AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazma hüququnda

SƏRHƏD ŞƏRTİNİN VASİTƏSİ İLƏ İDARƏ OLUNAN QURSA - DARBU SİSTEMLƏRİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

İxtisas: 1203.01- Kompüter elmləri

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Vüsalə Abdulla qızı Süleymanova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2022

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Kamil Bayraməli oğlu Mənsimov

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Rafiq Qələndər oğlu Tağıyev

riyyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Rəşad Oqtay oğlu Məstəliyev

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Rəşad Sirac oğlu Məmmədov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Qalina Yuryevna Mehdiyeva

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
fizika-riyaziyyat namizədi, dosent
Elxan Nəriman oğlu Səbziyev

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Vaqif Rza oğlu İbrahimov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. XX əsrin ortalarından başlayaraq elm və texnikanın, həmçinin iqtisadiyyatın intensiv inkişafı ilə əlaqədar olaraq müxtəlif idarə olunan proseslərin optimal idarə olunması məsələlərinin həll olunmasının zəruriliyi yarandı. Bu illər ərzində klassik variasiya hesabının nəticələrini ümumiləşdirən əsas nəticələr alındı. İlk növbədə Pontryaginin maksimum prinsipi, Bellmanın dinamik proqramlaşdırma üsulu, Milyutin və Dubovitskinin ümumi ekstremum nəzəriyyəsi işlənib hazırlandı. Bu nəzəriyyələrdə baxılan optimal idarəetmə məsələlərində bir çox hallarda müxtəlif məhdudiyyətlərin olmasını nəzərə alırdılar. Buna görə də adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri ilə yanaşı, xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan və daha mürəkkəb olan optimal idarəetmə məsələlərinin (paylanmış parametrli optimal idarəetmə məsələləri) öyrənilməsinə başlanıldı.

Paylanmış parametrli müxtəlif optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə V.M.Abdullayevin, K.R.Aydazadənin, K.R.Aydazadə və V. M. Abdullayevin, A. Q. Butkovskinin, A. V. Fursikovun, S. S. Haxıyevin, A. D. İskəndərovun, H. F.Quliyevin, İ.Q.Məmmədovun, K. B. Mənsimovun, K.B.Mənsimov və M.C. Mərdanovun, T.Q.Məlikovun, A.A. Niftiyevin, M.A.Sadıqovun, Y.Ə.Şərifovun, R.Q.Tağıyevin, F.P. Vasilyevin, M.H.Yaqubovun, A.İ.Yeqorov və L.N.Znamenskayanın və başqalarının işləri həsr olunmuşdur.

Mütəxəssislər içərisində çox böyük maraq və diqqət doğuran məsələlərdən biri ikinci tərtib hiperbolik tip tənliklər sistemi və Qursa sərhəd şərtləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləridir. A.İ.Yeqorovun klassik işlərindən başlayaraq indiyə qədər Qursa-Darbu sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin bəzi aspektləri (idarə olunma, müşahidə olunma, optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər, ədədi həll üsulları və başqaları) intensiv olaraq işlənilir. Bu sahədə E.P.Bokmelder və V.A.Dıxtanın, F.Ş.Əhmədovun, S.S.Haxıyev və Q.T.Əhmədovun, S.S.Haxıyevin, K. Q. Həsənovun, İ. V. Lisaçenkonun, A. S. Matveyevin, K. B. Mənsimovun, M.C.Mərdanovun, T.Q. Məlikovun, V.İ.Plotnikovun, N. İ. Poqodayevin, Ə.R.Səfarinin, V.A. Sroçkonun, M.İ.Suminin, V.İ.Suminin, Y.Ə.Şərifovun, F.P. Vasilyevin, O.V.Vasilyevin, A.İ.Yeqorovun və digər alimlərin nəticələri vardır.

Bu günki dövrdə də, Qursa-Darbu sistemləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlərin tapılmasına çox böyük fikir verilir. Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələləri üçün birinci tərtib zəruri şərtlər nəzəriyyəsi, idarəedici funksiya tənliyin sağ tərəfinə daxil olan hallarda kifayət qədər işlənilmişdir. Ancaq analoji optimal idarəetmə məsələləri üçün sərhəd şərtlərinə idarəedici funksiyalar daxil olan hallar çox az öyrənilmişdir. Bundan başqa Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələlərində bir çox hallarda optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər cırlaşaraq öz məzmun və mahiyyətlərini itirirlər. Belə hallara məxsusi hallar, uyğun idarələrə isə məxsusi idarələr (L.İ. Rozonoyerin termini) deyirlər. İndiyə qədər Qursa-Darbu sistemləri üçün sərhəd optimal idarəetmə məsələlərində yüksək tərtib zəruri şərtlər nəzəriyyəsi, xüsusi ilə də məxsusi idarələr nəzəriyyəsi çox az işlənilmişdir. Qeyd olunanlara əsasən bu nəticəyə gələ bilərik ki, Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlərin alınmasına və məxsusi idarənin tədqiq edilməsinə həsr olunmuş dissertasiya işinin mövzusu aktual hesab oluna bilər.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Dissertasiya işinin əsas obyekti Qursa sərhəd şərti ilə təsvir olunan iki tərtibli hiperbolik tip tənliklər sistemi ilə təsvir olunan sərhəd optimal idarəetmə məsələsidir. Bu seçim baxılan optimal idarəetmə məsələlərinin çox böyük praktik əhəmiyyəti ilə bağlıdır. Tədqiqatın predmeti isə baxılan optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün müxtəlif birinci tərtib zəruri şərtlər isbat etmək və onların cırlaşdığı halları (məxsusi hallar) öyrənməkdən ibarətdir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Sərhəd şərhinin köməyi ilə idarə olunan və Qursa-Darbu sistemləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərini tədqiq etmək, optimallıq üçün birinçi tərtib zəruri şərtlər almaq və onların cırlaşdığı halları tədqiq etməkdir.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində qoyulan və tədqiq edilən optimal idarə məsələlərində varasiya hesabının, toplanmış və paylanmış parametrli optimal idarəetmə məsələlərinin keyfiyyət nəzəriyyəsinin üsullarından və artım üsulunun bir variantından istifadə edilir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

