АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СИСТЕМАХ ГУРСА-ДАРБУ, УПРАВЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Специальность: 1203.01 – Компьютерные науки

Область науки: Математика

Соискатель: **Сулейманова Вусала Абдулла гызы**

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание учёной степени
доктора философии

Баку–2022

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ и теория функций» Сумгаитского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Мансимов Камиль Байрамали оглы

Официальные оппоненты: доктор математических наук, профессор
Тагиев Рафиг Галандар оглы

доктор философии по математических наук, доцент
Масталиев Рашад Октай оглы

кандидат физико-математических наук, доцент
Мамедов Рашад Сирадж оглы

Диссертационный совет ED 1.19 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Систем Управления НАНА.

Председатель диссертационного совета:
доктор физико-математических наук, профессор
Галина Юрьевна Мехтиева

____

Ученый секретарь диссертационного совета:
доктор философии по математических наук, доцент
Эльхан Нариман оглы Сабзиев

____

Председатель научного семинара:
член-корреспондент НАНА, доктор физико-математических наук, профессор
Вагиф Рза оглы Ибрагимов

____

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы: Со середины 20 века в связи с интенсивным развитием науки и техники, а также экономики, возникла настоятельная необходимость решения различных задач оптимизации процессов управления. В эти годы были сформулированы основополагающие результаты, обобщающие классические результаты вариационного исчисления. Основополагающими результатами, обобщающие известные классические результаты вариационного исчисления, являются, в первую очередь, принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана, общая теория экстремума Милютина-Дубовицкого. Эти теории учитывали наличие разнообразных ограничений в задачах управления. Поэтому наряду с задачами оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, начали изучаться более сложные задачи оптимального управления, описываемые уравнениями в частных производных (задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами). Исследованию задач оптимального управления различными системами с распределенными параметрами посвящены работы В.М.Абдуллаева, К.Р.Айдазаде, К.Р.Айдазаде и В.М.Абдуллаева, С.С.Ахиева, А.Г.Бутковского, Ф.П. Васильева, А.И.Егорова и Л.Н.Знаменской, А.Д.Искендерова, Г.Ф.Кулиева, И.Г.Мамедова, К.Б.Мансимова, К.Б.Мансимова и М.Д.Марданова, Т.К.Меликова, А.А.Нифтиева, М.А. Садыгова, Р.К. Тагиева, А.В.Фурсикова, Я.А.Шарифова, М.А.Ягубова и др.

Среди специалистов особый интерес представляют задачи оптимального управления, описываемые гиперболическими уравнениями второго порядка с краевыми условиями Гурса. Начиная с классической работы А.И.Егорова, к настоящему времени резличные аспекты задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу (управляемость, наблюдаемость, необходимые и достаточные условия оптимальности, существование решений, численные методы рещения) интенсивно резрабатываются. В этом направлении отметим работы Ф.Ш.Ахмедова, С.С.Ахиева и К.Т.Ахмедова, С.С.Ахиева, Е.П. Бокмельдер и В.А.Дыхта, Ф.П.Васильева, О.В.Васильева, К.К.Гасанова, А.И.Егорова, И.В.Лисаченко, К.Б.Мансимова, М.Дж.Марданова, А.С.Матвеева, А.С.Матвеева и В.А.Якубовича, Т.К.Меликова, Н.И.Погодаева, В.И.Сумина и В.И.Плотникова, А.Р.Сафари, В.А.Срочко, В.И.Сумина, М.И.Сумина, Я.А.Шарифова и др.

К настоящему времени наибольшее внимание уделяется выводу различных необходимых и достаточных условий оптимальности в системах Гурса-Дарбу. Теория необходимых условий оптимальности первого порядка в задачах оптимального управления системами Гурса-Дарбу достаточно полно разработана, в основном, для задач управления с распределенными управлениями. Но задачи управления системами Гурса-Дарбу с граничными управлениями еще мало исследованы. Кроме того, нередки случаи вырождения необходимых условий оптимальности первого порядка. Такие случаи называются (следуя Л.И.Розоноэру) особыми случаями, а соответствующие управления—особыми управлениями. К настоящему времени теория необходимых условий оптимальности высокого порядка, в частности, теория особых управленй для систем Гурса-Дарбу, граничними управлениями еще мала разработана. Исходя из вышеизложенноых, тему настоящей диссертационной работы, посвещённой выводу различных необходимых условий оптимальности первого порядка и исследованию случаев их вырождения в граничной задаче оптимального управления, системами Гурса-Дарбу можно считать актуальной.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы являются граничные задачи оптимального управления процессами, описываемые системами гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса. Этот выбор обусловлен многочисленными приложениями подобных задач оптимального управления. Предметом исследования является установление различных необходимых условий оптимальности первого порядка и исследование случаев их вырождения.

