АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ОДНОСТОРОННЯЯ ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Лейла Видади кызы Насирова**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку – 2024

Работа выполнена на кафедре «Математический анализ и теория функций» Сумгаитского Государственного Университета

Научный руководитель: доктор математических наук, профессор **Зиятхан Сейфаддин оглы Алиев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Идаят Магомед оглы Гусейнов

доктор математических наук, профессор
Эльнур Гасан оглы Халилов

доктор философии по математике
Эльчин Джамал оглы Ибадов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н., доцент
________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
________________ **Билал Тельман оглы Билалов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень обработки. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению односторонней глобальной бифуркации решений из нуля и от бесконечности нелинейных задач Штурма-Лиувилля с индефинитным весом. Нелинейные задачи на собственные значения для уравнения Штурма-Лиувилля со знакопеременной весовой функцией интенсивно изучаются в последнее время, так как они возникают из селекционно-миграционных моделей в популяционной генетике, где весовая функция представляет селективную силу среды на гены популяции. Отметим, что популяционная генетика – один из важных разделов биологии, изучающий генетическую структуру и эволюцию популяций. Она имеет тесные связи с экологией, демографией, эпидемиологией, филогенией и молекулярной эволюцией. Популяционная генетика в основном используется в генетике человека и медицине, а также в селекции животных и растений.

Односторонняя глобальная бифуркация из нуля решений нелинейных задач Штурма-Лиувилля с дефинитным весом была изучена П.Г. Рабиновичем, А. Берестицким, К. Шмидтом и Х.Л. Смитом, И. Пржибицин, Б.П. Ринни, З.С. Алиевым, Г. Дайем и Р. Ма, З.С. Алиевым и Г.М. Мамедовой. Этими авторами доказано существование двух семейств неограниченных континуумов решений в $R \times C^1$, которые ответвляются из точек и отрезков линии тривиальных решений (соответствующих собственным значениям линейной задачи Штурма-Лиувилля) и содержатся в классах функций обладающих обычными узловыми свойствами. Отметим, что в работах Дж.Ф. Толанда, К.А. Стюарта, П.Г. Рабиновича, И. Пржибицин, Б.П. Ринни, Г. Дая и Р.Ма исследована глобальная бифуркация от бесконечности решений нелинейных задач на собственные значения для уравнения Штурма-Лиувилля со знакопостоянной весовой функцией. Ими установлено существование двух семейств глобальных континуумов нетривиальных решений, ответвляющихся от точек и отрезков

$R \times \{\infty\}$, соответствующих собственным значениям линейной задачи Штурма-Лиувилля, и содержащихся в классах функций обладающих обычными узловыми свойствами в некоторых окрестностях этих точек и отрезков. Аналогичные результаты для нелинейных задач Штурма-Лиувилля четвертого порядка с дефинитной весовой функцией получены З.С. Алиевым, З.С. Алиевым и Н.А. Мустафаевой. Следует отметить, что при исследовании бифуркации решений нелинейных задач изученных в вышеуказанных работах существенную роль играет осцилляционные свойства соответствующих линейных задач.

Линейная задача Штурма-Лиувилля со знакопеременной весовой функцией исследована в начале прошлого века Э.Л. Айнсом[1], где доказано, что спектр этой задачи состоит из двух положительно бесконечно возрастающей и отрицательно бесконечно убывающей последовательностей простых собственных значений. Кроме того, им установлено, что собственные функции, соответствующие как положительным, так же и отрицательным собственным значениям, обладают обычными узловыми свойствами Штурма. В. Аллегретто и А. Мингарелли, П.А. Биндингом и П.Дж. Брауном, П.А. Биндингом и Х. Фолькмером получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля с индефинитной весовой функцией. П. Гессом и Т. Като, Г.А. Афроузи и К.Дж. Брауном, В. Аллегретто и А. Мингарелли, А. Берестицким, Л. Ниренбергом и С.Р.С. Варадханом, К.Дж. Брауном и С.С. Лином, К.Дж. Брауном и А. Тертикасом, Дж. Флекингером и М.Л. Лапидусом, Ю.Лу и Э. Янагида, З.С. Алиевым и С.М. Гасановой, З.С. Алиевым и Р.А. Гусейновой, Р. Ма, С. Гао и Х. Ханом установлено существование положительного и отрицательного главных собственных значений (т.е. собственных значений, которым соответствуют положительные в области собственные функции) линейных задач на собственные значения для эллиптических

[1] Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харков: ОНТИ, – 1939. – 720 с.

уравнений в частных производных второго порядка и обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитными весовыми функциями.