-Xətti Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt;

-Qeyri-xətti halda Pontryaginin maksimum prinsipi tipli, xəttiləşdirilmiş maksimum tipli və Eyler tənliyinin analoqu şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər;

-Hamar olmayan keyfiyyət meyarı və hamar olmayan bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyyətlər olan halda optimallıq üçün bəzi birinci tərtib zəruri şərtlər;

-İdarə oblastı açıq olan halda optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər;

-Xəttləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu və kvazi məxsusi idarələrin optimallıq şərtləri;

-Pontryaginin maksimum prinsipinin analoqu və maksimum prinsipi mənada məxsusi idarələrin optimallıq şərtləri;

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiyanın əsas nəticələri və yeniliyi baxılan optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlərdir (baxılan sərhəd optimal idarəetmə məsələləri üçün).

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya nəzəri xarakter daşıyır və yeni nəticələr alınmışdır. Alınmış nəticələr Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd optimal idarəetmə məsələləri üçün yüksək tərtib zəruri şərtlər nəzəriyyəsinin gələcəkdə daha da işlənməsi üçün istifadə edilə bilər. Həmçinin alınmış nəticələrdən praktikada meydana çıxan konkret məsələlərin həllində istifadə edilə bilər.

İşin aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas nəticələri Sumqayıt Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi" kafedrasının, AMEA-nın İdarəetmə sistemləri institutunun "Mürəkkəb dinamik sistemlərdə idarəetmə üsulları" laboratoriyasının elmi seminarlarında məruzə və müzakirə edilmiş, prof.Ə.Ş.Həbibzadənin 100 illiyinə həsr edilmiş (Bakı, 2016) respublika elmi konfransında, “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları” respublika konfransında (Sumqayıt, 2017), “Dinamik sistemlər: dayanıqlıq, idarəetmə, optimallaşdırma” adlı beynəlxalq konfransda (Minsk, 2018), “İnformasiya sistemləri və texnologiyaları: nəaliyyətlər və perspektivlər” beynəlxalq elmi konfransında (Sumqayıt 2018), “Dinamik sistemlər, optimal idarəetmə və riyazi modelləşdirmə” adlı beynəlxalq konfransda (İrkutsk, 2019) məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Dissertasiyanın bütün nəticələri müəllifə məxsusdur. Elmi rəhbərlə çap olunmuş müştərək işlərdə elmi rəhbərə yalnız məsələnin qoyuluşu məxsusdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin 16 elmi işində, o cümlədən 10 məqalə, 6 konfrans materialında çap olunmuşdur. Onların siyahısı isə avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla, dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiyanın titul səhifəsi - 359 işarədən, mündəricat – 3864, giriş - 17422, birinci fəsil - 31389, ikinci fəsil - 28021, nəticə - 984 və 93 adda olan ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi isə 96412 işarədən ibarətdir.

İŞİN QISA MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, iki fəsildən, nəticədən, istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından və dissertasiyada istifadə edilmiş işarələmələrdən ibarətdir.

Girişdə seçilən mövzunun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiyada baxılan məsələlərə yaxın işlərin qısa icmalı verilir, işin məqsədi haqqında məlumat verilir və alınmış nəticələr qısa şərh edilir.

Birinci fəsil 6 paraqrafdan ibarətdir.

Birinci fəsildə sərhəd şərtlərindən biri idarə olunan adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan Qursa-Darbu sistemi ilə optimal idarəetmə məsələlərinə baxılır.

1.1 paraqrafında çoxnöqtəli keyfiyyət meyarlı xətti sərhəd optimal idarəetmə məsələlərinə baxılır və optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi şəklində zəruri və kafi şərt isbat edilir.

Tutaq ki, idarə olunan proses $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ düzbucaqlısında

$$z_{tx} = A(t,x)z + B(t,x)z_t + C(t,x)z_x + f(t,x), \qquad (1)$$

xətti hiperbolik tənliklər sistemi və

$$\begin{gathered} z(t, x_0) = a(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ z(t_0, x) = b(x), \quad x \in [x_0, x_1], \\ a(t_0) = b(x_0) = a_0 . \end{gathered} \qquad (2)$$

sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur.

