AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

SOBOLEV-MORRİ TİPLİ FƏZALARDA DAXİLOLMA TEOREMLƏRİ

İxtisas: 1202.01 – Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Rovşən Fərrux oğlu Babayev**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2022

Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Alik Malik oğlu Nəcəfov

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
Cavanşir Cavad oğlu Həsənov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Miqdad İmdad oğlu İsmayılov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor
Misir Cumail oğlu Mərdanov

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.-r.e.n.
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor
Bilal Telman oğlu Bilalov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalar fəzalarının qurulması, onların müxtəlif xassələrinin araşdırılması və bu fəzalarda daxilolma teoremləri tipli bir sıra inteqral bərabərsizliklərinin isbat olunması ilə bağlı məsələlər çoxluğu, riyazi analizin sərbəst şəkildə inkişaf edərək "fəzalar nəzəriyyəsi" adını almış bölməsinə aiddir.

Çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalar fəzalarının "daxilolma nəzəriyyəsi", funksiyalar nəzəriyyəsi nöqtəyi-nəzərincə sərbəst inkişaf etməklə bərabər, həmçinin xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinə çoxsaylı effektiv tətbiqlərə malik olan bir bölmədir. Funksional analizin inkişafı və xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin tələbatları yeni tip funksional fəzaların araşdırılmasına gətirib çıxardı. Çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalar fəzalarının daxilolma nəzəriyyəsi ilk dəfə, riyazi fizikanın bir sıra məsələlərinin həlli ilə bağlı S.L.Sobolevin işlərində öyrənilməyə başlanılmışdır. S.L.Sobolev öz işində n-ölçülü $G \subset R^n$ oblastında təyin olunmuş və sonlu

$$\sum_{|\alpha| \le l} \left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(G)} \qquad (l \in N, \quad p \ge 1, \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),$$

$$\alpha_j \ge 0 - tam, \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

norması olan funksiyalar çoxluğundan ibarət izotrop $W_p^{(l)}(G)$ fəzasını daxil etmiş, özünün aldığı, bu fəzadan olan və öz törəmələri vasitəsilə ifadə olunan inteqral göstərilişinin köməyi ilə bir sıra daxilolma teoremlərini isbat etmişdir. Başqa sözlə, S.L.Sobolev daxil etdiyi izotrop fəzasından olan funksiyalar üçün bir sıra inteqral bərabərsizlikləri isbat etmiş və alıdığı nəzəri nəticələrin bir sıra sinif riyazi fizika məsələlərinin araşdırılmasına, daha doğrusu, elliptik və hiperbolik tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərinin araşdırılmasına uğurlu tətbiqlərini vermişdir.

Sonralar funksional fəzalarda daxilolma nəzəriyyəsinin inkişafı bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən, o cümlədən, S.M.Nikolski, V.P.İlyin, O.V.Besov, L.D.Kudryavtsev, P.İ.Lizorkin, A.C.Cəbrayılov, T.İ.Amanov, S.V.Uspenski, H.Tribel, V.Mazya, Ə.S.Cəfərov, V.İ.Burenkov, V.S.Quliyev, M.S.Cəbrayılov, R.M.Rzayev və başqaları tərəfindən öyrənilərək inkişaf etmişdir.

XX əsrin 60-cı illərindən başlayaraq bir sinif xüsusi törəməli diferensial tənliklərin araşdırılması qarışıq törəmələr dominant olan funksional fəzaların öyrənilməsi zərurəti yaratdı. Belə tənliklər sinfini əvvəllər tətbiq olunmuş klassik $W_p^l, H_p^l, B_{p,\theta}^l, F_{p,\theta}^l$ fəzalarında da araşdırmaq olar, lakin bu zaman həlldən əvvəlcədən daha yüksək tərtibli törəmələr tələb etmiş olarıq. Bu tip fəzalar ilk dəfə S.M.Nikolski tərəfindən, sonralar isə T.İ.Amanov, A.C.Cəbrayılov, S.O.Ualiyev, A.M.Nəcəfov və başqaları tərəfindən araşdırılaraq inkişaf etdirilmişdir. Qarışıq törəmələri dominant olan Sobolev, Nikolski, Besov və Lizorkin-Tribel fəzaları müəlliflər tərəfindən uyğun olaraq $S_p^l W, S_p^l H, S_{p,\theta}^l B$ və $S_{p,\theta}^l F$ kimi işarə olunmuşdur.

Həmin illərdə əvvəlcə V.P.İlyinin sonralar A.C.Cəbrayılovun, A.M.Nəcəfovun, T.A.Şuboçkinanın, L.Ş.Qədimovanın, A.T.Orucova və başqalarının işlərində başqa tip, yəni "hamarlıq göstəricisi" olan vektorların koordinant oxları üzərində deyil müsbət yarımmüstəvilər üzərində yerləşdiyi hala uyğun olan fəzalar araşdırılır. Keçən əsrin 90-cı illərindən başlayaraq $W_{loc}^{1,p}(R^n)$ fəzasından olan funklsiyaların yakobiyanının lokal inteqrallanan olması məqsədi ilə T.İvaniec və C.Sbordonenin işində Lebeq fəzasının modifikasiyası olan, sonralar qrand Lebeq fəzası kimi adlandırılmış və $L_{p)}$ kimi işarə olunmuş fəzalar öyrənilməyə başlamışdır.

Sonralar isə bu tip fəzalar bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən, o cümlədən L.Greco, A.Fiorenza, G.E.Karadzhov, S.Q.Samko, V.M.Kokilaşvili, A.Mesxi, H.Rafeiro, A.Gogatişvili, S.M.Umarhacıyev, A.M.Nəcəfov, M.C.Formica və başqaları tərəfindən öyrənilərək daha da inkişaf etdirilmişdir.

