad \left(j=\overline{2,2n-1} \right)$, C, ε – постоянные числа.

§§1-3 посвящены построению и изучению некоторых свойств функции Грина оператора L_0, порожденного двухчленным выражением

$$\ell_0(y) = (-1)^n y^{(2n)} + Q(x)y \tag{4}$$

и граничными условиями (2-3).

Для этого сперва строится функция Грина оператора L_1, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell_1(y) = (-1)^n y^{(2n)} + Q(\xi)y + \mu y \tag{5}$$

и граничными условиями (2).

Здесь «ξ» – некоторая фиксированная точка отрезке $[0,\pi]$.

Далее, пользуясь методом Леви для функции Грина $G_0(x,\eta,\mu)$ оператора L_0 получается интегральное уравнение типа Фредгольма и исследуется решения этого уравнения. Доказывается, что полученное интегральное уравнение разрешимо в некоторых специально построенных банаховых пространствах операторнозначных функций и решение этого интегрального уравнения является ядром оператора $R_\mu = (L_0 + \mu E)^{-1}$, т.е. функцией Грина оператора L_0.

В §4 получена равномерная оценка функции Грина оператора L получается асимптотическое равенство

$$G(x,\eta,\mu) = G_0(x,\eta,\mu)[E + \alpha(x,\eta,\mu)] \tag{6}$$

Здесь E – единичный оператор в H и $\|\alpha(x,\eta,\mu)\| = o(1)$ при $\mu \to \infty$.

Доказывается, что $G(x,\eta,\mu)$ является ядром типа Гильберта-Шмидта, т.е. имеет место оценка

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \|G(x,\eta,\mu)\|_H^2 \, dx d\eta < \infty \tag{7}$$

Отсюда следует дискретность оператора L.

§5 посвящена исследованию асимптотического поведения функции распределения собственных значений оператора L_1 порожденного операторно-дифференциальным выражением (1) на полуоси $(0,\infty)$, с граничными условиями (2).

Предполагаем, что для коэффициентов дифференциального выражения (1) выполняется условия 1-6 при $x \in [0,\infty)$. Показано, что в этом случае для функция Грина оператора L имеет место следующая асимптотическая формула

$$G(x,\eta,\mu) = g(x,\eta,\mu)[E + r(x,\eta,\mu)]$$

(8)

где $\|r(x,\eta,\mu)\|_H = o(1)$ при $\mu \to \infty$ равномерно по (x,η).

Здесь $g(x,\eta,\mu)$ является функцией Грина уравнения

$$(-1)^n y^{(2n)} + \{Q(x)+\mu\}y = 0 \qquad (9)$$

с «замороженными» в точке «ξ» коэффициентами на всей оси. Она имеет вид:

$$g(x,\eta,\mu) = \frac{[Q(x)+\mu E]^{\frac{1-2n}{2n}}}{2ni} \cdot \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha e^{i\omega_\alpha [Q(x)+\mu E]^{\frac{1}{2n}}|x-\eta|} \qquad (10)$$

Здесь $\omega_k, k = 1,2,...,n$ является корнями из (–1), степени $2n$ лежащие в верхней полуплоскости.

Из асимптотики (7) и принадлежности функции $g(x,\eta,\mu)$ пространству X_2 следует, что интегральный оператор, порожденный ядром $G(x,\eta,\mu)$ является ядром оператора $(L+\mu E)^{-1}$ в пространстве H_1, то получаем, что оператор L имеет чисто дискретный спектр.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n ...$ собственные значения и через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x) ...$ соответствующие собственные вектор-функции оператора L.

Через $N(\lambda)$ обозначим число собственных значений оператора L, меньших данного числа L, т.е. $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$.

$N(\lambda)$ называется функцией распределения собственных значений оператора L. Целью настоящего параграфа является изучение асимптотического поведения функции $N(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Доказывается следующая основная теорема.