Burada $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ – verilmiş, ölçülən və məhdud $(n \times n)$ - ölçülü matris-funksiyalar, $f(t,x)$ – verilmiş arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz, n - ölçülü vektor-funksiya, a_0 – verilmiş sabit vektor, $b(x)$ – verilmiş n - ölçülü mütləq kəsilməz vektor-funksiya, $a(t)$ - isə n - ölçülü vektor-funksiya olub

$$\dot{a} = D(t)a(t) + g(t,u), \quad t \in [t_0, t_1], \qquad (3)$$

$$a(t_0) = a_0\,,$$

Koşi məsələsinin həlli kimi təyin olunur.

Burada $D(t)$ - verilmiş, $(n \times n)$ ölçülü ölçülən və məhdud matris-funksiya, $g(t,u)$ - verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz n - ölçülü vektor-funksiya, $u(t) - r$ - ölçülü ölçülən və məhdud idarəedici vektor-funksiya olub öz qiymətlərini verilmiş boş olmayan və məhdud $U \subset R^r$ çoxluğundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{4}$$

Bu məhdudiyyətləri ödəyən hər bir $u(t)$ vektor-funksiyasına mümkün idarə deyəcəyik.

Fərz edilir ki, hər bir mümkün $u(t)$ idarəsinə (1) - (2) Qursa məsələsinin yeganə və mütləq kəsilməz $z(t,x)$ həlli, (3) Koşi məsələsinin isə yeganə, mütləq kəsilməz $a(t)$ həlli uyğundur.

Tutaq ki, (T_i, X_i), $i = \overline{1,k}$ -lər $(t_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_k \le t_1;\ x_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k \le x_1) -$ verilmiş nöqtələr, c_i, d_i, $i = \overline{1,k}$ - lər isə verilmiş n - ölçülü sabit vektorlardır. Yuxarıda verilmiş (1) - (2) sərhəd məsələsinin və (3) Koşi məsələsinin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində təyin olunmuş

$$I(u) = \sum_{i=1}^{k} \left[c_i' z(T_i, X_i) + d_i' a(T_i) \right], \tag{5}$$

funksionalının minimumunun tapılması məsələsinə baxaq.

Bu (5) funksionalına (1) - (4) məhdudiyyətləri daxilində minimum verən $u(t)$ mümkün idarəsinə optimal idarə, uyğun $(u(t), a(t), z(t,x))$ prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

Tutaq ki, $(u(t), a(t), z(t,x))$ qeyd olunmuş mümkün proses, $\alpha_i(t,x), i = \overline{1,k}$ -lər $[t_0, T_i] \times [x_0, X_i]$, $i = \overline{1,k}$ düzbucaqlılarının xarakteristik funksiyaları, $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,k}$ - lər isə $[t_0,T_i]$, $i=\overline{1,k}$ parçalarının xarakteristik funksiyalarıdır.

Fərz edək ki, n ölçülü $\psi(t,x)$ və $p(t)$ vektor funksiyaları

$$\psi(t,x) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t,x)c_i + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} A'(\tau,s)\psi(\tau,s)ds\,d\tau + \int_x^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)ds +$$

$$+\int_t^{t_1} C'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau,$$

$$p(t) = -\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)d_i - \sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)c_i + \int_t^{t_1} D'(\tau)p(\tau)d\tau + \int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1}(A'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau)dx +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)dx$$

xətti, Volterra tipli inteqral tənliklər sisteminin həllidirlər.

$$H(t,u,p) = p'g(t,u)$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funksiyasının analoqunu daxil edək. Artım üsulunun vasitəsi ilə aşağıdakı hökm isbat edilmişdir.

Teorem 1. Baxılan (1) - (5) optimal idarəetmə məsələsində $u(t)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt

$$H(\theta,v,p(\theta)) - H(\theta,u(\theta),p(\theta)) \le 0,$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $\theta\in[t_0,t_1)$ və $v\in U$ üçün ödənməsidir. Burada və sonralar $\theta\in[t_0,t_1)$ $u(t)$ mümkün idarəsinin ixtiyari düzgün (Lebeq) nöqtəsidir.

Keyfiyyət meyarı qeyri-xətti və qabarıq funksional olan halda maksimum şərtinin kafi olması isbat edilmişdir.