Keçən əsrin 30-cu illərindən başlayaraq xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinin hamarlıq məsələsinin öyrənilməsi məqsədi ilə çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyaların parametrli fəzaları tətqiq olunmağa başlanılmışdır. Parametrli fəzalar ilk dəfə C.Morri (sonralar Morri fəzaları kimi adlandırılmış) tərəfindən öyrənilməyə başlanılmış, sonralar isə S.Campanato, V.P.İlyin, İ.Ross, Y.V.Netrusov, V.S.Quliyev, V.İ.Burenkov, A.M.Nəcəfov, A.Gogatişvili, R.Ç.Mustafayev, B.T.Bilalov, M.Taylor, X.Zhon, G.D.Fazio, M.Ragua, Y.Sawano, D.Fan, S.Lu, D.Yang, Y.Giga, T.Miyakama, M.A.Ragusa, L.Tang, J.Xu, G.Stampachia, A.Mazzucato, C.C.Həsənov və başqaları tərəfindən öyrənilərək inkişaf etdirilmişdir.

Qeyd edək ki, Morri tipli fəzalarda alınmış nəzəri nəticələr R.V.Hüseynov, A.Mazzucato, V.S.Guliyev, M.A.Ragusa, A.M.Nəcəfov və başqalarının işlərində bir sinif differensial tənliklərin həllinin varlığı, yeganəliyi və hamarlıq məsələlərinin öyrənilməsinə tətbiq olunmuşdur. Onu qeyd edək ki, yuxarıda adları çəkilən müəlliflər tərəfindən hamarlıq məsələsi öyrənilərkən "hamarlıq" göstəricisinin əvvəlki işlərdən yüksək olduğu isbat olunmuşdur.

Dissertasiya işinin mövzusu yeni çoxdəyişənli differensialla-nan funksiyaların parametrli fəzalarının tədqiqatına həsr olunmuş-dur. Daha doğrusu, disser-tasiya işində ümumiləşmiş, yəni "hamarlıq göstəriciləri" olan $l^i = (l_1^i, l_2^i, \ldots, l_n^i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ vektorlarının hamısının eyni zamanda $n-$ölçülü müstəvi üzərində olmayan Sobolev-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$, qrand Sobolev-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i),\chi,\alpha}(G)$, Nikolski-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G_\varphi)$,"hamarlıq göstəriciləri" sayının 2^n sayda olan Sobolev-Morri $\bigcap_{i=1}^{2^n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$, həmçinin kəsr tərtibli qrand Sobolev-Morri $W^{l}_{p),a.\chi}(G)$ və qarışıq törəməli dominant olan qrand

qrand Sobolev-Morri $S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G)$ fəzaları tədqiq olunur. Başqa sözlə, inteqral göstərilişi üsulu ilə bu fəzalardan olan funksiyaların bir sıra diferensial və diferensial- fərq xassələri öyrənilir.

Dissertasiya işində alınmış nəzəri nəticələrin bir sinif yüksək tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklərin araşdırılması zamanı tətbiqi əhəmiyyət kəsb etməsi dissertasiya işinin mövzusunun aktual olduğunu göstərir.

Tədqiqatın obyekt və predmeti.

Dissertasiya işinin tədqiqat obyektləri və predmetləri aşağıdakılardır: bir sinif Sobolev-Morri tipli fəzaların daxil olunması və bu fəzalardan olan funksiyaların daxilolma nöqteyi-nəzərincə bir sıra xassələrinin öyrənilməsi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

Yeni Morri tipli fəzaların qurulması və bu fəzalardan olan funksiyaların daxilolma nöqteyi nəzərincə bir sıra xassələrinin öyrənilməsi.

Tədqiqat üsulları.

Dissertasiya işində n-ölçülü oblastlarda təyin olunmuş funksiyaların inteqral göstərilişi üsulu, funksional analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi və riyazi analiz üsullarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

Müdafiəyə aşağıdakı əsas müddəlar çıxarılır:

- yeni Morri tipli fəzaların daxil olunması;
- daxil olunan fəzaların bir sıra xassələrinin öyrənilməsi;
- inteqral göstərilişi üsulu ilə daxil olunan fəzalarda həm daxilolma, həm də interpolyasiya tipli teoremlərin isbat olunması;
- inteqral göstərilişi üsulu ilə bu fəzalardan olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələrinin ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəməsinin isbat olunması.

Təqdiqatın elmi yeniliyi.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- yeni Morri tipli fəzalar daxil olunur;
- daxil olunan fəzaların bir sıra xassələri öyrənilir;

- inteqral göstərilişi üsulu ilə daxil olunan fəzalarda həm daxilolma, həm də interpolyasiya tipli teoremlər isbat olunur;
- inteqral göstərilişi üsulu ilə bu fəzalardan olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələrinin ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəməsi isbat olunur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.

Dissertasiya işi əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Alınmış nəzəri nəticələr funksional fəzalar nəzəriyyəsində özünəməxsus elmi maraq doğurur. Bundan başqa dissertasiyada alınan nəticələr bir sinif yüksək tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulan sərhəd məsələlərinin həllinin varlığı, yeganəliyi və həllin hamarlıq məsələsinin öyrənilməsinə tətbiq oluna bilər.

Aprobrasiya və tətbiqi. Dissertasiya işinin nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" (AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev) və "Funksiyalar nəzəriyyəsi" (r.e.d. V.E.İsmayılov) şöbələrinin və Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universitetinin "Ali riyaziyyat" kafedrasının seminarlarında, "Operators in Morrey type spaces and applications" və "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfranslarında (SDU 2017, 2019), "Operators, funktions and systems of mathematical phystis conferense" (KHAZAR Universty, 2018) və "Azərbaycanda təhsil siyasətinin prioritetləri: Müasir yanaşmalar" (MDU, 2017) elmi konfranslarında məruzə olunmuşdur.

Müəllifin şəxsi töhfəsi tədqiqatın məqsədini göstərməkdən və istiqamətinin seçilməsindən ibarətdir. Alınan nəticələr müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK-ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 6 məqalə, 4 konfrans materialı və 4 tezis nəşr olunmuşdur. Onlardan 2 məqalə Web of Science bazasına və 1 məqalə Scopus bazasına daxil olan jurnalda dərc olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

İddiaçının dissertasiya mövzusu üzrə 6 məqalə və 4 tezisi çap olunmuşdur.

Dissertasiyanın strukturu və həcmi.

Dissertasiya işinin ümumi həcmi 213612 işarədir (titul səhifəsi-333 işarə, mündəricat - 1102 işarə, giriş - 46000 işarə, birinci fəsil - 96000 işarə, ikinci fəsil - 70000 işarə, nəticə - 510 işarə).

DISSERTASIYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Birinci fəsildə əvvəlcə ümumiləşmiş Sobolev Morri $\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$, ümumiləşmiş grand Sobolev-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i),\chi,a}(G)$, kəsr tərtibli qrand Sobolev-Morri $W^{l}_{p),\chi,a}(G)$ və ümumiləşmiş Nikolski-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G_\varphi)$ fəzaları daxil olunur. Sonra inteqral göstərilişi üsulu ilə bu fəzalardan olan funksiyaların bir sıra diferensial xassələri öyrənilir. Həmçinin bu fəzalardan olan funksiyaların ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəməsi isbat olunur.

Tərif 0.1. Ümumiləşmiş Sobolev-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$ fəzası G oblastında təyin olunmuş lokal cəmlənən, G oblastında ümumiləşmiş $D^{l^i} f$ $(l^i \in N_0^n,\ i = 0,1,...,n)$ qarışıq törəmələrə malik və

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)} = \sum_{i=0}^{n} \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i,\varphi,\beta,G}$$

sonlu norma ilə təyin olunmuş f funksiyaları çoxluğundan ibarətdir, burada

$$\|f\|_{p,\varphi,\beta,G} = \|f\|_{L_{p,\varphi,\beta}(G)} = \sup_{\substack{x\in G,\\ t>0}} \left(\left|\varphi([t]_1)\right|^{-\beta} \|f\|_{p,G_{\varphi(t)}(x)} \right) \quad ,$$

$l^i = \left(l_1^i, \dots, l_n\right), \ l_j^0 \ge 0, \ l_j^i \ge 0, \ \left(j \ne i = 1,2,\dots,n\right),$

$l_{ij}^i > 0 \ \left(i = 1,2,\dots,n\right)$ – tamdırlar; $1 \le p^i < \infty \ , i \ = 0,1,...,n;$

$|\varphi([t]_1)|^{-\beta} = \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j([t]_1))^{-\beta_j}; \ \ \beta_j \in [0,1] \ \left(j = 1,2,\dots,n\right)$

$[t]_1 = \min\{1,t\}$ və hər bir $x \in R^n$ və $t > 0$ üçün

$$G_{\varphi(t)}(x) = G \cap I_{\varphi(t)}(x) = G \cap \left\{ y : | y_j - x_j | < \frac{1}{2}\varphi_j(t), \ \ j = 1,2,...,n \right\}.$$

Burada $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ və Lebeq mənada ölçülən funksiyalardır,

$$\varphi_j(t) > 0 \ \ (t > 0), \ \ \lim_{t \to +0} \varphi_j(t) = 0, \ \ \lim_{t \to +\infty} \varphi_j(t) = K_j,$$

$$0 < K_j \le \infty \ , j \ = 1,2,...,n \ .$$

Belə funksiyalar çoxluğunu N ilə işarə edəcəyik.

Qeyd edək ki, $l^0 = \left(0,0,\dots,\right), \ l^0 = \left(0,\dots 0, \ l_i \, 0,\dots,0\right), i = 1,2,\dots,n;$

$p^i = p\left(i = 0,1,\dots n\right)$ olarsa, onda $\bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}_{p^i,\varphi,p}^{<l^i>}(G)$ fəzası $W_{p),\varphi,\beta}^{l}\left(\mathrm{G}\right)$ fəzası üst-üstü düşür.

Tərif 0.2. Ümumiləşmiş Nikolski-Morri $\bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G_\varphi)$ fəzası G oblastında təyin olunmuş lokal cəmlənən və

$$\|f\|_{\bigcap \mathscr{L}_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G)} = \sum_{i=0}^{n} \sup_{0<t<t_0} \frac{\left\| \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) D^{k^i} f \right\|_{p^i,\varphi,\beta}}{\prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t)^{l_j^i - k_j^i}}$$

sonlu norması olan funksiyalar çoxluğundan ibarətdir. Burada

$m^i \in N^n, \ \ k^i \in N_0^n, \ l^i = (l_1^i,...,l_n^i), \quad l_j^0 \ge 0, \ l_j^i \ge 0, \quad (i \ne j = 1,...,n),$

$l_i^i > 0, \ \ (i = 1,2,...,n) \ t_0$ – qeyd olunmuş müsbət ədəddir,

$$\left\|\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(t)})f\right\|_{p^i,\varphi,\beta}=\left\|\Delta^{m^i}(\varphi(t))f\right\|_{p^i,\varphi,\beta;G_{\varphi(t)}}=\left\|\Delta^{m^i}(\varphi(t))f\right\|_{L_{p^i,\varphi,\beta}(G_\varphi)},$$

$$\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(t)})f(x)=\begin{cases}\Delta^{m^i}(\varphi(t))f(x), & [x,\ x+m^i\varphi(t)]\subset G,\\ 0, & [x,\ x+m^i\varphi(t)]\overline{\subset} G,\end{cases}$$

$$\Delta^{m^i}(\varphi(t))f(x)=\sum_{j=0}^{m^i}(-1)^{m^i-j}C^{\gamma}_{m^i}f(x+j\varphi(t))\cdot$$

Tərif 0.3. Ümumiləşmiş qrand Sobolev-Morri $\bigcap\limits_{i=0}^{n}L^{<l^i>}_{p^i),\chi,a}(G)$ fəzası məhdud $G\subset R^n$ oblastında təyin olunmuş, lokal cəmlənən, G oblastında ümumiləşmiş $D^{l^i}f\quad (l^i\in N_0^n,\ i=0,1,...,n)$ qarışıq törəmələrə malik və

$$\|f\|_{\bigcap\limits_{i=0}^{n}L^{<l^i>}_{p^i),\chi,a}(G)}=\sum_{i=0}^{n}\left\|D^{l^i}f\right\|_{p^i),\chi,a;G}$$

sonlu norma ilə təyin olunmuş f funksiyaları çoxluğundan ibarətdir, burada

$$\|f\|_{p^i),\chi,a;G}=\|f\|_{L_{p^i),\chi,a}(G)}=$$

$$=\sup_{\substack{0<t\le d_0,\\ x\in G,\\ 0<\varepsilon<p-1}}\left(\frac{1}{t^{|\chi|a}}\frac{\varepsilon}{\left|G_{t^\chi}(x)\right|}\int\limits_{\left|G_{t^\chi}(x)\right|}|f(y)|^{p-\varepsilon}\,dy\right)^{p-\varepsilon},$$