Цель и задачи исследования. Доказательство необходимых условий оптимальности первого порядка и исследование случаев их вырождения для задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу с граничными управлениями.

Методы исследования. В диссертационной работе при решении поставленных задач применяются методы вариационного исчисления, качественной теории оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также один вариант метода приращений.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Необходимое и достаточное условие оптимальности в линейной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу.
- Необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина, линеаризованного условия максимума и аналог уравнения Эйлера.
- Различные необходимые условия оптимальности первого порядка в случаях негладкого критерия качества, а также негладких функциональных ограничений типа неравенств.
- Необходимое условие оптимальности первого и второго порядков в случае открытости области управления.
- Аналог линеаризованного условия максимума и необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.
- Аналог принципа максимума Понтрягина и необходимые условия оптимальности особых управлений.

Научная новизна исследования. Все результаты диссертации, представляющие собой различные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков для рассматриваемых граничных задач оптимального управления, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Диссертационная работа носит теоретический характер и получены новые результаты. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшей разработке теории необходимых условий оптимальности высокого порядка для граничных задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Результаты работы могут быть использованы также для решения конкретных практических задач, возникающих в приложениях.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации были доложены на семинарах кафедры ”Математического анализа и теории функций” Сумгаитского Государственного Университета, на семинарах лаборатории ”Управление в сложных динамических системах” Института Систем Управления НАН Азербайджана, республиканской конференции, посвещенной столетнему юбилею проф. А.Ш.Габибзаде (г. Баку, 2016), III республиканской конференции ”Математические прикладные задачи и новые информационные технологии” (г. Сумгаит, 2016), международной конференции ”Теоретические и прикладные проблемы математики” (г. Сумгаит, 2017), международной конференции ”Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация ” (г. Минск, 2018), международной конференции ”Информационные системы и технологии: достижения и перспективы” (г. Сумгаит, 2018), международной конференции ”Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование” (г. Иркутск, 2019).

Личный вклад автора. Все результаты диссертации получены лично автором. В работах, опубликованных с научным руководителем, только постановка задач принадлежать научному руководителю.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах автора, список которых приведен в конце автореферата диссертации.

Название организации, в которой выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре ”Математического анализа и теории функций” Сумгаитского Государственного Университета.

Стуруктура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 2 глав, заключения, списка использованной литературы из 93 наименований и списка обозначений. Общий объем диссертации составляет 144 страниц машинописного текста (96412 знака), основной объем 133 страниц (82041 знака). Первая глава состоит из – 31389, вторая глава из 28021 знаков.

Содержание диссертационной работы

Дисертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литеретуры и списка основных обозначений.

Введение дисертации содержит обоснование выбранного направления исследований, обзор работ, посвященных рассматриваемым в дисертации вопросам, при этом сформулированы цель работы, основные положения, выносимые на защиту, и кратко изложены содержания глав.

Первая глава состоит из шести параграфов.

В первой главе, рассматривается задача оптимального управления системой Гурса-Дарбу, в которой одно из граничных условий определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В параграфе 1.1 рассматривается линейная граничная задача оптимального управления с линейным, многоточечным функционалом качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Пусть управляемый процесс в заданной области $D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ описывается системой линейных гиперболических уравнений

$$z_{tx}=A(t,x)z+B(t,x)z_t+C(t,x)z_x+f(t,x), \qquad (1)$$

с краевыми условиями Гурса

$$\begin{aligned} &z(t,x_0)=a(t), \quad t\in[t_0,t_1],\\ &z(t_0,x)=b(x), \quad x\in[x_0,x_1],\\ &a(t_0)=b(x_0)=a_0 . \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ – заданные $(n\times n)$ - измеримые и ограниченные матриц-функции, $f(t,x)$ – заданная, непрерывная по совокупности переменных, n-мерная вектор-функция, a_0 – заданный постоянный вектор, $b(x)$ – заданная абсолютно непрерывная n-мерная вектор-функция, a $a(t)$- n-мерная вектор-функция, определяемая как решение задачи Коши