1.2 paraqrafında

$$S(u) = \varphi(z(T_1,X_1),\ldots,\ z(T_k,X_k)) + G(a(T_1),\ldots,\ a(T_k)) \tag{6}$$

çoxnöqtəli funksionalının

$$u(t)\in U \subset R^r,\ t\in[t_0,t_1] \tag{7}$$

$$z_{tx} = B(t,x)z_t + f(t,x,z,z_x),(t,x)\in D = [t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{8}$$

$$z(t, x_0) = a(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$z(t_0, x) = b(x), \quad x \in [x_0, x_1], \qquad (9)$$
$$a(t_0) = b(x_0) = a_0,$$
$$\dot{a} = g(t, a, u), \quad t \in [t_0, t_1], \qquad (10)$$
$$a(t_0) = a_0. \qquad (11)$$

məhdudiyyətlərin daxilində minimumun tapılması məsələsinə baxılır. Burada $B(t, x)$ - verilmiş, ölçülən və məhdud $(n \times n)$ ölçülü matris-funksiya, $f(t, x, z, z_x)$, ($g(t, a, u)$) – verilmiş, n-ölçülü, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən (z, z_x) (a) - ya görə törəmələri ilə birlikdə z kəsilməz vektor-funksiya, $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_k)$, $G(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – verilmiş, kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, (T_i, X_i) , $i = \overline{1, k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_k \le t_1;\ x_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k \le x_1)$ – verilmiş nöqtələr, $b(x)$- verilmiş mütləq kəsilməz *n*-ölçülü vektor-funksiya t_0, t_1, x_0, x_1 – $(t_0 < t_1;\ x_0 < x_1)$ – verilmiş ədədlər, a_0 – verilmiş sabit vektor, $u(t)$ – r - ölçülü ölçülən və məhdud idarəedici vektor-funksiya, U – verilmiş, boş olmayan və məhdud çoxluqdur.

Yuxarıda qoyulan hər bir məhdudiyyəti ödəyən idarəedici vektor-funksiyaya mümkün idarə deyəcəyik.

Fərz edilir ki, hər bir mümkün $u(t)$ idarəsinə (6) - (9) sərhəd məsələsinin yeganə mütləq kəsilməz $z(t, x)$ həlli, (10) - (11) Koşi məsələsinin isə mütləq kəsilməz $a(t)$ həlli uyğundur. Verilmiş (6) funksionalına (7) - (11) məhdudiyyətləri daxilində minimum verən $u(t)$ mümkün idarəsinə optimal idarə, $(u(t), a(t), z(t, x))$ – prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

İndi

$$H(t, x, z, z_t, z_x, \psi) = \psi' f(t, x, z, z_x)$$
$$M(t, a, u, p) = p' g(t, a, u)$$

Hamilton-Pontryagin funksiyalarını daxil edək.

Burada $\psi(t,x)$ və $p(t)$ n - ölçülü vektor-funksiyalar olub

$$\psi(t,x) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t,x) \frac{\partial \varphi\left(z(T_1, X_1),\ldots, z(T_k, X_k)\right)}{\partial z_i} +$$

$$+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z(\tau, s, z(\tau,s), z_s(\tau,s), \psi(\tau,s))\,ds\,d\tau +$$

$$+\int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau, x, z(\tau,x), z_x(\tau,x), \psi(\tau,x))\,d\tau + \int_x^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)\,ds,$$

$$p(t) = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i(t) \frac{\partial G\left(a(T_1),\ldots, a(T_k)\right)}{\partial a_i} - \sum_{i=1}^{k} \beta_i(t) \frac{\partial \varphi\left(z(T_1, X_1),\ldots, z(T_k, X_k)\right)}{\partial z_i} +$$

$$+\int_t^{t_1} M_a(\tau, a(\tau), u(\tau), p(\tau))\,d\tau + \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)\,dx +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1} H_z(\tau, x, z(\tau,x), z_x(\tau,x), \psi(\tau,x))\,d\tau\,dx$$

Volterra tipli inteqral tənliklər sistemlərinin həllidirlər.

Burada $\alpha_i(t,x)$, $i=\overline{1,k}$ -lər $[t_0, T_i] \times [x_0, X_i]$, $i=\overline{1,k}$ düzbucaqlılarının xarakteristik funksiyaları, $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,k}$ - lər isə $[t_0, T_i]$, $i=\overline{1,k}$ parçalarının xarakteristik funksiyalarıdır.

Teorem 2. Baxılan (6) - (11) optimal idarəetmə məsələsində $u(t)$ mümkün idarənin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\max_{v\in U} M(\theta, a(\theta), v, p(\theta)) = M(\theta, a(\theta), u(\theta), p(\theta))$$

maksimum şərtinin ixtiyari $\theta \in [t_0, t_1)$ üçün ödənməsidir.

Burada $\theta \in [t_0, t_1)$ $u(t)$ mümkün idarənin ixtiyari düzgün nöqtəsidir (Lebeq nöqtəsi).

Bu paraqrafda idarə oblastının qabarıq və açıq olduğu hallar tədqiq edilmişdir. Xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin və Eyler tənliyinin anoloqları isbat edilmişdir.

1.3 paraqrafında

$$S(u)=G(z(t_1,x_1))+\varphi(a(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[D'(t,x)z_t+E(t,x,z,z_x)]dx\,dt \qquad (12)$$

funksionalının

$$u(t)\in U\subset R^r,\qquad t\in T=[t_0,t_1], \qquad (13)$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\quad (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \quad (14)$$

$$z(t,x_0)=a(t),\qquad t\in T=[t_0,t_1],$$

$$z(t_0,x)=b(x),\qquad x\in X=[x_0,x_1], \qquad (15)$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot{a}=g(t,a,u),\quad t\in T, \qquad (16)$$

$$a(t_0)=a_0, \qquad (17)$$

məhdudiyyətlərin daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır[1].