$d_0=diamG;\ 1<p^i<\infty;\ l^i=(l_1^i,l_2^i,...,l_n^i)\in N_0^n$, daha dəqiq desək, $l_j^0\ge 0$ $(j=1,2,...,n)$, $l_j^i\ge 0\ \ (i\ne j=1,2,...,n),\ l_l^i>0\ \ (i=1,2,...,n)$ tamdırlar; $\chi=(\chi_1,\chi_2,...,\chi_n),\ \ \chi_j>0\ \ (j=1,2,...,n);\ a\in[0,1]$,

Tərif 0.4 Məhdud $G\subset R^n$ oblastında lokal cəmlənən, $D_i^{l_i}f\ \left(l_i\in(0,\infty),\ i=1,2,\ldots,n\right)$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələrə malik və

$$\|f\|_{W^l_{p),a,\chi}(G)}=\|f\|_{p),a,\chi;G}+\sum_{i=1}^{n}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{p),a,\chi;G}$$

sonlu norması olan f funksiyaları çoxluğundan ibarət olan fəzaya kəsr tərtibli qrand Sobolev-Morri $W^l_{p),a,\chi}(\mathrm{G})$ fəzası deyilir, harada ki,

$$\|f\|_{p),a,\chi,G}=\|f\|_{L_{p),a,\chi}(G)}=\sup_{\substack{0<t\le d,\\ x\in G,\\ 0<\varepsilon<p-1}}\left(\frac{1}{t^{|\chi|a}}\frac{\varepsilon}{\left|G_{t^\chi}(x)\right|}\int_{G_{t^\chi}(x)}|f(y)|^{p-\varepsilon}dy\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$l\in(0,\infty)^n$; $1<p<\infty$; $a\in[0,1]$; $\chi\in(0,\infty)^n$; $D_i^{l_i}f=D_i^{[l_i]}D_{+i}^{\{l_i\}}f$, $[l_i]$ -l_i ədədinin tam hissəsi, $\{l_i\}$ isə l_i ədədinin kəsr hissəsi və

$$G_{t^\chi}(x)=G\cap I_{t^\chi}(x)=G\cap\left\{y:\left|y_j-x_j\right|<\frac{1}{2}t^{\chi_j},\ j=1,2,\ldots,n\right\}.$$

Hər bir $\varphi\in C_0^\infty(G)$ üçün

$$\int_G f(x)\left(D_i^{[l_i]}D_{+i}^{\{l_i\}}\varphi\right)(x)dx=(-1)^{[l_i]}\int_G\varphi(x)\left(D_i^{[l_i]}D_{+i}^{\{l_i\}}f\right)(x)dx$$

bərabərliyini ödəyən $D_i^{\{l_i\}}f$ -ə G oblastında Sobolev mənada kəsr tərtibli ümumiləşmiş törəmə deyilir. Qeyd edək ki, burada oblastda Riman-Liuvill mənada $\{l_i\}$ $(0<\{l_i\}<1)$kəsr tərtibli adi $D_{+i}^{\{l_i\}}f$ və $D_{-i}^{\{l_i\}}f$ törəmələri aşağıdakı kimi təyin olunur :

$$\left(D_{+i}^{\{l_i\}}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\{l_i\})}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{G^{(i)}}\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},s_i,x_{i+1},\ldots x_n)}{(x_i-s_i)^{\{l_i\}}}ds_i,$$

$$\left(D_{-i}^{\{l_i\}}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\{l_i\})}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\overline{G}^{(i)}}\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},s_i,x_{i+1},\ldots x_n)}{(s_i-x_i)^{\{l_i\}}}ds_i,$$

burada x G oblastının daxili nöqtəsidir, $\Gamma(\alpha)$-qamma funksiyadır, $G^{(i)}$ və $\overline{G}^{(i)}$ oblasları aşağıdakı kimi təyin olunur :

$$G^{(i)} = \{(x_1,\dots,x_{i-1}s_i,x_{i+1},\dots x_n)\in G : x_j = const(j\neq i); s_i < x_i\},$$
$$\overline{G}^{(i)} = \{(x_1,\dots,x_{i-1}s_i,x_{i+1},\dots x_n)\in G : x_j = const(j\neq i); x_i < s_i\}.$$

Tərif 0.5. Açıq $G\subset R^n$ çoxluğu o vaxt (A) şərtini ödəyən çoxluq adlanır ki, hər hansı $\theta\in(0,1]^n$, $T\in(0,\infty)$ və hər bir $x\in G$ üçün aşağıdakı xassələrə malik
$\rho(\varphi(t),x)=(\rho_1(\varphi_1(t_1),x),...,\rho_n(\varphi_n(t_n),x))$, $0\le t_j\le T_j$, $j=1,2,...,n$
vektor- funksiyası mövcud olsun:

1) hər bir $j=1,2,...,n$ üçün $\rho(\varphi_j(t_j),x)$ funksiyaları $[0,T_j]-$də mütləq kəsilməz olsun və sanki hər bir $u\in[0,T_j]$ üçün $|\rho'_j(u_j,x)|<1$, burada $\rho'_j(u_j,x)=\frac{\partial}{\partial u_j}(\rho_j(u_j,x))$;

2) hər bir $j=1,2,...,n$ üçün
$$\rho_j(0,x)=0,\ x+V(x,\theta)=x+\bigcup_{\substack{0\le t_j\le T_j,\\ j=1,2,...,n}}[\rho(\varphi(t),x)+\varphi(t)\theta I]\subset G,$$

Xüsusi halda, $t_j=t$ $(j=1,2,...,n)$ olarsa, onda $x+V(x,\theta)$- çoxluğunu "çevik $\varphi-$buynuz" şərtini ödəyən, çoxluq adlandıracağıq,

Əgər $\varphi(t)=t^\lambda$ $(t^\lambda=(t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},...,t^{\lambda_n}))$ $\theta_j=\theta^{\lambda_j}$ $(j=1,...,n)$ olarsa, onda $x+V(x,\lambda,\theta)$ çoxluğu "çevik $\lambda-$buynuz" şərtini ödəyən çoxluq olacaqdır. "Çevik $\lambda-$buynuz" şərtini ödəyən çoxluqlar sinfi O.V.Besov tərəfindən təyin olunmuşdur.