$$\dot a=D(t)a(t)+g(t,u), \quad t\in[t_0,t_1], \qquad (3)$$

$$a(t_0)=a_0,$$

где $D(t)$– заданная измеримая и ограниченная $(n\times n)$ матричная-функция, $g(t,u)$– заданная непрерывная по совокупности переменных n-мерная вектор-функция, $u(t)$ – r- мерная измеримая и ограниченная вектор-функция управляющих воздействий со значеннями из заданного непустого и ограниченного множества $U\subset R^r$, т.е. удовлетворяющий ограничению

$$u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in[t_0,t_1] \qquad (4)$$

Каждую управляющую функцию $u(t)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению

$u(t)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $z(t,x)$ краевой задачи (1) - (2) и единственное абсолютно непрерывное решение $a(t)$ задачи Коши (3).

Пусть (T_i, X_i), $i=\overline{1,k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_k \le t_1;\ x_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k \le x_1)$ – заданные точки.

Рассмотрим задачу о минимуме многоточечного функционала

$$I(u) = \sum_{i=1}^{k} \left[c_i' z(T_i, X_i) + d_i' a(T_i) \right], \tag{5}$$

определенного на рещениех задачи (1) - (3) порожденних все возможными допустимыми управлениями.

Здесь c_i, d_i, $i=\overline{1,k}$ - заданные постоянные векторы.

Допустимое управление $u(t)$ доставляющее минимальное значение функционалу (5) при ограничениях (1) - (4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), a(t), z(t,x))$ – оптимальным процессом.

Пусть $(u(t), a(t), z(t,x))$ – фиксированный допустимый процесс. Через $\alpha_i(t,x), i=\overline{1,k}$ обозначим характеристическую функцию области $[t_0, T_i]\times[x_0, X_i], i=\overline{1,k}$, а через $\beta_i(t)$ - характеристическую функцию отрезка $[t_0, T_i]$, $i=\overline{1,k}$.

Пусть n-мерные вектор-функции $\psi(t,x)$ и $p(t)$ являются решениями линейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\psi(t,x) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t,x) c_i + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} A'(\tau,s)\psi(\tau,s) ds d\tau + \int_{x}^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s) ds +$$

$$+\int_{t}^{t_1} C'(\tau,x)\psi(\tau,x) d\tau,$$

$$p(t)=-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)d_i-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)c_i+\int_t^{t_1}D'(\tau)p(\tau)d\tau+\int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1}(A'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau)dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}B'(t,x)\psi(t,x)dx$$

Соответственно.

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,u,p)=p'g(t,u)$$

Доказана

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1) - (5) необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$H(\theta,v,p(\theta))-H(\theta,u(\theta),p(\theta))\leq 0$$

выполнялось для всех $\theta\in[t_0,t_1)$ и $v(t)\in U$.

Здесь. и в дальнейшем $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка Лебега (правильная точка) управления $u(t)$.

Далее в этом параграфе в случае нелинейного выпуклого функционала качества доказан достаточность условия максимума Понтрягина.

В параграфе 1.2 рассматривается задача о минимуме многоточечного функционала.

$$S(u)=\varphi(z(T_1,X_1),...,z(T_k,X_k))+G(a(T_1),...,a(T_k)),\qquad(6)$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in[t_0,t_1],\qquad(7)$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),(t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1],\qquad(8)$$

$$\begin{aligned}&z(t,x_0)=a(t),\quad t\in[t_0,t_1],\\&z(t_0,x)=b(x),\quad x\in[x_0,x_1],\end{aligned}\qquad(9)$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot a=g(t,a,u),\quad t\in[t_0,t_1],\qquad(10)$$

$$a(t_0)=a_0.\qquad(11)$$

Здесь $B(t,x)$ – заданная измеримая и ограниченная

$(n \times n)$ матричная функция, $f(t,x,z,z_x)$, ($g(t,a,u)$) – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,z_x) (a), $\varphi(z_1,z_2,...,z_k)$, $G(a_1,a_2,...,a_k)$– заданные непрерывно дифференциируемые скалярные функции, (T_i,X_i), $i=\overline{1,k}$ $(t_0<T_1<T_2<...<T_k\le t_1;\ x_0<X_1<X_2<...<X_k\le x_1)$– заданные точки, $b(x)$–заданная абсолютно непрерывная вектор-функция, t_0,t_1,x_0,x_1 – $(t_0<t_1;\ x_0<x_1)$ – заданы, a_0 – заданный постоянный вектор, $u(t)$–r-мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий, а U – заданное непустое и ограниченное множество. Каждую управляющую функцию $u(t)$ с такими свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $z(t,x)$, ($a(t)$) краевой задачи (8) – (9) (задачи Коши (10) - (11)).