Burada $B(t,x)$ verilmiş, ölçülən və məhdud $(n\times n)$ ölçülü matris-funksiya, $G(z)$ və $\varphi(a)$ verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, $D(t,x)$ verilmiş n - ölçülü ölçülən və məhdud vektor – funksiya, $E(t,x,z,z_x)$ verilmiş arqumentlərinin küllüsünə nəzərən z, z_x - görə törəmələri ilə birlikdə kəsilməz skalyar funksiya, $f(t,x,z,z_x)$ - verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən z, z_x - ə görə törəmələri ilə birlikdə kəsilməz n - ölçülü vektor-funksiya, $b(x)$ – verilmiş n - ölçülü mütləq kəsilməz vektor-funksiya, $g(t,a,u)$ – verilmiş arqumentlərinin küllüsünə nəzərən a - ya görə törəməsi ilə birlikdə kəsilməz n - ölçülü vektor-funksiya,

---

[1]Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Аналог способа разделения множителя Лагранжа на слагаемые в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Пермь: Прикладная математика и вопросы управления. - 2019. № 2, - с. 7-22.

a_0 - verilmiş sabit vektor, U – verilmiş boş olmayan və məhdud çoxluq, $u(t)$ - isə r-ölçülü ölçülən və məhdud idarəedici vektor-funksiyadır (mümkün idarə).

Fərz edilir ki, hər bir mümkün $u(t)$ idarəsinə (16) - (17) Koşi məsələsinin və (14) - (15) Qursa məsələlərinin yeganə mütləq kəsilməz $a(t)$ və $z(t,x)$ həlləri uyğundur

Əvvəllər S.S.Haxıyev Laqranj vuruğunun toplananlara ayırma üsulunun köməyi ilə paylanmış idarəli Qursa-Darbu optimal idarəetmə məsələlərində Pontryaginin maksimum prinsipinin yeni isbatını vermişdir. Bu işdə Laqranj vuruğunun toplananlara ayrılması üsülunun bir variantının köməyilə baxılan sərhəd optimal idarəetmə məsələsində Pontryaginin maksimum şərtinin yeni isbatı verilmişdir.

1.4 paraqrafında

$$u(t)\in U\subset R^r,\qquad t\in T=[t_0,t_1],\tag{18}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1],\tag{19}$$

$$z(t,x_0)=a(t),\qquad t\in T=[t_0,t_1],$$

$$z(t_0,x)=b(x),\qquad x\in X=[x_0,x_1],\tag{20}$$

$$a(t_0)=b(x_0),$$

$$\dot a=F(t,a,u),\ \ t\in T,\tag{21}$$

$$a(t_0)=a_0,\tag{22}$$

məhdudiyyətləri daxilində

$$S(u)=\Phi_1\big(z(T_1,X_1),\dots,z(T_k,X_k)\big)+\Phi_2\big(a(T_1),\dots,a(T_k)\big)\tag{23}$$

funksionalının minimumunu tapılmasına baxılır.

Burada Φ_i $i=\overline{1,2}$ - lər skalyar funksiyalar olub Lipşis şərtini ödəyirlər və ixtiyari istiqamət üzrə törəməyə malikdirlər. İstiqamət üzrə törəmə terminində optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmışdır[2].

1.5 paraqrafında aşağıdakı minimaks məsələsinə baxılır.

---

[2]Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2016. №2, - s. 29-36.

$$S(u) = \max_{y \in Y} \varphi_1(z(t_1, x_1), y) + \max_{\alpha \in A} \varphi_2(a(t_1), \alpha), \tag{24}$$

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \tag{25}$$

$$\dot{a} = F(t, a, u), \quad t \in T, \tag{26}$$

$$a(t_0) = a_0. \tag{27}$$

$$z_{tx} = B(t, x) z_t + f(t, x, z, z_x), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \tag{28}$$

$$\begin{aligned} z(t, x_0) &= a(t), \qquad t \in T, \\ z(t_0, x) &= b(x), \qquad x \in X = [x_0, x_1]. \end{aligned} \tag{29}$$

$$a(t_0) = b(x_0) = a_0.$$

Burada Y və A - verilmiş, uyğun olaraq m və q - ölçülü y və α vektorlarının sonlu çoxluqlarıdır, $\varphi_1(z, y)$ və $\varphi_2(a, \alpha)$ – uyğun olaraq hər bir y və α üçün z və $y - a$ - ya nəzərən kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalardır, baxılan (24) - (29) optimal idarəetmə məsələlərinin digər verilənləri isə onlar üzərinə əvvəlki paraqraflarda qoyulmuş hamarlıq şərtlərinin ödəyirlər.

Bu (24) - (29) tipli optimal idarəetmə məsələləri minimaks optimal idarəetmə məsələləri adlandırırlar (R.Qabasov, V.Alseviç, V.F.Demyanov və başqaları)

İlkin tənliklər sisteminin aşkar xəttiləşdirilməsinə əsaslanan bir sxem vasitəsi ilə baxılan optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün maksimin tipli zəruri şərt isbat edilmişdir.