Теорема 1. Если коэффициенты дифференциального оператора L выполняют условиям 1) – 5) то при $\mu \to \infty$ имеет место формула

$$\int_0^\infty \frac{N(\lambda)d\lambda}{(\lambda+\mu)^3} \sim \frac{C_n}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\{\beta_k(x)+\mu\}^{\frac{4n-1}{2n}}} \qquad (11)$$

где
$$C_n = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha + \sum_{\substack{\alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 = 1}}^{n} \frac{\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}}{\omega_{\alpha_1}+\omega_{\alpha_2}}\right].$$

Для того, чтобы из формулы (10) получить при помощи тауберовой теоремы Титчмарша асимптотическую формулу для функции $N(\lambda)$, должны выполнятся следующее условие:

А) Существует положительные постоянные C_1 и C_2, такие, что выполняется неравенство

$$\frac{C_1}{t^{\frac{4n-1}{2n}}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\{\beta_m(x)<t\}} dx \le \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\{\beta_m(x)>t\}} \frac{dx}{\beta_m^{\frac{4n-1}{2n}}} \le \frac{C_2}{t^{\frac{4n-1}{2n}}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\{\beta_m(x)<t\}} dx$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если для коэффициентов дифференциального оператора L выполняются условия 1) – 5) и выполняется условие А), то имеет место асимптотическая формула при $\lambda \to +\infty$.

$$N(\lambda) \sim \frac{C_n \cdot n^2}{2(2n-1)\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{2n}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\{\beta_m(x)<t\}} \{\lambda - \beta_m(x)\}^{\frac{1}{2n}} dx$$

(12)

Отметим, что асимптотическая поведение собственных значений уравнения Штурма-Лиувилля с самосопряженным операторным коэффициентом впервые изучен А.Г.Костюченко и Б.М.Левитаном.

Обобщению результатов этой работы посвящены исследования Э.Абдукадырова. В работах М.Байрамоглы, Г.И.Асланова, А.А.Абудов и Г.И.Асланова, Г.И.Асланов и

Г.И.Касумовой изучена функция Грина и асимптотическое поведение функции $N(\lambda)$ для операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка заданного на всей оси и полуоси.

§6 посвящена исследованию асимптотику взвешенного следа для операторно-дифференциального уравнения $2n$ го порядка на полуоси.

Положим

$$N_S(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda} C_n^{(s)},$$

где $$C_n^{(S)}=\int_0^\infty \left\|Q^S(x)\varphi_n(x)\right\|_H^2 dx,\quad 0\le S\le \frac{2n-1}{2n}.$$

Функция $N_S(\lambda)$ называется взвешенным следом оператора L и является обобщением функции распределения собственных значений $N(\lambda)$ т.е. при $S=0$ $N_0(\lambda)=N(\lambda)$.

Целью настоящего параграфа – изучение асимптотического поведения функции $N_S(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$.

Будем предполагать, что коэффициенты выражения (1) удовлетворяют условием 1), 4), 5), а вместе условий 2) и 3) выполняются следующие условия:

2`) Почти при всех $x\in[0,\infty)$, $Q(x)$ является обратным для вполне непрерывного оператора. Пусть $\beta_1(x)\ge\beta_2(x)\le\ldots\le\beta_n(x)\le\ldots$ его собственные значения в порядке возрастания. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{2S-\frac{4n-1}{2n}}x$ сходится при каждом $x\in[0,\infty)$ и его сумма $F_S(x)\in L_1[0,\infty)$.

3`) Для $|x-\xi|\le 1$ имеет место неравенство

$$\left\|Q^S(x)Q^{-a}(x)[Q(\xi)-Q(x)]\right\|<A|x-\xi|,\quad 0<a<\frac{2n+1}{2n},\quad A>0$$

Для изучения асимптотического поведения функции $N_S(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ сперва изучается некоторые свойства функции Грина оператора L.