Глобальная бифуркация решений линеаризируемых задач на собственные значения для эллиптических уравнений в частных производных второго порядка с знакопеременной весовой функцией исследованы П. Гессом и Т. Като, К.Дж. Брауном, К.Дж. Брауном и А. Тертикасом, К.Дж. Брауном и Ю. Чжаном, Р.С. Кантреллом и К. Коснером, М. Дельгадо и А. Суаресом, Б. Ко и К. Дж. Брауном, Ю. Су, Дж. Вей и Дж. Ши, К. Умезу, З.С.Алиевым и Ш.М. Гасановой. Ими получены глобальные результаты о бифуркации решений в классах положительных функций. Глобальная бифуркация решений в классах положительных функций нелинейных задач Штурма-Лиувилля четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией изучена в работах З.С.Алиева и Р.А. Гусейновой, Р. Ма, С.Гао и Х. Хана.

Следует отметить, что глобальная бифуркация решений нелинейных задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весами была изучена в классе положительных функций лишь в работах А. Боскаггина и Ф.Занолина, М. Фенкля и Дж. Лопес-Гомеса.

Таким образом, изучение односторонней глобальной бифуркации решений из нуля и от бесконечности для нелинейных задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями является актуальным.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования данной диссертационной работы является нелинейные задачи Штурма-Лиувилля с знакопеременными весовыми функциями, а предметом исследования – односторонняя глобальная бифуркация из нуля и от бесконечности решений рассматриваемых нелинейных задач.

Цель и задачи исследования. Изучение односторонней глобальной бифуркации решений из нуля и от бесконечности нелинейных задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями является главной целью и основной задачей настоящей диссертационной работы.

Методы исследования. В диссертации применяются методы обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральной теорий обыкновенных дифференциальных операторов, нелинейного функционального анализа и теории бифуркации.

Основные положения, выносимые на защиту. Следующие основные положения выносятся для защиты диссертации:

– изучить структуру и поведения односторонних глобальных континуумов решений ответвляющихся из нуля линеаризируемых задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весовыми функциями;

– изучить структуру точек бифуркации относительно линии тривиальных решений и исследовать одностороннюю глобальную бифуркацию решений нелинеаризируемых задач на собственные значения для уравнения Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями;

– изучить структуру и поведения односторонних глобальных континуумов решений бифурцирующих от бесконечности асимптотически линейных задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весами;

– изучить структуру асимптотических точек бифуркации и исследовать глобальную бифуркацию решений от бесконечности нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями.

Научная новизна исследования. Основными результатами данной диссертационной работы являются следующие:

– полностью изучена структура и поведение односторонних глобальных континуумов решений ответвляющихся из нуля линеаризируемых задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весовыми функциями;

– изучена структура точек бифуркации относительно линии тривиальных решений и исследована односторонняя глобальная бифуркация решений нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями;

– изучена структура и поведения односторонних глобальных континуумов решений бифурцирующих от бесконечности асимптотически линейных задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весами;

– изучена структура асимптотических точек бифуркации и исследована глобальная бифуркация решений от бесконечности нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весами.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в настоящей диссертационной работе имеют в основном теоретический характер. Эти результаты могут быть применены при изучении нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков, при моделировании динамики популяции и миграции-селекции в популяционной генетике.

Апробация и применение. Результаты полученные в данной диссертационной работе докладывались в Сумгаитском Государственном Унивеситете на семинаре кафедры «Математический анализ и теория функций» (рук. к.ф.-м.н., доц. Н.Т. Курбанов), в Бакинском Государственном Унивеситете на семинаре кафедры «Математический анализ» (рук. проф. Р.А. Алиев), в Институте Математики Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики на семинарах отделов «Функциональный анализ» (рук. проф. Г.И. Асланов) и «Дифференциальные уравнения» (рук. проф. А.Б. Алиев), на Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 94-летию Общенационального лидера азербайджанского народа Гейдара Алиева (БГУ, Баку, 2017), на Международной научной конференции посвященной 55-летию Сумгаитского Государственного Унивеситета (СГУ, Сумгаит, 2017), на Международной конференции «Современные проблемы математики и механики» посвященной 80-летнему юбилею академика А.Дж. Гаджиева (ИММ НАНА, Баку, 2017), на Международной конференции «Современные проблемы математики и механики» посвященной 60-летнему юбилею

Института Математики и Механики (ИММ НАНА, Баку, 2019), на Республиканской научной конференции «Фундаментальные проблемы математики и применение интеллектуальных технологий в образовании» (СГУ, Сумгаит, 2020), на Международной конференции «Современные методы теории функций и смежные проблемы» Воронежской зимней математической школы (Воронеж, Россия, 2021), на Республиканской конференции «Актуальные проблемы математики и механики» посвященной 99-летному юбилею со дня рождения Общенационального лидера Азербайджанского народа Г.А. Алиева (БГУ, Баку, 2022).

Личный вклад автора заключается в формулировке цели исследования. Кроме того, все полученные результаты исследования принадлежат автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президента Азербайджанской Республики – 5 (из них 2 WOS, 2 SCOPUS) материалы конференций – 7 (4 конференции международные, 1 из них проведен за рубежом, 3 конференции республиканские).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ и теории функций» Сумгаитского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертации – 201055 знаков (титульная страница – 377 знаков, оглавление – 2062 знаков, введение – 49577 знаков, первая глава – 88000 знаков, вторая глава – 60000 знаков, заключение – 1039 знаков). Из 67 наименований состоит список используемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Представленная диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка используемой литературы.