1.6 paraqrafında da sərhəd optimal idarəetmə məsələləri öyrənilir. Amma bu zaman fərz edilir ki, həm keyfiyyət meyarını, həm də bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyyətləri təsvir edən funksiyalar hamar olmayıb Lipşis şərtini ödəyirlər və ixtiyari istiqamət üzrə törməyə malikdirlər. Baxılan məsələdə artım üsulunun bir variantından istifadə edərək istiqamət üzrə törəmə terminində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərt isbat edilmişdir.

Dissertasiyanın ikinci fəsili dörd paraqrafdan ibarət olub, bir sərhəd optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi və Eyler tənliyinin analoqu şəkilində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlərin alınmasına və məxsusi halların tədqiqinə həsr olunmuşdur.

2.1 paraqrafında

$$S(u)=\varphi\left(a(t_1)\right)+G\left(z(t_1,x_1)\right), \tag{30}$$

funksionalının

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T=[t_0,t_1], \tag{31}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{32}$$

$$\begin{gathered} z(t,x_0)=a(t),\quad t\in T=[t_0,t_1],\\ z(t_0,x)=b(x),\quad x\in X=[x_0,x_1], \end{gathered} \tag{33}$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot a=g(t,a,u),\quad t\in T \tag{34}$$

$$a(t_0)=a_0, \tag{35}$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələlərinə baxılır. Burada $f(t,x,z,z_x)$ və $g(t,a,u)$ verilmiş n - ölçülü vektor-funksiyalar olub, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən uyğun olaraq (z,z_x) və (a,u)-ya görə ikinci tərtib kəsilməz törəmələrə malikdirlər, $\varphi(a)$ və $G(z)$ – verilmiş iki dəfə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, U - verilmiş, boş olmayan, məhdud və açıq çoxluqdur, məsələnin yerdə qalan verilənləri birinci fəslin əvvəlki paraqrafında qoyulmuş hamarlıq şərtlərini ödəyirlər.

Tutaq ki, $(u(t),a(t),z(t,x))$ qeyd olunmuş mümkün prosesdir.

İndi

$$H(t,x,z,z_x,\psi)=\psi' f(t,x,z,z_x)$$

$$M(t,a,u,q)=q' g(t,a,u)$$

$$M_a(t)\equiv M_a(t,a(t),u(t),q(t)),$$

$$M_{aa}(t)\equiv M_{aa}(t,a(t),u(t),q(t)),$$

$$M_{ua}(t)\equiv M_{ua}(t,a(t),u(t),q(t)),$$

$$M_{uu}(t)\equiv M_{uu}(t,a(t),u(t),q(t)),$$

$$H_z(t,x)\equiv H_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_{zz}(t,x)\equiv H_{zz}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_{zz_x}(t,x) \equiv H_{zz_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x)),$$
$$g_a(t) \equiv g_a(t,a(t),u(t)),$$
$$g_u(t) \equiv g_u(t,a(t),u(t))$$
$$f_z(t,x) \equiv f_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x)),$$
$$f_{z_x}(t,x) \equiv f_{z_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x)),$$

tipli işarələmələr daxil edək. Burada $\psi = \psi(t,x)$ və $q = q(t)$ - n - ölçülü vektor funksiyalar olub, uyğun olaraq

$$\psi(t,x) = -G_z(z(t_1,x_1)) + \int_s^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)\,ds + \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z(\tau,s)\,ds\,d\tau + \int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau,x)\,d\tau, \tag{36}$$

$$q(t) = -\varphi_a(a(t_1)) - G_z(z(t_1,x_1)) + \int_t^{t_1} M_{aa}(\tau)\,d\tau - \int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1} H_z(\tau,x)\,dx\,d\tau + \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)\,dx, \tag{37}$$

Volterra tipli inteqral tənliklər sisteminin həllidirlər.

Baxılan məsələdə keyfiyyət funksionalının birinci və ikinci variasiyaları hesablanmış və onların vasitəsi ilə optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır[3].

Teorem 3. Baxılan (30) - (35) optimal idarəetmə məsələlərində $u(t)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olunması üçün zəruri şərti

$$M_u(\theta) = 0, \tag{38}$$

bərabərliyinin ixtiyari $\theta \in [t_0, t_1)$ üçün ödənməsidir.

Bu (38) münasibəti baxılan məsələ üçün Eyler tənliyinin

---

[3] Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Томск: Вестник Томского Государственного университета, сер. управления математика и механика, - 2017. № 49, - с. 26-42.

analoqudur. Bu optimallıq şərtini ödəyən hər bir $u(t)$ mümkün idarəsinə klassik ekstremal deyəcəyik. Qeyd edək ki, optimallığa şübhəli klassik ekstremalların sayı kifayət qədər çox ola bilər. Ona görə də klassik ekstremallar çoxluğunu "sıxmaq" üçün optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlərə ehtiyac yaranır.