Используя условия 2`), 3`) и уравнения для функции Грина доказывается, что имеет место соотношения при $\mu\to\infty$.

$$\left\|Q^S(x)G_0(x,\eta,\mu)\right\|_H=\left\|Q^S(x)G_1(x,\eta,\mu)\right\|_H(1+o(1)) \tag{13}$$

$$\left\|Q^S(x)G(x,\eta,\mu)\right\|_H=\left\|Q^S(x)G_1(x,\eta,\mu)\right\|_H(1+o(1)) \tag{14}$$

Равенства (14) служит основной для получения нужной асимптотической формулы для функции $N_S(\lambda)$.

Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 3.</u> Если выполняются условия 1), 2`), 3`), 4), 5), то при $\mu\to\infty$ имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^{(S)}}{(\lambda_n+\mu)^2}\sim\frac{\gamma_n}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\beta_k^{2S}(x)dx}{\{\beta_k(x)+\mu\}^{\frac{4n-1}{2n}}} \tag{15}$$

где $$\gamma_n=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j+\sum_{\substack{k_1,k_2=1\\k_1\ne k_2}}^{n}\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}{\omega_{k_1}+\omega_{k_2}}\right]$$

$$C_n^{(S)}=\int_0^{\infty}\left\|Q^S(x)\varphi_n(x)\right\|^2 dx.$$

Из этой формулы, в частности следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_n^{(S)}}{(\lambda_n+\mu)^2}$.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma^{(i)}(\lambda = mes\{\beta_i(x) < \lambda\}), \quad \varphi_S(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\lambda}(\lambda-\theta)^{\frac{1}{2n}} \cdot \theta^{2S} d\sigma^{(i)}(\theta).$$

Тогда соотношение (15) можно записать в следующем образом:

$$\int_0^{\infty}\frac{dN_S(\lambda)}{(\lambda+\mu)^2} \sim \gamma_n \int_0^{\infty}\frac{d\varphi_S(\lambda)}{(\lambda+\mu)^2} \qquad (16)$$

Предположим, что выполняется следующее условие:

В) Существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, что для достаточно больших λ выполняются неравенства

$$C_1\varphi_S(\lambda) < \lambda\varphi_S'(\lambda) < C_2\varphi_S(\lambda).$$

Используя соотношение (14) с применением тауберой теоремы М.В.Келдыша доказана теорема.

Теорема 4. Если выполняются условия 1), 2`), 3`), 4), 5) и тауберовое условие В), то для функции $N_S(\lambda)$ имеет место следующая асимптотическая формула при $\lambda \to \infty$

$$N_S(\lambda) \sim \frac{n^2 \cdot \gamma_n}{(2n-1)\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{mes\{\beta_i(x)<\lambda\}}\beta_i^{2S}(x)[\lambda-\beta_i(x)]^{\frac{1}{2n}}dx$$

Асимптотика взвешенного следа для операторного уравнения Штурма-Лиувилля заданного на всей оси вычислен в работе Г.И.Аслановым. Им же вычислен главный член асимптотики взвешенного следа для операторного уравнения высокого порядка заданного на всей оси.

М.Байрамоглы и Г.И.Аслановым найдены асимптотика взвешенного следа для операторного уравнения Шредингера.

М.Байрамоглы нашел асимптотику взвешенного следа для оператора вида $\Delta^2 + Q(x)$, а также для операторного

уравнения Штурма-Лиувилля, заданного на полуоси, когда в граничное условие входит неограниченный оператор. Для одного класса операторно-дифференциального уравнения $2n$-го порядка на полуоси асимптотику взвешенного следа исследовали Г.И.Асланов и Г.И.Касумова.

Вторая глава посвящена изучению спектра и регуляризованного следа одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке.

В §1 второй главы в пространстве $H_2 = L_2[H;[0,\pi]]$ рассматривается оператор L, определенным дифференциальным выражением

$$\ell(y) = -y'' + Q(x)\cdot y \qquad (157$$

и граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \qquad (18)$$

Предположим, что операторная функция $Q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0) Операторная функция $Q(x)$ четырежды слабо дифференцируема на отрезке $[0,\pi]$ и для любых $x\in[0,\pi]$ операторы $Q^{(i)}(x)$ $(i = 0,1,2,3,4)$ являются самосопряженными ядерными операторами: $Q^{(i)}(x): H \to H$;

2^0) $\|Q(x)\|_H < \frac{1}{2}$;

3^0) В пространстве существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4^0) $\int_0^{\pi}Q(x)dx = 0$.