В первой главе, которая состоит из шести параграфов, исследуется односторонняя глобальная бифуркация из нуля решений линеаризируемых и нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весовыми функциями. Доказано существование четырех семейств глобальных континуумов решений, ответвляющихся от точек и отрезков линии тривиальных решений и содержащихся в классах функций, обладающих обычными узловыми свойствами Штурма.

В 1.1 дается постановка задачи и сформулируется цель настоящей главы.

Рассмотрим следующую нелинейную задачу Штурма-Лиувилля

$$\ell(u) \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda\rho(x)u + h\,(x,u,u',\lambda),\ 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda \in R$ – спектральный параметр, $p(x)$ – положительная непрерывно-дифференцируемая на $[0, 1]$ функция, $q(x)$ – неотрицательная непрерывная на $[0, 1]$ функция, $\rho(x)$ непрерывная знакопеременная на $[0, 1]$ функция, $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ – действительные постоянные такие, что $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$ и $\alpha_0\beta_0 \ge 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$. Функция h представима в виде $h = f + g$, где f и g являются действительными и непрерывными на $[0, 1]\times R^2 \times R$ функции и удовлетворяют следующим условиям:

$$u\, f(x,u,s,\lambda) \le 0,\ u\, g(x,u,s,\lambda) \le 0,\ (x,u,s,\lambda) \in [0, 1]\times R^2 \times R; \quad (4)$$

существуют постоянные $M > 0$ и $\chi > 0$ (χ может быть достаточно малым) такие, что

$$\left|\frac{f(x,u,s,\lambda)}{u}\right| \le M,\ x \in [0,\ 1],\ (u,s) \in R^2, \quad (5)$$
$$|u| + |s| \le \chi,\ u \ne 0,\ \lambda \in R;$$

для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset R$

$$g(x,u,s,\lambda)=o(|u|+|s|) \text{ при } |u|+|s|\to 0, \qquad (6)$$

равномерно по $x\in[0,1]$ и $\lambda\in\Lambda$.

В случае

$$p\equiv 1 \text{ и } h(x,u,s,\lambda)=\lambda\rho(x)[u-m(u)],$$

где

$$m(u)==u(1-u)[h_0(1-u)+(1-h_0)u],$$

$h_0\in(0,1)-$некоторая постоянная, уравнение (1) представляет собой одномерное уравнение реакции-диффузии, отрезок $[0,1]$ относится к местообитанию особь, граничные условия (2) и (3) при $\beta_0=\beta_1=0$ означают, что ни одна особь не пересекает границу местообитания. Кроме того, весовая функция $\rho(x)$ представляет собой либо избирательную силу окружающей среды на гены, либо внутреннюю скорость роста вида в местоположении x, действительный параметр λ соответствует величине, обратной величине коэффициента диффузии.

Поскольку выполняются условие (5) и (6), то рассматривается бифуркация из линии тривиальных решений. В случае, когда $\rho(x)>0,\ x\in[0,\ 1]$, глобальная бифуркация решений нелинейной задачи на собственные значения (1)-(3) при условиях (5) и (6) (но без условий (4) и $\alpha_i\beta_i\geq 0,\ i=0,1$) рассматривалась в работах З.С. Алиева, А. Берестицкого, Г. Даи и Р. Ма, И. Пржибицин, П. Рабиновича, Б.П. Ринни, Л. Шмидта и Х.Л. Смита. В этих работах было показано существование двух семейств неограниченных континуумов нетривиальных решений в $R\times C^1$, ответвляющихся из точек и отрезков бифуркации линии тривиальных решений и содержащихся в классах функций обладающих обычными узловыми свойствами. Аналогичные результаты в нелинейных задачах на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка были установлены в работе З.С. Алиева.

Целью данной главы является изучение расположения точек и отрезков бифуркации на линии тривиальных решений и структуры глобальных континуумов нетривиальных решений задачи (1)-(3), исходящих из этих точек и отрезков бифуркации.

В параграфе 1.2 построены классы $S_{k,\sigma}^{\nu}$, $k \in \mathrm{N}$, $\sigma, \nu \in \{-,+\}$, которые играют существенную роль при исследовании глобальной бифуркации решений задачи (1)-(3).

Рассмотрим следующую линейную задачу

$$\begin{cases} \ell(u)(x) = \lambda \rho(x) u(x),\ 0 < x < 1, \\ u \in B.C., \end{cases} \tag{7}$$

которая получается из (1)-(3) при $h \equiv 0$, где $B.C. -$ множество функций, удовлетворяющих граничным условиям (2) и (3).

Свойства собственных значений и собственных функций задачи (7) исследованы в книге Э.Л. Айнса[1], где, в частности, был установлен следующий результат.