Bundan sonar $(\varphi(t)=\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ funksiyalarının $(0,T)-$ də diferensiallanan olduğunu fərz edəcəyik.

Teorem 0.1. Tutaq ki, $G\subset R^n$ "çevik φ-buynuz" şərtini ödəyir, $1\le p^i\le p\le\infty$, $(i=0,1,...,n)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$, $\nu_j\ge 0$ tamdırlar $(j=1,...,n)$ və tutaq ki, $\nu_j\ge l_j^0$; $\nu_j\ge l_j^i$ $(j\neq i=1,...,n)$,

$$Q_T^i = \int_0^T \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j^i - \nu_j - (1-\beta_j p^i)\left(\frac{1}{p^i} - \frac{1}{p}\right)} \prod_{j \in e_{l^i}} \frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} dt < \infty.$$

və $f \in \bigcap_{i=0}^n L_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G)$.

Onda aşağıdakı daxilolma faktı $D^\nu : \bigcap_{i=0}^n L_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G) \to L_{p,\psi,\beta^1}(G)$ doğrudur. Başqa sözlə, $f \in \bigcap_{i=0}^n L_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G)$ üçün ümumiləşmiş $D^\nu f$ qarışıq törəmələri var və aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur

$$\left\| D^\nu f \right\|_{q,G} \le C_1 \sum_{i=0}^n | Q_T^i | \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i,\varphi,\beta;G}$$

$$\left\| D^\nu f \right\|_{p,\psi,\beta^1;G} \le C_2 \|f\|_{\bigcap_{i=0}^n L_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G)}, \quad (p^i \le p < \infty),$$

Xüsusi halda, əgər

$$Q_{T,0}^i = \int_0^T \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j^i - \nu_j - (1-\beta_i p)\frac{1}{p^i}} \prod_{j \in e_{l^i}} \frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} dt < \infty,$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

olarsa, onda ümumiləşmiş $D^\nu f(x)$ qarışıq törəmələri G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x \in G} | D^\nu f(x) | \le C_1 \sum_{j=1}^n | Q_{T,0}^i | \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i,\varphi,\beta,G}$$

burada $0 < T \le \min\{1, T_0\}$, T_0 qeyd olunmuş müsbət ədəddir; $\psi \in N$, $\varphi_j(t) \le \psi_j(t)$, $\beta_j^1 = \dfrac{\beta_j p}{p^i}$, $j = 1,2,\ldots,n$ C_1 və C_2 sabitləri f-dən asılı olmayan müsbət ədədlərdir, C_1 sabiti həm də T-dən asılı deyil.

Teorem 0.2. Tutaq ki, $G \subset R^n$ "çevik λ-buynuz" şərtini ödəyən açıq məhdud çoxluqdur,

$$1 < p^i < p \le \infty,\ |\chi| \le \frac{|\lambda|}{1+a};\ \ \nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n),\ \nu_j \ge 0,$$

$(j = 1,2,...,n)$ tam ədədlərdir və tutaq ki,

$$\nu_j \ge l_j^0,\ \ \nu_j \ge l_j^i \quad (j \ne i = 1,2,...,n);$$

$$m^i = (l^i, \lambda) - (\nu, \lambda) - (|\lambda| - |\chi| - |\chi| a)\left(\frac{1}{p^i - \varepsilon} - \frac{1}{p - \varepsilon}\right) > 0$$

$$(i = 1,2,...,n)$$

və $f \in \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i),\chi,a}(G)$.

Onda aşağıdakı daxilolma faktı doğrudur:

$D^\nu : \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i),\chi,a}(G) \to L_{p-\varepsilon}(G)$, daha dəqiq desək, $f \in \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i),\chi,a}(G)$ üçün ümumiləşmiş $D^\nu f$ qarışıq törəmələri var və

$$\left\| D^\nu f \right\|_{p-\varepsilon,G} \le C^1(\varepsilon) \sum_{i=0}^{n} T^{m^i} \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i),\chi,a;G}.$$

Xüsusi halda, əgər

$$m^{i,0} = (l^i, \lambda) - (\nu, \lambda) - (|\lambda| - |\chi| - |\chi| a)\frac{1}{p^i - \varepsilon} > 0,$$

$$(i = 1,2,....,n),$$

olarsa, onda ümumiləşmiş $D^\nu f$ törəmələri G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x \in G} \left| D^\nu f(x) \right| \le C^1(\varepsilon) \sum_{i=0}^{n} \prod_{j \in e_n} T^{m^i,0} \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i),\chi,a;G},$$

burada $0 < T \le d_0$, $C^1(\varepsilon) = C^1 \varepsilon^{-\frac{1}{p^i - \varepsilon}}$; $C^1 = \max\{C^0, C^1, \ldots, C^n\}$– sabiti f, T və ε-dan asılı olmayan müsbət ədəddir.

Birinci fəsildə həmçinin uyğun olaraq Teorem 0.1 və Teorem 0.2-nin şərtləri daxilində ümumiləşmiş Sobolev-Morri və qrand Sobolev-Morri fəzalarından olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələrinin Hölder şərtini ödəməsi isbat olunur. Qeyd edək ki, qrand Sobolev-Morri halı üçün "hamarlıq göstəricisinin" əvvəlki işlərdə olan "hamarlıq göstəricisindən" yüksək olması göstərilir.