5^0) $Q^{(2i-1)}(0) = Q^{(2i-1)}(\pi) = 0 \quad (i = 1,2)$.

Здесь и далее мы через $\sigma_1(H)$ обозначим класс ядерных операторов, действующих в пространстве H.

Через L_0 обозначим оператор, порожденный выражением $\ell_0(y) = -y''$ и граничными условиями (18). Спектр оператора L_0 есть множество $\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\right\}_{m=1}^{\infty}$ и каждая точка этого множества является собственными значениями бесконечной кратности. Соответствующими собственными вектор-функциями являются функции:

$$\psi_{mn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x \cdot \varphi_n, \quad n = 1,2,... \qquad (19)$$

Резольвенты операторов L_0 и L_1 обозначим, соответственно через R_λ^o и R_λ.

Доказана следующая лемма.

<u>**Лемма 2.1.1.**</u> Если операторная функция $Q(x)$ удовлетворяют условиям 2^0), 3^0) и $\lambda \in \left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\right\}_{m=1}^{\infty}$, то $Q(x)R_\lambda^o : H_1 \to H_1$ является ядерным оператором.

Одним из основных задач спектральной теории дифференциальных операторов является вычисления регуляризованного следа. Формула регуляризованного следа для скалярных дифференциальных операторов на конечном отрезке впервые получена в работе И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана. После этой работы появились много работ, посвященных установлению регуляризованных следов скалярных дифференциальных операторов с дискретными спектрами. Сюда относятся прежде всего работы Л.А.Дикого, М.Г.Гасымова и Б.М.Левитана, А.Г.Костюченко, В.А.Садовничего и его учеников.

Р.З.Халиловой получена аналог формулы И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана для регулярного оператора с самосопряженным операторным коэффициентом. Регуляризованные следы для дифференциальных операторов с операторными коэффициентами исследованы также в работах Э.Абдукадырова, М.Байрамоглы, Н.Шахинтурк, М.Байрамоглы, А.А.Адыгезалова и Ф.Г.Максудова, А.М.Байрамова и А.А.Адыгезалова, Н.М.Аслановой, А.М.Байрамова, Г.И.Касумовой, А.А.Адыгезалова и Й.Сезар, И.Албайрак, К.Коклу и А.Байрамова.

Целью данной главы является вычисление третьего регуляризованного следа оператора L, порожденного выражением (17) и граничными условиями (18).

В §2 второй главы приведены некоторые результаты относительно строению спектра L.

В §2 второй главы получены некоторые формулы, связанные с резольвентой данного оператора.

Пусть $\{\varphi_{mn}(x)\}$ – ортонормированные собственные функции оператора L, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$.

Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_p = \left\{\lambda; |\lambda| = \left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + p\right\}, \quad B_{mn}^o = (\bullet, \psi_{mn}^o)_{H_1} \psi_{mn}^o,$$

$$B_{mn} = (\bullet, \psi_{mn}^o)_{H_1} \psi_{mn}^o, \quad L_{om}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot B_{mn}^o,$$

$$L_m^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^2 \cdot B_{mn}.$$

Так как для резольвенты операторов R_λ^o и R_λ имеют место разложения

$$R_\lambda^o = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^o}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 - \lambda}, \quad R_\lambda = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\lambda_{nm} - \lambda}.$$

то для разности $R_\lambda - R_{\lambda_0}$ имеет место формула

$$R_\lambda - R_\lambda^o = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}-\lambda} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{mn}^o}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\lambda}$$

От сюда следует равенство

$$tr\left(R_\lambda - R_\lambda^o\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_{mn}-\lambda} - \frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\lambda}\right].$$

Используя это равенство получаем следующую важную соотношение

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_{mn}^3 - \left(m-\frac{1}{2}\right)^6\right] = \sum_{j=1}^{N} M_{Pj} + M_{PN} \tag{20}$$

где

$$M_{Pj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^3 tr\left[R_\lambda^o\left(QR_\lambda^o\right)^j\right]d\lambda \tag{21}$$

$$M_{PN} = \frac{(-1)^{N+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^3 tr\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^o\right)^{N+1}\right]d\lambda \tag{22}$$

Основным результатом §3 второй главы является следующая теорема.