Теорема 1. *Собственные значения линейной задачи (7) являются вещественными, простыми и состоят из двух неограниченно убывающей и неограниченно возрастающей последовательностей* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$ *соответственно, таких, что*

$$\ldots < \lambda_k^- < \ldots < \lambda_2^- < \lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots < \lambda_k^+ < \ldots .$$

Кроме того, для каждого $k \in \mathrm{N}$ *собственные функции* $u_k^-(x)$ *и* $u_k^+(x)$, *соответствующие собственным значениям* λ_k^- *и* λ_k^+, *имеют ровно* $k-1$ *простых нулей в интервале* $(0, 1)$.

Замечание 1. Поскольку класс непрерывных функций $C[0, 1]$ всюду плотен в $L^1[0,1]$, то приведенные выше утверждения для задачи (7) справедливы также при $q \in L^1[0,1]$.

Лемма 1. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{gathered} \int_0^1 \rho(x)(u_k^+(x))^2\, dx > 0, \\ \int_0^1 \rho(x)(u_k^-(x))^2\, dx < 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $E-$ банахово пространство $C^1[0, 1] \bigcap B.C.$ с обычной нормой $\| u \|_1 = \| u \|_\infty + \| u' \|_\infty$, где $\| u \|_\infty = \max\limits_{x \in [0,1]} | u(x) |$.

В дальнейшем σ (соответственно ν) будет обозначать либо $+$, либо $-$; $-\sigma$ (соответственно $-\nu$) будет обозначать знак, противоположный σ (соответственно ν).

Для каждого $k \in \mathrm{N}$, каждого σ и каждого ν через $S_{k,\sigma}^{\nu}$ обозначим множество функций $u \in E$, удовлетворяющих следующим условиям:

(а) $u(x)$ имеет только простые нули на отрезке $[0,1]$ и имет ровно $k-1$ таких нулей в интервале $(0,1)$;

(б) $\sigma \int\limits_0^1 \rho(x) u^2(x)\, dx > 0$;

(в) $\lim\limits_{x \to 0+} \nu \operatorname{sgn} u(x) = 1$.

Пусть $S_{k,\sigma} = S_{k,\sigma}^{-} \bigcup S_{k,\sigma}^{+}$ для каждого $k \in \mathrm{N}$ и каждого σ. В силу теоремы 1 и леммы 1 множества $S_{k,\sigma}^{-}$, $S_{k,\sigma}^{+}$ и $S_{k,\sigma}$, $k \in \mathrm{N}$, являются непустыми. Из определения множеств $S_{k,\sigma}^{-}$, $S_{k,\sigma}^{+}$ и $S_{k,\sigma}$, $k \in \mathrm{N}$, следует, что они являются открытыми подмножествами в E. Заметим, что $S_{k,\sigma}^{\nu} \bigcap S_{k',\sigma'}^{\nu'} = \varnothing$ для любых $(k,\sigma,\nu) \neq (k',\sigma',\nu')$.

Лемма 2. *Если* $u \in \partial S_{k,\sigma}^{\nu}$, $k \in \mathrm{N}$, *то либо*

(а) существует точка $\xi \in [0,1]$ *такое, что* $u(\xi) = u'(\xi) = 0$, *либо*

(б) $\int\limits_0^1 \rho(x) u^2(x)\, dx = 0$.

В параграфе 1.3 задача (1)-(3) сводится к нелинейному операторному уравнению с вполне непрерывными операторами (точнее, интегральными операторами), которому применимы известные результаты П. Рабиновича[2] и Е. Данцера[3] о глобальной бифуркации решений линеаризируемых задач.

В 1.4 изучается односторонняя глобальная бифуркация решений задачи (1)-(3) при $f \equiv 0$.

Пусть

$$R^{+} = (0, +\infty) \text{ и } R^{-} = (-\infty, 0).$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$ *и каждого* σ *существуют континуумы* $C_{k,\sigma}^{+}$ *и* $C_{k,\sigma}^{-}$ *решений задачи (1)-(3) при* $f \equiv 0$, *которые содержат* $(\lambda_k^{\sigma}, 0)$, *содержатся в множествах*

$$(R^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{+}) \bigcup \{(\lambda_k^{\sigma}, 0)\} \text{ и } (R^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{-}) \bigcup \{(\lambda_k^{\sigma}, 0)\},$$

соответственно, и являются неограниченными в $R^{\sigma} \times E$.

При доказательстве теоремы 2 используются следующие утверждения

Лемма 3. *Пусть* $(\lambda, u) \in R \times E -$ *нетривиальное решение задачи (1)-(3). Тогда*

$$\lambda \int_0^1 \rho(x) y^2(x) dx \neq 0.$$

Лемма 4. *Если* $(\lambda, u) \in R \times E$ *является решением задачи (1)-(3) такое, что* $u \in \partial S_{k,\sigma}^{\nu}$, *то* $u \equiv 0$.