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (6) при ограничениех (8) - (11), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),a(t),z(t,x))$ – оптимальным процессом. Пусть $(u(t),a(t),z(t,x))$ является фиксированным допустимым процессом. Введём обозначения

$$H(t,x,z,z_t,z_x,\psi)=\psi' f(t,x,z,z_x),$$

$$M(t,a,u,p)=p' g(t,a,u).$$

Здесь, $\psi(t,x)$ и $p(t)$ n-мерные вектор-функции, являющиеся решениями интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\psi(t,x)=-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi\Big(z(T_1,X_1),...,z(T_{k\,,}X_k)\Big)}{\partial z_i}+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z\big(\tau,s,z(\tau,s),z_s(\tau,s),\psi(\tau,s)\big)ds d\tau+$$

$$\int_t^{t_1}H_{z_x}\big(\tau,x,z(\tau,x),z_x(\tau,x),\psi(\tau,x)\big)d\tau+\int_x^{x_1}B'(t,s)\psi(t,s)ds,$$

$$p(t)=-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)\frac{\partial G\big(a(T_1),...,a(T_k)\big)}{\partial a_i}-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)\frac{\partial\varphi\big(z(T_1,X_1),...,z(T_k,X_k)\big)}{\partial z_i}+$$

$$+\int_t^{t_1}M_a\big(\tau,a(\tau),u(\tau),p(\tau)\big)d\tau+\int_{x_0}^{x_1}B'(t,x)\psi(t,x)dx+\int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1}H_z\big(\tau,x,z(\tau,x),z_x(\tau,x),\psi(\tau,x)\big)d\tau dx.$$

Здесь, и в дальнейщем $\alpha_i(t,x)-$ характеристическая функция прямоугольника $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$, а $\beta_i(t)-$ характеристическая функция отрезка $[t_0,T_i]$

Доказана

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (6) - (11) необходимо, чтобы соотношение (условие максимума)

$$\max_{v\in U}M(\theta,a(\theta),v,p(\theta))=M(\theta,a(\theta),u(\theta),p(\theta))$$

выполнялось для всех $\theta\in[t_0,t_1)$.

Здесь $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка Лебега (правильная точка) управление $u(t)$.

Далее рассмотрен случай выпуклости, а затем также открытости областей управления. Доказаны аналоги линеаризованного условия максимума и уравнениа Эйлера.

В параграфе 1.3 рассматривается задача о минимуме функционала

$$S(u)=G(z(t_1,x_1))+\varphi(a(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[D'(t,x)z_t+E(t,x,z,z_x)]dx\,dt \quad (12$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\qquad t\in T=[t_0,t_1], \qquad (13)$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f\left(t,x,z,z_x\right),\quad (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1],\quad (14)$$

$$z(t,x_0)=a(t),\qquad t\in T=[t_0,t_1],$$

$$z\left(t_0,x\right)=b\left(x\right),\qquad x\in X=[x_0,x_1],\quad (15)$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot{a}=g(t,a,u),\ \ t\in T,\quad (16)$$

$$a(t_0)=a_0.\quad (17)$$

Здесь $B(t,x)-$ заданная $(n\times n)$ - матричная функция, $\varphi(z)$ и $\varphi(a)$ - заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $D(t,x)-$ заданная n-мерная измеримая и ограниченная n-мерная вектор-функция, $E\left(t,x,z,z_x\right)-$ заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z, z_x, $f\left(t,x,z,z_x\right)$ -заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z, z_x, $b(x)$–заданная абсолютно непрерывная вектор-функция, $g(t,a,u)$–заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по a, U – заданное непустое и ограниченное множество, $u(t)$ - r-мерная измеримая и ограниченная управляющая вектор-функция[1].