Teorem 0.3. Tutaq ki, $G \subset R^n$, "çevik φ - buynuz" şərtini ödəyir, $1 \le p^i \le p \le \infty$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, $\nu_j \ge 0$ $j = 1,2,...,n$ tamdırlar, $\nu_j \ge l_j^0$, $\nu_j \ge l_j^i$ $(j \ne i = 1,2,...,n)$, $\nu_i < l_i^i$ $(i = 1,2,...,n)$; $Q_T^i < \infty$ $(i = 1,2,....,n)$ və tutaq ki, $f \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G_\varphi)$. O zaman aşağıdakı daxilolma faktı doğrudur $D^\nu : \bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G_\varphi) \to \mathscr{L}_{q,\psi,\beta^1}(G)$, başqa sözlə, $f \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathscr{L}_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G_\varphi)$ üçün ümumiləşmiş $D^\nu f$ qarışıq törəmələri var və aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur

$$\left\| D^\nu f \right\|_{p,G} \le C_1 \sum_{i=0}^{n} | H_T^i | \sup_{0<t<t_0} \left\| \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-l_j^i} \Delta^{m^i}(\varphi\ (t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p,\varphi,\beta}$$

$$\left\| D^\nu f \right\|_{p,\psi,\beta^1;G} \le C_2 \left\| f \right\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,\varphi,\beta}^{<l^i>}(G_\varphi)}, \quad p^i \le p < \infty,$$

Xüsusi halda

$$Q_{T,0}^i = \int_0^T \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-\nu_j - (1-\beta_j p)\frac{1}{p}} \prod_{j \in e_{l^i}} \frac{\varphi_i'(t)}{(\varphi_i(t))^{1-l_j^i}} dt < \infty$$

olduqda, $D^\nu f(x)$ G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x\in G} | D^\nu f(x) | \le C_1 \sum_{i=1}^{n} | H_{T,0}^i | \sup_{0<t<t_0} \left\| \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-l_j^i} \Delta^{m^i}(\varphi\ (t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p^i,\varphi,\beta}.$$

Burada

$$H_T^i=\begin{cases}\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(T))^{-\nu_j-\left(1-\beta_j p^0\right)\left(\frac{1}{p^0}-\frac{1}{p}\right)}, & i=0\\ Q_T^i & i=1,2,...,n\end{cases}$$

$$\left(H_{T,0}^i=\begin{cases}\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(T))^{-\nu_j-\left(1-\beta_j p^0\right)\frac{1}{p^0}}, & i=0\\ Q_{T,0}^i & i\neq 1,2,...,n\end{cases}\right)$$

və $0<T\le\min\{1,T_{0j}\}$, T_0 qeyd edilmiş müsbət ədəddir, C_1,C_2 sabitləri $f-$dən, C_1 isə həmçinin T-dən asılı olmayan müsbət ədədlərdir.

Teorem 0.4. Tutaq ki, Teorem 0.3 -in bütün şərtləri ödənilir. Onda $Q_T^i<\infty$ $(i=1,2,....,n)$ üçün ümumiləşmiş $D^\nu f$ qarışıq törəmələri G oblastında ümumiləşmiş Holder şərtini ödəyir, yəni aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur

$$\left\|\Delta(\gamma,G)D^\nu f\right\|_{p,G}\le C\|f\|_{\bigcap\limits_{i=0}^{n}L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G_\varphi)}|H(|\gamma|,\varphi;T)|,$$

burada C sabiti $f,|\gamma|$ və T-dən asılı olmayan müsbət ədəddir.

Xüsusi halda $Q_{T,o}^i<\infty$ $i=1,2,....,n$ olduqda, onda

$$\sup_{x\in G}\left|\Delta(\gamma,G)D^\nu f(x)\right|\le C\|f\|_{\bigcap\limits_{i=0}^{n}L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G_\varphi)}|H_0(|\gamma|,\varphi;T)|,$$

burada

$$|H(|\gamma|,\varphi:T)|=\max_i\{|\gamma|,Q'^i_{|\gamma|},\ Q'^i_{|\gamma|,T}\}$$

$$\left(|H_0(|\gamma|,\varphi:T)|=\max_i\{|\gamma|,Q'_{|\gamma|,0},\ Q'_{|\gamma|,T,0}\}\right)$$

Teorem 0.5. Tutaq ki, G oblastı R^n-ə daxil olan “çevik λ $(\lambda\in 0,\infty)^n)$ buynuz” şərtini ödəyən açıq məhdud çoxluqdur,

$$1 < p < q \le \infty;\ 0 \le |\chi| \le \frac{|\lambda|}{1+a};\ \nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n),$$

$$\nu_j \ge 0\ (j = 1,2,\ldots,n);\ \overline{\mu_i} > 0\ (i = 1,2,\ldots,n) \text{ və } f \in W^l_{p),a.\chi}(G).$$

Onda hər bir $0 < \varepsilon < p-1$ üçün $D^\nu : W^l_{p),a.\chi}(G) \to L_{q-\varepsilon}(G)$ doğrudur. Başqa sözlə, aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur

$$\left\| D^\nu f \right\|_{q-\varepsilon,G} \le C(\varepsilon)\left(T^{\overline{\mu_0}} \|f\|_{p),a,\chi;G} + \sum_{i=1}^{n} T^{\overline{\mu_i}} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p),a,\chi;G} \right),$$

harada ki, $\overline{\mu_0} = \overline{\mu_i} - \lambda_i l_i$.

Xüsusi halda, əgər

$$\overline{\mu_{i,0}} = \lambda_i l_i - |\nu,\lambda| - \left(|\lambda| - |\chi| - |\chi| a\right)\frac{1}{p-\varepsilon} > 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

olarsa, onda $D^\nu f(x)$ G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x\in G}\left| D^\nu f(x) \right| \le C(\varepsilon)\left(T^{\overline{\mu_{0,0}}} \|f\|_{p),a,\chi;G} + \sum_{i=1}^{n} T^{\overline{\mu_{i,0}}} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p),a,\chi;G} \right),$$

harada ki, $0 < T \le \min\{T_0, 1\}$, T_0, T_0 qeyd olunmuş müsbət ədəddir; $C(\varepsilon) = C\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}$ və C isə f, T, ε-dan asılı olmayan müsbət sabit ədəddir. Daha sonra bu daxilolma faktının kompaktlığı və bu fəzadan olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələrinin Hölder şərtini ödəməsi isbat olunur.