<u>**Теорема 2.3.1.**</u> Если операторная функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям $1^0)$–$5^0)$, то имеет место следующая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_{mn}^3 - \left(m-\frac{1}{2}\right)^6\right] - \frac{3\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}{4\pi}\int_0^\pi trQ^2(x)dx - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{16\pi}\int_0^\pi\left[Q'(x)\right]^2dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)dx + h\right] =$$
$$= -\frac{3}{64}\left[trQ^{(IV)}(o) - trQ^{(IV)}(\pi)\right] +$$
$$+\frac{3}{8\pi}\left[trQ''(o)Q(o) - trQ''(\pi)\cdot Q(\pi)\right] - \frac{1}{4\pi}\left(g(o)-g(\pi)\right) - \frac{h}{2} \tag{23}$$

Здесь

$$h = \frac{15}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij} \tag{24}$$

Числа β_{ij} определяется с помощью равенства

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^\pi\left(Q(x)\varphi_n,\varphi_q\right)_H \cos ixdx \times$$
$$\times\int_0^\pi\left(Q(x)\varphi_q,\varphi_s\right)_H \cos(i-j)xdx\int_0^\pi\left(Q(x)\varphi_s,\varphi_n\right)\cos jxdx \tag{25}$$

А функция $g(x)$ определяется следующим образом

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left(Q(x)\varphi_n,\varphi_q\right)_H\left(Q(x)\varphi_q,\varphi_s\right)_H\left(Q(x)\varphi_s,\varphi_n\right) \tag{26}$$

Левая часть равенства (23) называется третьим регуляризованным следом оператора L.

Здесь же отметим, что первый регуляризованный след оператора L, порожденного выражением (17) и граничными условиями (18) получена в работе И.Албайрак, К.Коклу и А.Байрамова.

Регуляризованный след второго порядка получена в работе И.Албайрак, А.Байрамова и Е.Адыгезалова.

Автор благодарит профессора Г.И.Асланова за постановку задач и за постоянную помощь.

Основные содержание диссертации опубликованы в следующих работах автора

1. Асланов Г.И., Бадалова К.Г. О функции Грина и спектра уравнения Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии. Тезисы Международной Конференции по математики «Механика, посвященной 50-летию Института Математики». Механика НАН Азербайджана, Баку-2009, стр. 44-45.
2. Асланов Г.И., Бадалова К.Г. Исследование функции Грина уравнения второго порядка с нормальными операторными коэффициентами на конечном отрезке. Тезисы Международной Конференции «Спектральная теория и ее приложения», посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова, Баку-2010, стр. 66-67.
3. Асланов Г.И., Бадалова К.Г., Касумова Г.И. Исследование функции Грина уравнения высокого порядка с нормальным операторным коэффициентом. Материалы Международной конференции «Функциональный анализ и ее приложения», посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова, Баку-2011, стр. 45-47.
4. G.I.Aslanov, K.G.Badalova. Creen's function of the high order operator-differential equations in the finite interval. The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011, p.172-173.
5. Gamidulla I. Aslanov, Kenul G. Badalova. Investigation of Green function of higher order operator-differential equation in finite segment. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2011, vol. XXXI, №4, pp. 35-44.
6. Gamidulla I. Aslanov, Konul H. Badalova. On asymptotic distribution of eigenvalues of 2n order operator-differential equations on a semi-axis. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, vol. XXXII, №1, pp. 3-8.
7. Kenul G. Badalova, Gamidulla I. Aslanov. Weighted trace of higher order operator-differential equations on the semi-axis. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2012, vol. XXXVI (XLIV), pp. 17-24.
8. Konul H. Badalova. On the spectrum and regularized trace of Shturm-Liouville operator equation given on a finite interval. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, vol. XXXII, №4, pp. 29-34.
9. G.I.Aslanov, K.G.Badalova. Asymptotic distribution of eigenvalues of operator-differential equations of high order on semi-axis. Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential equations and their Applications" Abstracts. 04-09 September, 2012, Mersin, Turkey, pp. 28-29.
10. Gamidulla I. Aslanov, Kenul G. Badalova. The third regularized trace formula for second order differential equations with self-adjoint nuclear class operator-coefficients. Mathematical Aeterna, vol. 2, 2012, no. 5, pp. 409-422.
11. Badalova K.G. The third regularized formula for second order differential equations with self-adjoint nuclear class operator coefficients. "On actual problems of mathematics and informatics on the International conference dedicated to the 90th anniversary of Haydar Aliyev, May 29-31, 2013. Baku, Azerbaijan, pp.22-21.