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $u(t)$ задача Коши (16) - (17) и краевая задача Гурса (14) - (15) имеют единственное абсолютно непрерывное решение $a(t)$ и $z(t,x)$ соответственно.

В свой работе С.С.Ахиев доказал необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина

---

[1]Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Аналог способа разделения множителя Лагранжа на слагаемые в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Пермь: Прикладная математика и вопросы управления. - 2019. № 2, - с. 7-22.

в задаче оптимального управлении системами Гурса-Дарбу с распределённым управлением. С помощью этого метода, названного методом разделения множителя Лагранжа на слагаемые, в этой работе применён аналог метода разделения множителя Лагранжа на слагаемые и доказано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина в случае граничных управлений, т.е. в задаче (12) - (17).

В параграфе 1.4 посвящен исследованию граничной задачи оптимального управления вида

$$u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in T=[t_0,t_1], \tag{18}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{19}$$

$$z(t,x_0)=a(t), \quad t\in T=[t_0,t_1],$$

$$z(t_0,x)=b(x), \quad x\in X=[x_0,x_1], \tag{20}$$

$$a(t_0)=b(x_0),$$

$$\dot{a}=F(t,a,u),\ \ t\in T, \tag{21}$$

$$a(t_0)=a_0. \tag{22}$$

Предполагается, что критерий качества имеет вид

$$S(u)=\Phi_1\big(z(T_1,X_1),...,z(T_k,X_k)\big)+\Phi_2\big(a(T_1),...,a(T_k)\big). \tag{23}$$

где Φ_i $i=\overline{1,2}$ – заданные скалярные функции, имеющие производные по любом направлениям и удовлетворяющие условию Липшица[2]. Доказано необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям.

В параграфе 1.5 изучается задача на минимакс.

Пусть требуется найти минимальное значение терминального функционала типа максимум

$$S(u)=\max_{y\in Y}\varphi_1\big(z(t_1,x_1),y\big)+\max_{\alpha\in A}\varphi_2\big(a(t_1),\alpha\big), \tag{24}$$

при ограничениях

[2]Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2016. №2, - s. 29-36.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \tag{25}$$

$$\dot{a} = F\left(t, a, u\right), \quad t \in T, \tag{26}$$

$$a(t_0) = a_0 . \tag{27}$$

$$z_{tx} = B(t,x) z_t + f\left(t, x, z, z_x\right), \ \left(t, x\right) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \tag{28}$$

$$\begin{gathered} z(t, x_0) = a(t), \quad t \in T, \\ z(t_0, x) = b(x), \quad x \in X . \end{gathered} \tag{29}$$

$$a(t_0) = b(x_0) = a_0$$

Здесь Y и A- заданные конечные множества m и q -мерных соответственно, векторов y и α, $\varphi_1(z, y), \varphi_2(a, \alpha)$ – заданные скалярные функции, непрерывно дифференцируемые по z. (a) при всех $y(\alpha)$, а остальные данние задачи о минимуме функционала (24) при ограничениях (25) - (29) удовлетворяют условиям гладкости аналогично из предыдущих параграфов.

Подобные задачи оптимального управления с функционалом типа (24) называются задачами на минимакс.

С помощью схемы, основанной на явной линеаризации исходной системы доказано необходимое условие оптимальности типа принципа максимина Понтрягина.

В параграфе 1.6 исследуется граничная задача оптимального управления с негладким терминального типа функционалом качества при наличии негладких типа терминального функциональных ограничений типа неравенств при предположении, что функции, задающие критерий качества и функциональные ограничения, удовлетворяют условию Липшица и имеют производные по направлениям. Применяя один вариант метода приращений, доказано необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям.

Вторая глава диссертации состоит из четырех параграфов и посвящена выводу необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина, линеаризованного условия максимума, аналога уравнения Эйлера и исследованнию особых управлений, т.е. управлений для которых принцип максимума Понтрягина и линеаризованный принцип максимума вырождаются.

В параграфе 2.1 рассматривается задача о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi\big(a(t_1)\big)+G\big(z(t_1,x_1)\big), \tag{30}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T=[t_0,t_1], \tag{31}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{32}$$

$$\begin{gathered} z(t,x_0)=a(t),\quad t\in T=[t_0,t_1],\\ z(t_0,x)=b(x),\quad x\in X=[x_0,x_1], \end{gathered} \tag{33}$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot a=g(t,a,u),\quad t\in T \tag{34}$$

$$a(t_0)=a_0. \tag{35}$$

Здесь $f(t,x,z,z_x)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,z_x) до второго порядка включительно, $g(t,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,u) до второго порядка включительно, $\varphi(a)$ и $G(z)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, U – заданное непустое, ограниченное к открытое множество, a - остальные данные задачи удовлетворяют тем условием гладкости, которые приведены в предыдущих параграфах первой главы.