В параграфе 1.5 изучаются свойства собственных значений некоторых возмущений линейной задачи Штурма-Лиувилля с индефинитным весом.

Наряду с задачей (7) рассмотрим следующую линейную задачу на собственные значения

---

[2] Rabinowitz, P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // J. Function. Anal., – 1971. v.7, no.3, – p. 487–513.

[3] Dancer, E.N. On the structure of solutions of nonlinear eigenvalue problems // Ind. Univ. Math. J., – 1974. v.23, no.11, – p. 1069–1076.

$$\begin{cases} \ell(u)(x)+\psi(x)u(x)=\lambda\rho(x)u(x),\ x\in(0,1), \\ u\in B.C., \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\psi\in C[0,1] \ \text{ и } \ \psi(x)\geq 0,\ x\in[0,1].$$

Из работы Э.Л. Айнса[1] следует, что собственные значения линейной задачи (9) являются вещественными, простыми и состоят из двух неограниченно убывающей и неограниченно возрастающей последовательностей $\{\lambda_{k,\psi}^{-}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{k,\psi}^{+}\}_{k=1}^{\infty}$, соответственно, таких, что

$$\ldots<\lambda_{k,\psi}^{-}<\ldots<\lambda_{2,\psi}^{-}<\lambda_{1,\psi}^{-}<0<\lambda_{1,\psi}^{+}<\lambda_{2,\psi}^{+}<\ldots<\lambda_{k,\psi}^{+}<\ldots .$$

Введем обозначение:

$$M_{\psi}=\sup_{x\in[0,1]}\psi(x).$$

Далее, через $\lambda_{k,M_{\psi}}^{+}$ и $\lambda_{k,M_{\psi}}^{-}$, $k\in\mathrm{N}$, обозначим k-е положительное и отрицательное собственные значения спектральной задачи

$$\begin{cases} \ell(u)(x)+M_{\psi}u(x)=\lambda\rho(x)u(x),\ x\in(0,1), \\ u\in B.C. \end{cases} \tag{10}$$

Для изучения глобальной бифуркации решений задачи (1)-(3) нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 5. *Для каждого* $k\in\mathrm{N}$ *имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &\lambda_{k}^{+}\leq\lambda_{k,\psi}^{+}\leq\lambda_{k,M\psi}^{+}, \\ &\lambda_{k,M_{\psi}}^{-}\leq\lambda_{k,\psi}^{-}\leq\lambda. \end{aligned} \tag{11}$$

Лемма 6. *Справедливы следующие неравенства*

$$\lambda_{1,\psi}^{+}-\lambda_{1}^{+}\leq\frac{M_{\psi}\int_{0}^{1}(u_{1}^{+}(x))^{2}dx}{\int_{0}^{1}\rho(x)(u_{1}^{+}(x))^{2}dx},$$

$$\lambda_1^- - \lambda_{1,\psi}^- \le - \frac{M_\psi \int_0^1 (u_1^-(x))^2\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\,(u_1^-(x))^2\,dx}.$$

Замечание 2. На основании замечания 1 утверждения лемм 5 и 6 верны также и в случае $\psi \in L^1[0, 1]$.

В 1.6 изучается односторонняя глобальная бифуркация решений задачи (1)-(3) в случае, когда функция f не является тождественным нулем. При этом изучается бифуркация решений задачи (1)-(3) из отрезков прямой тривиальных решений. Напомним, что если отрезок содержит более одной точки бифуркации, то этот отрезок называется отрезком бифуркации.

Если $(\lambda,0)-$точка бифуркации задачи (1)-(3) и существует последовательность

$$\{(\lambda_{n,k,\sigma}^\nu, u_{n,k,\sigma}^\nu)\}_{n=1}^\infty \subset \ (C \bigcap (R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu))$$

такая, что

$$\lambda_{n,k,\sigma}^\nu \to \lambda,\ \| u_{n,k,\varsigma}^\nu \|_1 \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

то $(\lambda, 0)$ называется точкой бифуркации этой задачи по множеству $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$.

Введем следующие обозначения:

$$d_1^\sigma = \frac{M \int_0^1 (u_1^\sigma(x))^2\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\,(u_1^\sigma(x))^2\,dx},$$

$$I_1^+ = [\lambda_1^+, \lambda_1^+ + d_1^+],\quad I_1^- = [\lambda_1^- - d_1^-, \lambda_1^-],$$

$$I_1^+(\delta) = [\lambda_1^+ - \delta, \lambda_1^+ + d_1^+ + \delta],\quad I_1^-(\delta) = [\lambda_1^- - d_1^- - \delta, \lambda_1^- + \delta],$$

$$I_k^+ = [\lambda_k^+, \lambda_{k,M}^+],\quad I_k^- = [\lambda_{k,M}^-, \lambda_k^-],$$

$$I_k^+(\delta)=[\lambda_k^+-\delta, \lambda_{k,M}^+ +\delta], \ I_k^-(\delta)=[\lambda_{k,M}^- -\delta, \lambda_k^- +\delta]$$

при $k\geq 2,$ где $\delta-$некоторое положительное число.