Fərz edək ki, $F(t,\tau)$ və $R(t,x;\tau,s)$ - $(n\times n)$ ölçülü matris funksiyalar olub, uyğun olaraq

$$F_\tau(t,\tau) = -F(t,\tau)g_u(\tau), \qquad (39)$$
$$F(t,t) = E,$$

$$\begin{aligned} R(t,x;\tau,s) = E &+ \int_\tau^t\int_s^x R(t,x;\alpha,\beta)f_z(\alpha,\beta)d\alpha\, d\beta + \\ &+ \int_\tau^t R(t,x;\alpha,s)f_{z_x}(\alpha,s)d\alpha + \int_s^x R(t,x;\tau,\beta)B(\tau,\beta)d\beta . \end{aligned} \qquad (40)$$

tənliklərinin həllidirlər.

(Burada E $(n\times n)$ – ölçülü vahid matrisdir).

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək.

$$Q(t,x,\tau) = \int_\tau^t L(t,x,s)F(s,\tau)ds + R(t,x;\tau,x),$$

$$L(t,x,\tau) = R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau) - f_{z_x}(\tau,x_0)\right]$$

$$\begin{aligned} K(\tau,s) = &-F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}(a(t_1))F(t_1,s) - \\ &- Q'(t_1,x_1,\tau)G_{zz}(z(t_1,x_1))Q(t_1,x_1,s) + \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)dt + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}\left[Q'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)Q(t,x,s) + Q'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)Q_x(t,x,s) + \right. \\ &\left. + Q_x'(t,x,\tau)H_{z_xz}(t,x)Q(t,x,s)\right]dx\, dt . \end{aligned} \qquad 41)$$

Bu $K(\tau,s)$ matris funksiyasının daxil edilməsi funksionalın ikinci variasiyasının optimal proses boyunca mənfi olmaması şərtindən istifadə edərək, optimallıq üçün konstruktiv yoxlanıla bilən ikinci tərtib zəruri şərt almağa imkan vermişdir.

Teorem 4. Baxılan məsələdə $u(t)$ klassik ekstremalının optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \delta' u(\tau)\, g_u'(\tau) K(\tau, s)\, g_u(s)\,\delta u(s)\, ds\, d\tau +$$

$$+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1} \delta' u(\tau) M_{ua}(\tau) F(\tau, t)\, d\tau\right] g_u(t)\,\delta u(t)\, dt + \qquad (42)$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \delta' u(t) M_{uu}(t)\,\delta u(t)\, dt \le 0 .$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$ -lər üçün ödənməsidir.

Bu (42) bərabərsizliyi optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt olub, kifayət qədər ümumi xarakter daşıyır. Ondan $\delta u(t)$ mümkün idarəsini xüsusi hallarda təyin edərək daha asan yoxlanıla bilən optimallıq şərtləri almaq mümkündür.

İşdə xüsusi halda Lejandır-Klebş şərtinin analoqu da alınmış, sonra isə klassik mənada məxsusi idarələrin optimallıq şərti isbat edilmişdir, yəni Lejandır–Klebş şərtinin cırlaşdığı hal tədqiq edilmişdir.

2.2 paraqrafında

$$S(u) = \varphi_1(z(t_1, x_1)) + \varphi_2(a(X_1), \ldots, a(X_k)) ,$$

çox nöqtəli funksionalının

$$u(x) \in U \subset R^r ,\ x \in X ,$$

$$\dot{a} = g(x, a, u), \quad x \in X ,$$

$$a(x_0) = a_0 ,$$

$$z_{tx} = A(t,x) z_t + B(t,x) z_x + f(t,x,z), \ (t,x) \in D,$$

$$z(t_0, x) = a(x), \qquad x \in X ,$$

$$z(t, x_0) = b(t), \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$a(x_0) = b(t_0) = a_0 ,$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılmışdır. İdarə oblastının açıq olması şərti daxilində Eyler tənliyinin analoqu isbat edilmiş və optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır[4].

2.3 paraqrafında birinci paraqrafda qoyulmuş məsələ idarə oblastı qabarıq olan halda tədqiq edilmiş, xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu isbat edilmiş və onun cırlaşdığı hal öyrənilərək kvaziməxsusi idarənin optimallıq şərti alınmışdır.

2.4 paraqrafında (30) - (35) məsələsi öyrənilmişdir. Bu zaman U çoxluğu ixtiyari, boş olmayan çoxluq qəbul edilmiş və fərz edilmişdir ki, $g(t,a,u)$ vektor-funksiyası yalnız a -ya görə ikinci tərtib törəməyə malikdir. Bu fərziyyələr daxilində Pontryaginin maksimum prinsipinin analoqu isbat edilmiş və onun cırlaşdığı hal öyrənilmişdir.

Elmi rəhbərim professor K.B.Mənsimova dissertasiya işində həll edilmiş məsələlərin qoyuluşuna, daimi diqqət və qayğısına görə dərin təşəkkürümü bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi Qursa-Darbu sistemi üçün toplanmış parametrli idarəli bir sinif optimal idarəetmə məsələsinin keyfiyyət tədqiqinə həsr edilmişdir (Qursa-Darbu sistemi üçün sərhəd optimal idarəetmə məsələsi). İş girişdən, iki fəsildən, nəticədən, sərti işarələr və istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın birinci fəsli altı paraqrafdan ibarətdir. Baxılan xətti optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi tipli zəruri və kafi şərt isbat edilmiş, qeyri-xətti halda isə müxtəlif fərziyyələrlə, optimallıq üçün Pantryaginin maksimum

---

[4] Сулейманова В.А. О многоточечных необходимых условиях оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Baku: Journal of Baku Engineering University Mathematics and computer science, - 2019. Volume 3, Number 1, - p. 36-48.

prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi və Elyer tənliyinin analoqu şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər isbat edilmişdir.