Пусть $(u(t),a(t),z(t,x))$ фиксированный допустимый процесс. Введем обозначения

$$\begin{aligned} &H(t,x,z,z_x,\psi)=\psi' f(t,x,z,z_x),\\ &M(t,a,u,q)=q' g(t,a,u),\\ &M_a(t)\equiv M_a(t,a(t),u(t),q(t)), \end{aligned}$$

$$M_{aa}(t) \equiv M_{aa}(t, a(t), u(t), q(t)),$$
$$M_{ua}(t) \equiv M_{ua}(t, a(t), u(t), q(t)),$$
$$M_{uu}(t) \equiv M_{uu}(t, a(t), u(t), q(t)),$$
$$H_z(t,x) \equiv H_z(t, x, z(t,x), z_x(t,x), \psi(t,x)),$$
$$H_{zz}(t,x) \equiv H_{zz}(t, x, z(t,x), z_x(t,x), \psi(t,x)),$$
$$H_{zz_x}(t,x) \equiv H_{zz_x}(t, x, z(t,x), z_x(t,x), \psi(t,x)),$$
$$g_a(t) \equiv g_a(t, a(t), u(t)),$$
$$g_u(t) \equiv g_u(t, a(t), u(t)),$$
$$f_z(t,x) \equiv f_z(t, x, z(t,x), z_x(t,x)),$$
$$f_{z_x}(t,x) \equiv f_{z_x}(t, x, z(t,x), z_x(t,x)),$$

где $\psi = \psi(t,x)$ и $q = q(t) -$ n-мерные вектор-функции, являющиеся решениями соответственно, сопряженной системы уравнений

$$\psi(t,x) = -G_z(z(t_1,x_1)) + \int_s^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)\,ds + \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z(\tau,s)\,ds\,d\tau + \int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau,x)\,d\tau, \qquad (36)$$

$$q(t) = -\varphi_a(a(t_1)) - G_z(z(t_1,x_1)) + \int_t^{t_1} M_{aa}(\tau)\,d\tau - \int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1} H_z(\tau,x)\,dx\,d\tau + \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)\,dx \qquad (37)$$

В этом параграфе вычислены первая и вторая вариации критерия качества и доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков[3].

[3] Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Томск: Вестник Томского Государственного университета, сер. управления математика и механика, - 2017. № 49, - с. 26-42.

Теорема 3. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (30) – (35) необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ выполнялось соотношение

$$M_u(\theta) = 0 \ . \qquad (38)$$

Соотношение (38) есть аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи. Каждое допустимое управление $u(t)$, являющееся решением уравнения Эйлера (38) назовем классической экстремалью.

Заметим, что число классических экстремалей, подозрительных на оптимальность, может быть достаточно большим. Поэтому надо иметь дело с необходимыми условиями оптимальности второго порядка для сужения множества классических экстремалей подозрительных на оптимальность.

Пусть $F(t,\tau)$ и $R(t,x;\tau,s)$ - $(n \times n)$ матричные функция, являющиеся решениями следующих задач соответственно

$$F_\tau(t,\tau) = -F(t,\tau) g_u(\tau), \qquad (39)$$

$$F(t,t) = E \,,$$

$$R(t,x;\tau,s) = E + \int_\tau^t \int_s^x R(t,x;\alpha,\beta) f_z(\alpha,\beta) d\alpha \, d\beta + \qquad (40)$$

$$+ \int_\tau^t R(t,x;\alpha,s) f_{z_x}(\alpha,s) d\alpha + \int_s^x R(t,x;\tau,\beta) B(\tau,\beta) d\beta .$$

(E $(n \times n)$ – единичная матрица).