Лемма 7. *Для каждого* $k\in \mathrm{N},$ *каждого* $\sigma,$ *каждого* ν *и каждого достаточно малого* $r\in(0,\chi)$ *существует решение* $(\lambda_{k,\sigma,r}^{\nu}, u_{k,\sigma,r}^{\nu})$ *задачи (1)-(3) и число* $\delta_{k,\sigma}^{\nu}>0$ *такие, что*

$$\lambda_{k,\sigma,r}\in I_k^{\sigma}(\delta_{k,\sigma}^{\nu}), \quad \|u_{k,\sigma,r}^{\nu}\|_1=r \ \text{ и } \ u_{k,\sigma,r}^{\nu}\in S_{k,\sigma}^{\nu}.$$

Следствие 1. *Для каждого* $k\in \mathrm{N},$ *каждого* σ *и каждого* ν *множество точек бифуркации задачи (1)-(3) по множеству* $R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{\nu}$ *является непустым.*

Лемма 8. *Пусть* $(\lambda,0)$ *является точкой бифуркации задачи (1)-(3) по множеству* $R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{\nu}$. *Тогда* $\lambda\in I_k^{\sigma}$.

Пусть D замыкание в $R\times E$ множества нетривиальных решений задачи (1)-(3). Для каждого $k\in \mathrm{N},$ каждого σ и каждого ν обозначим через $\tilde{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ объединение всех компонент связности $D_{k,\sigma,\lambda}^{\nu}$ множества $D,$ которые ответвляются из точек бифуркаций $(\lambda,\ 0)\in I_k^{\sigma}\times\{0\}$ по множеству $R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{\nu}$. Заметим, что $D_{k,\sigma}^{\nu}=\tilde{D}_{k,\sigma}^{\nu}\cup(I_k^{\sigma}\times\{0\})-$ связное подмножество в $R\times E,$ но $\tilde{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ может не быть связным в $R\times E.$

Основным результатом настоящей главы является следующая

Теорема 3. *Для каждого* $k\in \mathrm{N}$ *и каждого* σ *множества* $D_{k,\sigma}^{+}$ *и* $D_{k,\sigma}^{-}$ *содержатся в множествах*

$$(R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{+})\cup(I_k^{\sigma}\times\{0\}) \ \textit{и} \ (R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{-})\cup(I_k^{\sigma}\times\{0\}),$$

соответственно, и являются неограниченными в $R\times E.$

В главе II изучается односторонняя глобальная бифуркация от бесконечности линеаризируемых и нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля со знакопере-менными весовыми функциями.

Доказывается существование четырех семейств неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из точек и отрезков множества $R\times\{\infty\}$ и содержащихся в классах $R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{\nu}$ в окрестности этих точек и отрезков.

В 2.1 излагается постановка задачи о бифуркации от бесконечности в нелинейных задачах Штурма-Лиувииля с индефинитной весовой функцией. Здесь продолжается изучение нелинейной задачи (1)-(3) в случае, когда функции f и g наряду с условием (4) удовлетворяют также следующим условиям: существуют постоянная $M>0$ такая, что

$$\left|\frac{f(x,u,s,\lambda)}{u}\right|\leq M,\ x\in[0,1],\ (u,s)\in R^2,\ u\neq 0,\ \lambda\in R; \quad (12)$$

для каждого ограниченного промежутка $\Lambda\subset R$

$$g(x,u,s,\lambda)=o(|u|+|s|),\ \text{при}\ |u|+|s|\to\infty, \quad (13)$$

равномерно по $x\in[0,1]$ и $\lambda\in\Lambda.$

В 2.2 изучается односторонняя глобальная бифуркация от бесконечности решений задачи (1)-(3) при $f\equiv 0.$

Замечание 3. Добавим бесконечно удаленные точки $\{(\lambda,\infty):\lambda\in R\}$ в пространство $R\times E$ и определим подходящую топологию на результирующем множестве. Тогда для каждого $\lambda\in R$ точка (λ,∞) будет элементом нашего пространства $R\times E.$

Обозначим через $\hat{D}$ множество нетривиальных решений задачи (1)-(3).

Следующая теорема является одним из основных результатов данной главы.