İkinci fəsildə isə "hamarlıq göstəriciləri" 2^n sayda olan Sobolev-Morri $\bigcap_{i=1}^{2^n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$ və qarışıq törəmələri dominant olan grand grand Sobolev-Morri $S^l_{p),\chi),a,\alpha}W(G)$ fəzaları öyrənilir. Daha doğrusu, əvvəlcə bu fəzalar qurulur, sonra isə bu fəzalardan olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələri üçün Sobolev tipli bərabərsizliklər isbat olunur. Sonda isə birinci fəsildə daxilolma nöqteyi nəzərincə araşdırılan ümumiləşmiş Nikolski-Morri tipli fəzaların kəsişməsinə daxil olan funksiyaların diferensial, və diferensial-fərq xassələri haqqında bir sıra teoremlər isbat olunur.

Tərif 0.6. $G \subset R^n$ oblastında təyin olunmuş, lokal cəmlənən ümumiləşmiş $D^{l^i} f \quad (i = 1,2,...,2^n)$ qarışıq törəmələrə malik və

$$\|f\|_{\bigcap\limits_{i=1}^{2^n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i,\varphi,\beta;G}$$

sonlu norması olan f funksiyalar çoxluğuna "hamarlıq göstəriisi" 2^n sayda olan ümumiləşmiş Sobolev-Morri $\bigcap\limits_{i=1}^{2n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$ fəzası deyilir. Burada

$$\|f\|_{p^i,\varphi,\beta,G} = \|f\|_{L_{p^i,\varphi,\beta}(G)} = \sup_{\substack{x \in G,\\ t_j > 0,\\ j=1,2,...,n}} \left(\prod_{j=1}^{n} (\varphi_j([t_j]_1))^{-\beta_j} \|f\|_{p^i,G_{\varphi(t)}(x)} \right),$$

$1 \le p^i < \infty,\ l^i = (l_1^i, l_2^i, ..., l_n^i),\ i = 1,2,...,2^n,\ e_n = \{1,2,...,n\},\ e^i \subseteq e_n$

(bütün mümkün olan e^i vektorların sayı 2^n-dir),

$l_j^i \in N,\ j \in e^i,\ l_j^i \in N_0,\ j \in e^n \setminus e^i;\ \beta_j \in [0,1],\ j \in e_n;$

$\varphi(t) = (\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2), ..., \varphi_n(t_n))$ vektor-funksiyaları Lebeq mənada ölçülən funksiyalardır, $\varphi_j(t_j) > 0\ (t_j > 0)$, $\lim\limits_{t_j \to +0} \varphi_j(t_j) = 0$,

$\lim\limits_{t_j \to +\infty} \varphi_j(t_j) = K_j,\ 0 < K_j \le \infty,\ [t_j]_1 = \min\{1, t_j\},\ j \in e_n$.

Tərif 0.7. Məhdud $G \subset R^n$ oblastında təyin olunmuş, lokal cəmlənən ümumiləşmiş $D^{l^e} f \ (l^e = (l_1^e, l_2^e, ..., l_n^e),\ l_j^e \in N,\ j \in e \subseteq e_n)$ qarışıq törəmələrə malik və

$$\|f\|_{S_{p),\chi),a,\alpha}W(G)} = \sum_{e \subseteq e_n} \left\| D^{l^e} f \right\|_{p),\chi),a,\alpha;G},$$

sonlu norması olan f funksiyalar çoxluğuna qarışıq törəmələri dominant olan qrand qrand Sobolev-Morri $S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G)$ fəzası deyilir, burada

$$\|f\|_{p),\chi),a,\alpha;G} == \sup_{\substack{x\in G \\ 0<t_j\le d_j \\ 0<\varepsilon<s_m}} \left(\frac{1}{\prod_{j\in e_n} t_j^{\chi_j a-\alpha_j\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\left|G_{t^{\chi}}^{(x)}\right|} \int_{G_{t^{\chi}}(x)} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

d_j $(j\in e_n)$ n-ölçülü $I_{t^{\chi}}(x)$ düzbucaqlı parallelepipedin dioqanallarıdır; $1<p<\infty$; $s_m=\min\{s_1,...,s_m\}$,

$$s_j=\min\left\{p-1, \frac{\chi_j a}{\alpha_j}\right\}, \ \alpha_j\ge 0 \quad (j\in e_n); \ \chi\in(0,\infty)^n; \ a\in[0,1]$$

(burada, $\frac{0}{0}$ nisbətini "0" qəbul edirik).

Əvvəlcə $G\subset R^n$ oblastı (A) şərtini ödəyən halda daxil olunan $\bigcap_{i=1}^{2^n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)$ fəzasından olan funksiyalar üçün $D^{\nu}:\bigcap_{i=1}^{2^n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G)\to L_{p^i,\varphi,\beta^1}(G)$ daxilolma faktı və bu fəzadan olan funksiyaların ümumiləşmiş törəmələrinin Hölder şərtini ödəməsi isbat olunur.

Sonra grand grand Sobolev-Morri $S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G)$-dan olan funksiyalar üçün aşağıdakı teoremlər isbat olunur.

Teorem 0.6. Tutaq ki, məhdud $G\subset R^n$ oblastı (A) şərtini ödəyir, $1<p<q\le\infty$, $\chi_j\le\frac{1}{1+a}$, $\nu=(\nu_1,...,\nu_n)$, $\nu_j\ge 0$ $(j\in e_n)$ tam ədədlərdir;

$$\mu_j=l_j-\nu_j-(1-\chi_j-\chi_j a_j+\alpha_j\varepsilon)\left(\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{q-\varepsilon}\right)>0 \quad (j\in e_n)$$

və tutaq ki, $f \in S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G)$. O zaman

$$D : S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G) \to L_{q-\varepsilon}(G) \quad (0 < \varepsilon < s_m),$$

yəni $f \in S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G)$ üçün ümumiləşmiş $D^{\nu} f$ qarışıq törəmələri var və

$$\left\| D^{\nu} f \right\|_{q-\varepsilon, G} \le C(\varepsilon) \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e_n} T_j^{s_{e,j}} \left\| D^{l^e} f \right\|_{p),\chi),a,\alpha;G}$$

bərabərsizliyi doğrudur.
Burada

$$s_{e,j} = \begin{cases} \mu_j, \; j \in e \\ \nu_j - (1 - \chi_j - \chi_j a + \alpha_j \varepsilon)\left(\dfrac{1}{p-\varepsilon} - \dfrac{1}{q-\varepsilon} \right), \quad j \in e' = e_n \setminus e. \end{cases}$$

Xüsusi halda. əgər

$$\mu_{j,0} = l_j - \nu_j - (1 - \chi_j - \chi_j a + \alpha_j \varepsilon) \frac{1}{p-\varepsilon} > 0 \quad (j \in e_n),$$

olarsa, onda ümumiləşmiş, $D^{\nu} f$ qarışıq törəmələri G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x \in G} \left| D^{\nu} f(x) \right| \le C(\varepsilon) \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e_n} T_j^{s_{e,j,0}} \left\| D^{l_e} f \right\|_{p),\chi),a,\alpha;G},$$

burada $0 < T_j \le d_j \quad (j \in e_n), C(\varepsilon)$ f və $T = (T_1, ..., T_n)$ -dən asılı olmayan sabitdir.