Введем обозначения

$$Q(t,x,\tau) = \int_\tau^t L(t,x,s) F(s,\tau) ds + R(t,x;\tau,x),$$

$$L(t,x,\tau) = R(t,x;\tau,x_0) \left[g_a(\tau) - f_{z_x}(\tau,x_0) \ \right],$$

$$
\begin{gathered}
K(\tau,s) = -F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}(a(t_1))F(t_1,s) - \\
-Q'(t_1,x_1,\tau)G_{zz}(z(t_1,x_1))Q(t_1,x_1,s) + \int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_1} F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)dt + \\
+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_1}\Big[Q'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)Q(t,x,s) + Q'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)Q_x(t,x,s) + \\
+Q'_x(t,x,\tau)H_{z_x z}(t,x)Q(t,x,s)\Big]dx\,dt.
\end{gathered}
\tag{41}
$$

Введение матричной функции (41) позволило получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка, используя условие неотрица цельности второй вариации функционала качества вдоль оптимального управления.

Доказана

Теорема 4. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ в задаче (30) – (35) необходимо, чтобы неравенство

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta' u(\tau)g'_u(\tau)K(\tau,s)g_u(s)\delta u(s)\,ds\,d\tau + \\
+2\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta' u(\tau)M_{ua}(\tau)F(\tau,t)d\tau\right]g_u(t)\delta u(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1}\delta' u(t)M_{uu}(t)\delta u(t)dt \le 0,
\end{gathered}
\tag{42}
$$

выполнялось для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$.

Неравенство (42), являясь необходимым условием оптимальности второго порядка, носит довольно общий характер. Из него, используя произвольность допустимой вариации, $\delta u(t)$ управления $u(t)$ можно получить ряд легко проверяемые необходимые условия оптимальности второго порядка.

В работе в частности, доказан аналог условия Лежандра Клебша, а затем установлены ряд необходимых условий оптимальности для классически особых управлений, т.е. управлений, для которых аналог условия Лежандра- Клебша вырождается.

В параграфе 2.2 изучена задача о минимуме многоточечного критерия качества вида

$$S(u)=\varphi_1\left(z(t_1,x_1)\right)+\varphi_2\left(a(X_1),...,a(X_k)\right),$$

при ограничениях

$$u(x)\in U\subset R^r,\ x\in X,$$

$$\dot{a}=g(x,a,u),\quad x\in X,$$

$$a(x_0)=a_0,$$

$$z_{tx}=A(t,x)z_t+B(t,x)z_x+f(t,x,z),\ (t,x)\in D,$$

$$z(t_0,x)=a(x),\qquad x\in X,$$

$$z(t,x_0)=b(t),\qquad t\in T,$$

$$a(x_0)=b(t_0)=a_0.$$

При предположении открытости области управлений U доказан аналог уравнения Эйлера и выведенны необходимые условия оптимальности второго порядка[4].

В параграфе 2.3 рассматривается задача оптимального управления из параграфа один при предположении выпуклости области управлений U. Доказан аналог линеаризованного условия максимума и исследован случай его вырождения (случай квазиособых управлений). Доказано необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

В параграфе 2.4 диссертации продолжается исследование задачи (30) – (35), считая что U произвольное непустое ограниченное множество, а $g(t,a,u)$ имеет непрерывную производную второго порядка только по a. При этих предположениях в рассматриваемой задаче (30) – (35) доказан аналог принципа максимума Понтрягина и исследован случай его вырождения.

---

[4] Сулейманова В.А. О многоточечных необходимых условиях оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Baku: Journal of Baku Engineering University Mathematics and computer science, - 2019. Volume 3, Number 1, - p. 36-48.

Выражаю благодарность своему научному руководителю, профессору К.Б. Мансимову, за постоянное внимание и внимательность к вопросам, затронутым в диссертации.

Заключение

Диссертациония работа посвящена качественному исследованию одного класса задач оптимального управления сосредоточенными управлениями для системы Гурса-Дарбу. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка основных обозначений и списка использованной литературы. Первая глава диссертации состоит из шести параграфов. В линейном случае доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина, а в нелинейном случае - при различных предположениях доказаны ряд необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина, линеаризованного условия максимума и аналога уравнения Эйлера. Отдельно изучены случаи негладкого критерия качества и негладких функциональных ограничений типа неравенств. Изучена, также задача на минимакс.