Теорема 4. *Пусть* $f\equiv 0$ *в уравнении (1). Тогда для каждого* $k\in\mathrm{N}$ *и каждого* σ *существуют связные компоненты* $\hat{C}_{k,\sigma}^{+}$ *и* $\hat{C}_{k,\sigma}^{-}$ *множества* $\hat{D}$ *и окрестность* $\hat{Q}_{k,\sigma}$ *точки* $(\lambda_k^{\sigma},\infty)$ *такие, что*

(a) $\hat{C}_{k,\sigma}^{+}\cap\hat{Q}_{k,\sigma}\subset R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{+}$ *и* $\hat{C}_{k,\sigma}^{-}\cap\hat{Q}_{k,\sigma}\subset R^{\sigma}\times S_{k,\sigma}^{-};$

(б) выполняется одно из следующих утверждений:

(б$_1$) $\hat{C}^{\nu}_{k,\sigma} \setminus Q_{k,\sigma}$ *пересекает точку* $(\lambda^{\sigma}_{k'}, \infty)$ *по множеству* $R^{\sigma} \times S^{\nu'}_{k',\sigma}$ *при некотором* $(k',\nu') \neq (k,\nu)$;

(б$_2$) $\hat{C}^{\nu}_{k,\sigma} \setminus Q_{k,\sigma}$ *пересекает* R_0 *при некотором* $\lambda \in R$;

(б$_3$) проекция множества $\hat{C}^{\nu}_{k,\sigma} \setminus Q_{k,\sigma}$ *на* R_0 *является неограниченным, где* $R_0 = \{(\lambda, 0) : \lambda \in R\}$.

В 2.3 доказывается существование асимптотических точек бифуркации задачи (1)-(3) по множеству $R^{\sigma} \times S^{\nu}_{k,\sigma}$.

Лемма 9. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$, *каждого* σ, *каждого* ν *и для любого достаточно большого* $R > 0$ *существует решение* $(\lambda^{\nu}_{k,\sigma,R}, u^{\nu}_{k,\sigma,R})$ *задачи (1)-(3) такая что,*

$$\lambda^{\nu}_{k,\sigma,R} \in R^{\sigma},\ u^{\nu}_{k,\sigma,R} \in S^{\nu}_{k,\sigma} \ \text{ и } \ \|u^{\nu}_{k,\sigma,R}\|_1 = R.$$

Пусть τ_0 − фиксированное достаточно малое положительное число.

Следствие 2. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$, *каждого* σ *и каждого* ν *существует достаточно большое положительное число* $R^{\nu}_{k,\sigma}$ *такое, что для любого* $R \geq R^{\nu}_{k,\sigma}$ *задача (1)-(3) имеет решение* (λ, u), *которое удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lambda \in I^{\sigma}_{k}(\tau_0),\ u \in S^{\nu}_{k,\sigma} \ \text{ и } \ \| u \|_1 = R.$$

Напомним, что $(\lambda, \infty), \lambda \in R^{\sigma}$, является асимптотической точкой бифуркации задачи (1)-(3) по множеству $R^{\sigma} \times S^{\nu}_{k,\sigma}$, если для любого достаточно малого $r > 0$ существует решение $(\lambda^{\nu}_{k,\sigma,r}, u^{\nu}_{k,\sigma,r})$ такое, что

$$|\lambda - \lambda^{\sigma}_{k}| < r,\ \|u\|_1 > \frac{1}{r} \ \text{ и } \ u \in S^{\nu}_{k,\sigma}.$$

В силу леммы 9 и следствия 2 имеет место следующая

Следствие 3. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$, *каждого* σ *и каждого* ν *множество асимптотических точек бифуркации задачи (1)-*

(3) по множеству $R^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{\nu}$ *является непустым. Кроме того, если* (λ, ∞) *является асимптотической точкой бифуркации задачи (1)-(3) по множеству* $R^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{\nu}$*, то* $\lambda \in I_k^{\sigma}$.

В параграфе 2.4 изучается структура односторонних глобальных континуумов, исходящих из асимптотических точек бифуркации задачи (1)-(3) в случае, когда функция f не является тождественным нулем.

Для каждого σ пусть

$$R_0^{\sigma} = \{(\lambda, 0) : \lambda \in R^{\sigma}\}$$

и

$$R_{\infty}^{\sigma} = \{(\lambda, \infty) : \lambda \in R^{\sigma}\}.$$

Далее, для каждого $k \in \mathrm{N}$, каждого σ и каждого ν определим множество $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu,*}$ как объединение всех компонент $\hat{D}$, бифурцирующих от $I_k^{\sigma} \times \{\infty\}$ по множеству $R^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{\nu}$. Кроме того, пусть

$$\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu} = \hat{D}_{k,\sigma}^{\nu,*} \cup (I_k^{\sigma} \times \{\infty\}).$$

Основным результатом настоящей главы является следующая

Теорема 5. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$*, каждого* σ *и каждого* ν *множество* $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *содержится в* $R^{\sigma} \times E$*, и для этого множества выполняется одно из следующих утверждений:*

(а) существует $(k', \nu') \neq (k, \nu)$ *такое, что* $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *пересекает* $I_{k'}^{\sigma} \times \{\infty\}$ по множеству $R^{\sigma} \times S_{k',\sigma}^{\nu'}$;

(б) существует $\lambda \in R^{\sigma}$ *такое, что* $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *пересекает* R_0^{σ} *в точке* $(\lambda, 0)$;

(в) проекция $pr_{R_0^{\sigma}} \hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *множества* $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ на R_0^{σ} *неограниченна.*