Teorem 0.7. Tutaq ki, teorem 0.6-ın bütün şərtləri ödənilir. Onda $\mu_j > 0 \;\; (j \in e_n)$ olarsa, ümumiləşmiş $D^{\nu} f$ qarışıq törəmələri $L_{q-\varepsilon}(G)$–də verilən metrika ilə σ_j eksponenti ilə Hölder şərtini ödəyir, daha dəqiq desək,

$$\left\| \Delta(\xi, G) D^{\nu} f \right\|_{q-\varepsilon, G} \le C(\varepsilon) \left\| f \right\|_{S^{l}_{p),\chi),a,\alpha}W(G)} \prod_{j \in e_n} \left| \xi_j \right|^{\sigma_j},$$

burada $\sigma_j \;\; (j \in e_n)$ ədədləri

$0 \le \sigma_j \le 1 \quad$ əgər $\quad \mu_j > 1, \;\; j \in e,$

$0 \le \sigma_j < 1$ əgər $\mu_j = 1, \; j \in e; \quad 0 \le \sigma_j \le 1, \; j \in e' = e_n \setminus e,$

$0 \le \sigma_j \le \mu_j$ əgər $\mu_j < 1, \; j \in e;$

bərabərsizliklərini ödəyən ixtiyari ədədlərdir.

Xüsusi halda, əgər $\mu_{j,0} > 0 \;\; (j \in e_n)$ olarsa, onda

$$\sup_{x \in G} \left| \Delta(\xi, G) D^{\nu} f(x) \right| \le C(\varepsilon) \| f \|_{S^{l}_{p),\chi),a,\alpha} W(G)} \prod_{j \in e_n} \left| \xi_j \right|^{\sigma_{j,0}} ,$$

burada $\sigma_{j,0}$ ədədləri σ_j ilə eyni şərtləri ödəyir, lakin μ_j əvəzinə $\mu_{j,0}$ götürülür.

Bu fəsildə həmçinin ümumiləşmiş Nikolski-Morri fəzalarından olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələri üçün interpolyasiya tipli teoremlər isbat olunur.

Sonda məsələnin qoyuluşuna, işə daimi diqqətinə və dəyərli məsləhətlərinə görə elmi rəhbərim prof. A.M.Nəcəfova dərin təşəkkürümü bildirirəm.

Nəticə

Dissertasiya işində əvvəlcə yeni çoxdəyişənli diferensialla-nan funksiyaların parametrli fəzaları daxil olunmuşdur. Sonra isə inteqral göstərilişi üsulu ilə bu fəzalardan olan funksiyaların həm diferensial, həm də diferensial-fərq xassələri öyrənilmişdir.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- yeni Morri tipli fəzalar daxil olunmuşdur;
- daxil olunan fəzalarda həm daxilolma, həm də interpolyasiya tipli teoremlər isbat olunmuşdur;
- bu fəzalardan olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələrinin ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəməsi isbat olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Babayev, R.F. The embedding theorems in generalized Sobolev-Morrey type space//"Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Sumqayıt: -25-26 May, -2017, -s.30-31.
2. Najafov, A.M., Babayev, R.F. Some properties of functions from generalized Sobolev-Morrey type spaces.//Mathematica Aeterna, -2017. v.7, № 3, -p. 301-311.
3. Babayev, R.F. Qarışıq törəmələri dominant olan ümumiləşmiş Sobolev-Morri fəzalarında daxilolma teoremləri // Azərbaycanda Təhsil Siyasətinin Prioritetləri: Müasir yanaşmalar elmi konfransın mater. -Mingəçevir: -15-16 Dekabr, -2017, -s.77-78
4. Babayev, R.F. The embedding theorems in generalized Sobolev-Morrey type space with dominanat mixed derivatives // "Operators, functıons and systems of mathematıcal physıcs" conference, - 21-24 May -2018, –Baku: Khazar University, -p.126.
5. Babayev, R.F. Some differential properties of generalized nikolskii-morrey type spaces // -Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, -2018. v. 6, № 2, -p. 110-119.
6. Orujova, A.T., Babayev, R.F. On embedding theorems in Sobolev-Morrey type spaces// -Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, Univ. Engineering, -2018. v. 8, №1. –s. 7-16.
7. Babayev, R.F. Poincare type inequality in generalized Sobolev-Morrey type spaces. // Kutahya Dumlupinar University, OMTSA-2019, -Turkey: -p.27.
8. Babayev, R.F. Some differential properties of grand generalized Sobolev-Morrey spaces //-Baku: Trans. of ANAS, ser. phys.-tech. math. sci. mathematics, -2020. v.40, №4, -p.49-57.
9. Najafov, A.M., Babayev, R.F. On embedding of grand grand Sobolev-Morrey spaces with dominant mixed derivatives.// Tbilisi Math. Jour., -2020. p.1-10, doi:10.32513/Tbilisi/158501521
10. Najafov, A.M., Babayev, R.F. On some differential properties of grand Sobolev-Morrey spaces of fractional order // Uzb. Math. Jour. -2021. v.65, Issue 2, -p.128-139

Dissertasiyanın müdafiəsi **17 iyun 2022-ci il tarixində saat $\mathbf{14^{00}}$** –da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **12 may 2022-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 06.05.2022
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 38272
Tiraj: 100