Вторая глава диссертации состоит из четырех параграфов. Исследованы так называемые особые управления на оптимальность, т.е. случаи вырождения аналога принципа максимума Л.С.Понтрягина и линеаризованного принципа максимума. В случае открытости области управления доказано необходимое условие оптимальности второго порядка.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих научных статьях

1. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // Bakı Dövlət Universiteti, əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş Funksional analiz və onun tətbiqləri adlı respublika elmi konfransı, BDU, - Bakı: - 2016, - s.173.
2. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2016. №2, - s. 29-36.
3. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Об оптимальности особых управлений в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2016. №4, - s. 5-19.
4. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universiteti, Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İnformasiya Texnologiyaları İnstitutu, Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, III Respublika elmi konfransının materialları, 15-16 dekabr, - 2016, - s. 34-35.
5. Сулейманова В.А. Задача на минимакс в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq elmi konfransının materialları. – Sumqayıt: - 2017, - s. 245-246. https:// www. sdu. edu.az/userfiles/file/conferences/math_01022016. pdf
6. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимые условия оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Томск: Вестник Томского

Государственного университета, сер. управления математика и механика, - 2017. № 49, - с. 26-42. http://journals.tsu.ru/mathematics/&journal_page=archive&id=1632
7. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Линеаризованное квадратичное необходимое условие оптимальности в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Пермь: Прикл. матем. и вопросы управления, – 2017. № 4, - с. 7-28. http://vestnik.pstu.ru/matmech/archives/?id=&folder_id=7167
8. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Об одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // Journal Of Baku Engineering University - Mathematics And Computer Science, - 2017. Volume 1, Number 2, - p. 107-117. http://journal.beu.edu.az/journal-details/30/
9. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности граничных управлений в системах Гурса-Дарбу при функциональных ограничениях типа неравенств // В еб. Матер. Международной научной конференций. Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. – Минск: - 24-29 сентября, - 2018, - с. 159-160.
10. Сулейманова В.А. Необходимые условие оптимальности граничной управлений в системах Гурса-Дарбу // İnformasiya sistemləri və texnologiyaları: nailiyyətlər və perspektivlər. Beynəlxalq elmi konfransının materialları, - Sumqayıt: 15-16 noyabr, - 2018, - s. 176-177. https://sdu.edu.az/userfiles/file/conferences/15-6%20 noyabr% 202018-ci_il% 20Beyn% C9%99lxalq% 20elmi% 20konfrans%C4%B1n%C4%B1n%20material%C4%B1.pdf
11. Сулейманова В.А. Достаточное условие оптимальности типа принципа максимума понтрягина в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // SDU, Elmi xəbərlər, Təbiət və texniki elmlər bölməsi, cild 19, - Sumqayıt: – 2019. № 1, s.12-15. https://www.ssu-scientificnews.edu.az/pdf/T19-1.pdf

12. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2019. №1, - c. 13-20. http://static.bsu.az/w1/elmi_jurnallar/2019-1-fizika-riyaziyyat.pdf
13. Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Аналог способа разделения множителя Лагранжа на слагаемые в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу // - Пермь: Прикладная математика и вопросы управления. - 2019. № 2, - с. 7-22. http://vestnik.pstu.ru/matmech/archives/?id=&folder_id=8640
14. Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности второго порядка в одной граничной задаче управления квазилинейными системами Гурса-Дарбу // Материалы международного симпозиум. Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование. – Иркутск: - 7-11 октября, - 2019, - с. 282-285. https://elibrary.ru/item.asp?id=40928303&pff=1
15. Сулейманова В.А. О многоточечных необходимых условиях оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу // - Baku: Journal of Baku Engineering University Mathematics and computer science, - 2019. Volume 3, Number 1, - p. 36-48. http://journal.beu.edu.az/journal-details/15/
16. Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности в задаче на минимакс для одной граничной задачи управления системами Гурса-Дарбу // - Baku: Journal of Baku Engineering University Mathematics and computer science, - 2019. Volume 3, Number 1, - p. 49-55. http://journal.beu.edu.az/journal-details/15

Защита диссертации состоится 17 июня 2022 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного совета ED 1.19 при действующего на базе Институте Систем Управления НАНА.

Адрес: AZ1141 Баку, ул. Б.Вахабзаде 68, Институт систем управления НАН Азербайджана.

С диссертационной работой можно ознакомиться в библиотеке Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Электронные версии диссертации и автореферата размещены на официальном сайте Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Автореферат разослан 12 мая 2022 года.

Подписано к печать: 15.04.2022

Формат бумаги: A5

Объем: 18004

Тираж: 30