Ayrıca olaraq keyfiyyət meyarının və bərabərsizlik tip funksional məhdudiyyətlərin hamar olmadıqları hallar tədqiq edilmişdir. Minimaks məsələsi də tədqiq edilmişdir.

Dissertasiyanın ikinci fəsli dörd paraqrafdan ibarətdir. Baxılan sərhəd optimal idarəetmə məsələlərində Pontryaginin maksimum prinsipinin, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipinin cırlaşdığı hallar, yəni məxsusi hallar tədqiq edilmişdir. İdarə oblastı açıq olan halda optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt alınmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı əsərlərdə çap olunmuşdur

1. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // Bakı Dövlət Universiteti, əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş Funksional analiz və onun tətbiqləri adlı respublika elmi konfransı, BDU, - Bakı: - 2016, - s.173.
2. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2016. №2, - s. 29-36.
3. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Об оптимальности особых управлений в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2016. №4, - s. 5-19.
4. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universiteti, Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İnformasiya Texnologiyaları İnstitutu, Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, III Respublika elmi konfransının materialları, 15-16 dekabr, - 2016, - s. 34-35.
5. Сулейманова В.А. Задача на минимакс в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq elmi konfransının materialları. – Sumqayıt: 2017, - s. 245-246. https:// www. sdu. edu.az/ serfiles/file/ conferences/ math_ 01022016.pdf

6. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Томск: Вестник Томского Государственного университета, сер. управления математика и механика, - 2017. № 49, - с. 26-42. http://journals.tsu.ru/mathematics/&journal_page=archive&id=1632
7. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Линеаризованное квадратичное необходимое условие оптимальности в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Пермь: Прикл. матем. и вопросы управления, – 2017. № 4, - с. 7-28. http://vestnik.pstu.ru/matmech/archives/?id=&folderid=7167
8. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Об одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // Journal Of Baku Engineering University - Mathematics And Computer Science, - 2017. Volume 1, Number 2, - p. 107-117.http://journal.beu.edu.az/journal-details/30/
9. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности граничных управлений в системах Гурса-Дарбу при функциональных ограничениях типа неравенств // В еб. Матер. Международной научной конференций. Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. – Минск: - 24-29 сентября, - 2018, - с. 159-160.
10. Сулейманова В.А. Необходимые условие оптимальности граничной управлений в системах Гурса-Дарбу // İnformasiya sistemləri və texnologiyaları: nailiyyətlər və perspektivlər. Beynəlxalq elmi konfransının materialları, - Sumqayıt: 15-16 noyabr, - 2018, - s. 176-177. https://sdu.edu.az/userfiles/file/conferences/15-16% 20 noyabr%202018-ci_il%20Beyn %C9% 99 lxalq %20 elmi% 20 konfrans% C4%B1n% C4%B1n% 20material% C4%B1.pdf

11. Сулейманова В.А. Достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // SDU, Elmi xəbərlər, Təbiət və texniki elmlər bölməsi, cild 19, - Sumqayıt: – 2019. № 1, s.12-15. https://www.ssu-scientificnews.edu.az/pdf/T19-1.pdf
12. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2019. №1, - с. 13-20.http://static.bsu.az/w1/elmi_jurnallar/2019-1-fizika-riyaziyyat.pdf
13. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Аналог способа разделения множителя Лагранжа на слагаемые в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Пермь: Прикладная математика и вопросы управления. - 2019. № 2, - с. 7-22. http://vestnik.pstu.ru/matmech/archives/?id=&folder_id=8640
14. Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности второго порядка в одной граничной задаче управления квазилинейными системами Гурса-Дарбу // Материалы международного симпозиум. Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование. – Иркутск: - 7-11 октября, - 2019, - с. 282-285. https://elibrary.ru/item.asp?id=40928303&pff=1
15. Сулейманова В.А. О многоточечных необходимых условиях оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Baku: Journal of Baku Engineering University Mathematics and computer science, - 2019. Volume 3, Number 1, - p. 36-48. http://journal.beu.edu.az/journal-details/15/

16. Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности в задаче на минимакс для одной граничной задачи управления системами Гурса-Дарбу // - Baku: Journal of Baku Engineering University Mathematics and computer science, - 2019. Volume 3, Number 1, - p. 49-55. http://journal.beu.edu.az/journal-details/15/

Dissertasiyanın müdafiəsi 17 iyun 2022-ci il tarixində saat 14^{00} da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: Ünvan: Az1141, Bakı şəhəri, B. Vahabzadə küç. 68. Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun (http://www.isi.az) rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 12 may 2022-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 15.04.2022

Kağızın formatı: A5

Həcm: 17679

Tiraj: 100