KÖNÜL HƏMİD qızı BƏDƏLOVA

Bir sinif operator-diferensial tənliklərin Qrin funksiyasının və spektrinin tədqiqi

XÜLASƏ

Dissertasiya işində sonlu parçada $2n$- tərtibli operator-diferensial tənliklərin Qrin funksiyası qurulmuş, onun əsas xassələri öyrənilmiş, müntəzəm qiymətləndirmələri alınmışdır. Tənliyin spektrinin diskretliyi isbat edilmişdir. Yarımoxda məxsusi ədədlərin asimptotik paylanma düsturu alınmışdır. Çəkili izin asimptotikası tədqiq edilmişdir.

Sonlu parçada öz-özünə qoşma operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyinin spektrinin quruluşu tədqiq edilmiş, üçüncü requlyarlaşmış izin asimptotik düsturu isbat edilmişdir.

Dissertasiyada aşağıdakı yeni nəticələr alınmışdır:

- Sonlu parçada $2n$- tərtibli operator-diferensial tənliyin Qrin funks iyası qurulmuşdur.
- Qrin funksiyasının müntəzəm qiymətləndirmələri alınmış, spektrin diskretliyi isbat edilmişdir.
- Yarımoxda $2n$- tərtibli operator-diferensial tənliyin məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanma düsturu isbat edilmişdir.
- Yarımoxda $2n$- tərtibli operator-diferensial tənliklərin çəkili izinin asimptotikası tapılmışdır.
- Sonlu parçada öz-özünə qoşma nüvə tipli əmsala malik Şturm-Liuvill tənliyinin spektrinin quruluşu öyrənilmişdir.
- Sonlu parçada Şturm-Liuvill operator tənliyinin üçüncü requlyarlaşmış izi üçün asimptotik düstur alınmışdır.

KENUL HAMID BADALOVA

Investigation of Green function and spectrum of some operator-differential equations

SUMMARY

The dissertation work is devoted to investigating the Green function of higher order operator-differential equations on the finite segment, to standing of asymptote distribution function and weight trace of eigenvalues. Investigating the third regularized trace of the Shturm-Liuville equations with self-adjoint operator coefficient on the finite segment.

- Investigating the Green function of higher order operator-differential equation on the finite segment.
- Discreteness of the spectrum of higher order operator-differential equations on finite segment and on semi-axis.
- Asymptotic formula for the distribution function of eigenvalues of higher order operator-differential equations on the semi axis is obtained.
- A formula for the asymptotic of weight trace of higher order operator-differential equations on the semi axis is obtained.
- Asymptotic properties of eigenvalues and rezolvent Shturm-Liuville operator are studied.
- Asymptotic formula is obtained for the third regularized trace of self-adjoint operator coefficient Shturm-Liuville equation on the finite segment.

Утверждена к печати: 10.09.2015
Тираж: 100 Заказ: 462

Типография "МБМ"
г.Баку, пр.Метбуат, 529
Тел.: (+012)539-75-06