В параграфе 2.5 исследуется глобальная бифуркация решений задачи (1)-(3) при выполнении условий (4), (6), (12) и (13), где теоремы 3 и 5 улучшается следующим образом.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия (4), (6), (12) и (13). Тогда для каждого каждого* σ *и каждого* ν *множество* $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *содержится в* $(R^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{\nu}) \bigcup (I_k^{\sigma} \times \{\infty\})$, *и следовательно, альтернатива (a) теоремы 5 не имеет место. Более того, если* $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *пересекает* R_0^{σ} *при некотором* $\lambda \in R^{\sigma}$, *то* $\lambda \in I_k^{\sigma}$, *а если* $\tilde{D}_{k,\sigma}^{\nu}$ *пересекает* R_{∞}^{σ} *при некотором* $\lambda \in R^{\sigma}$, *то* $\lambda \in I_k^{\sigma}$.

Заключение

В диссертационной работе рассматриваются нелинейные задачи Штурма-Лиувилля с индефинитными весовыми функциями. Отметим, что задачи такого типа возникают при моделировании селекции-миграции в популяционной генетике. Изучается односторонняя глобальная бифуркации решений из нуля и от бесконечности этих нелинейных задач на собственные значения.

Следующие результаты являются основными для настоящей диссертационной работы:

– полностью изучена структура и поведение односторонних глобальных континуумов решений ответвляющихся из нуля линеаризируемых задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весовыми функиями;

– изучена структура точек бифуркации относительно линии тривиальных решений и исследована односторонняя глобальная бифуркация решений нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями;

– изучена структура и поведение односторонних глобальных континуумов решений бифурцирующих от бесконечности асимптотически линейных задач Штурма-Лиувилля с индефинитными весами;

– изучена структура асимптотических точек бифуркации и исследована глобальная бифуркация решений нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля со знакопеременными весовыми функциями.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Nəsirova, L.V. İndefinit çəkili Sturm-Liuvill məsələsinin məxsusi ədədlərinin həyəcanlanmaları // "Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi" adlı Respublika elmi konfransının materialları, – Sumqayıt: – 2020, – s. 51-52.
2. Алиев, З.С., Ашурова, Л.В. О бифуркации решений нелинейной задачи Штурма-Лиувилля с индефинитным весом // Материалы международной научной конференции посвященной 55-летному юбилею Сумгаитского Государственного Университета, – Сумгаит: – 2017, – s. 56-57.
3. Насирова, Л.В. Глобальная бифуркация решений нелинеаризуемой задачи Штурма-Лиувилля с индефенитным весом // Azərbaycan xalqının Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı respublika elmi konfransı, Bakı: – 2017, – s. 160–162.
4. Насирова, Л.В. Глобальная бифуркация решений из бесконечности нелинейной задачи Штурма-Лиувилля с индефинитной весовой функцией // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы», – Воронеж, Россия: 2021, – с. 224–226.
5. Насирова, Л.В. Структура и поведение глобальных континуумов решений нелинеаризируемой задачи Штурма-Лиувилля // Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Respublika elmi konfransının materialları, – Bakı: – 2022, – s. 318–319.
6. Aliнev, Z.S., Nasirova (Ashurova) L.V. Bifurcation of positive and negative solutions of nonlinearizable Sturm-Liouville problems with indefinite weight // Miskolc Math. Notes, – 2020. v. 21, no. 1, – p. 19–29.

7. Aliyev, Z.S., Nasirova L.V. Bifurcation from zero or infinity in nonlinearizable Sturm–Liouville problems with indefinite weight // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat., – 2021. no. 55, – p. 1–16.
8. Ashurova, L.V. Global bifurcation of solutions for the problem of population modeling // Caspian J. Appl. Math., Ecol. Econ., – 2017. v. 5, no. 1, – p. 65–71.
9. Nasirova, L.V. Some global results for nonlinearizable Sturm-Liouville problem with indefinite weight // Akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri" Beynəlxalq konfransın materialları, – Bakı: – 2017, – s. 33–34.
10. Nasirova, L.V. Global bifurcation of solutions of nonlinear Sturm-Liouville problems with indefinite weight // AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60-illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın Müasir Problemləri" Beynəlxalq konfransın materialları, – Bakı: – 2019, – s. 409–411.
11. Nasirova, L.V. Global bifurcation from intervals of solutions of nonlinear Sturm-Liouville problems with indefinite weight // Baku: Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math., – 2019. v. 39, no. 4, – p. 148–154.
12. Nasirova, L.V. Global bifurcation from intervals in nonlinear Sturm-Liouville problem with indefinite weight function // Baku: Proc.Inst. Math. Mech., Nat. Acad. Sci. Azerb., – 2021. v. 47, no. 2, – p. 346–356

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Зиятхану Алиеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Защита диссертации состоится **03 мая 2024** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **29 марта 2024** года.

Подписано в печать: 19.02.2024
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 35618
Тираж: 70