AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

SÜBHİYYƏ MƏMMƏD qızı ZEYNALLI

OPTİMAL İDARƏETMƏ ÜSULLARININ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN KORREKT OLMAYAN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRƏ TƏTBİQİ

1211.01 – Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СУБХИЯ МАМЕД кызы ЗЕЙНАЛЛЫ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ НЕКОРРЕКТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени доктора философии по математике

Баку - 2015

Работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Гянджинского Государственного Университета.

Научный руководитель: **Доктор физико-математических наук, профессор Г.Ф.Кулиев**

Официальные оппоненты: **Доктор физико-математических наук, профессор А.Б.Алиев**

Кандидат физико математических наук, доцент Я.А.Шарифов

Ведущая организация: **Азербайджанский Педагогический Университет кафедра («Математический анализ»)**

Защита диссертации состоится «_23_» _июня__2015 г. в 11^{00} часов за заседании Диссертационного Совета FD 02.016 при Бакинском Государственном Университете.

Адрес: АЗ 1148, Баку, ул.З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Автореферат разослан «_21_» ____мая____2015 года.

Учёный секретарь Диссертационного Совета FD 02.016, д.м.н., профессор **Н.К.Ахмедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В 1902 году Ж.Адамар в свой известной работе сформулировал понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений. Корректной по Адамару называют задачу, решение которой существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Там же Адамар привел пример некорректной задачи (Задача Коши для уравнения Лапласа). Термин «некорректная задача» означает, что задача либо не имеет решения, либо, напротив, имеет много решений (как минимум два), либо процедура нахождения решения неустойчива. В 1943 году А.Н.Тихонов указал на практическую важность подобных задач и возможность устойчивого их решения.

В пятидесятых и шестидесятых годах XX века появился ряд новых подходов, которые стали основополагающими для теории некорректных задач и привлекли к ней внимание специалистов. С появлением мощных компьютеров интерес к некорректным задачам стал стремительно расти. В последнее время некорректные и обратные задачи превратились в объект систематического изучения и применения в физике, геофизике, медицине, технике, экономике, экологии, астрономии и, вообще, во всех областях знаний, в которых применимы математические методы. Можно указать целый ряд некорректно поставленных задач, относящихся как к классическим разделам математики, так и к различным классам практически важных прикладных задач. Например, как выше отмечено, задача Коши для эллиптического уравнения, задача Коши для параболического уравнения с обратным временем, задача Коши с данными на времени – подобной поверхности для гиперболического уравнения, обратные коэффициентные задачи, задача нахождения решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма первого рода, задача местонахождения источников (колебаний, напряжения, тепла, загрязнения) и так далее. Неудивительно, что при таком широком наборе приложений теория обратных и некорректных задач стала одной из наиболее стремительно развивающихся областей современной науки. Основы теории и методов решения некорректных задач заложены в работах А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова, Р.Латтеса и Ж.Л.Лионса, В.Г.Романова и др. и на базе этих работ теория этих задач в настоящее время интенсивно развивается.

Для решения некорректных и обратных задач в выше отмеченных работах предложены различные эффективные методы и с помощью этих методов исследованы многочисленные некорректные и обратные задачи.

Например, для решения коэффициентных обратных задач предлагаются оптимизационные методы, т.е. нахождение неизвестных коэффициентов приводится к операторному уравнению $Aq = f$, далее строится функционал $J(q) = \|Aq - f\|^2$, исследуется задача минимизации этого функционала и из решения этой задачи получается решение исходной задачи.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию некоторых некорректно поставленных задач для эллиптических уравнений второго порядка и обратных задач для некоторых гиперболических уравнений второго порядка с применением методов оптимального управления.

Исходя из вышеизложенного тема диссертационной работы, несомненно, является актуальной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Цель работы. Целью работы является исследование некоторых некорректно поставленных задач для эллиптических уравнений второго порядка и обратных задач для некоторых гиперболических уравнений второго порядка с применением методов оптимального управления, а именно

- исследовать некорректную задачу Коши-Дирихле и Коши-Неймана для уравнения Пуассона;
- исследовать некорректную задачу Коши-Неймана для уравнения Гельмгольца;
- исследовать некорректную задачу Коши-Дирихле и Коши-Неймана для эллиптического уравнения второго порядка;
- исследовать задачу определения правой части уравнения колебаний струны;
- исследовать обратную граничную задачу для уравнения колебаний струны;
- исследовать задачу определения младшего коэффициента в уравнении колебаний струны;

- исследовать обратную граничную задачу для гиперболического уравнения второго порядка.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы функционального анализа, методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, метод Фурье, методы математической теории оптимального управления.

Научная новизна. В работе получены следующие основные научные результаты:

- получены решения некорректных задач Коши-Дирихле, Коши-Неймана для различных эллиптических уравнений второго порядка;
- выявлены причины некорректности задач Коши-Дирихле, Коши-Неймана для различных эллиптических уравнений второго порядка;
- найден явный вид градиента вспомогательного функционала, выведено необходимое и достаточное условие оптимальности, которое позволяет найти правую часть уравнения колебаний струны;
- найдены явные виды градиентов вспомогательных функционалов, выведено необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает возможность найти граничную функцию для гиперболических уравнений второго порядка;
- найден явный вид градиента вспомогательного функционала, выведено необходимое условие оптимальности, которое дает возможность найти младшего коэффициента в уравнении колебаний струны.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты теоретического характера, полученные в диссертационной работе, которые заключаются в разработке соответствующей методики, можно использовать при решении некорректных и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Практическая ценность же заключается в том, что задачи, рассматриваемые в диссертационной работе, используются как математические модели различных стационарных и технологических процессов, а также для решения некоторых некорректных и обратных задач для эллиптических и гиперболических уравнений.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $\bar{\upsilon}(x)\in U_\partial$ была оптимальным управлением в задаче (6),(1),(2),(5) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла граничной задаче (1),(2),(5), сопряженной граничной задаче

$$\frac{\partial^2\psi(x,t;\bar{\upsilon})}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi(x,t;\bar{\upsilon})}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in Q, \tag{7}$$

$$\psi(0,t;\bar{\upsilon})=0,\psi(\pi,t;\bar{\upsilon})=0,\quad t\in(-1,1), \tag{8}$$

$$\frac{\partial\psi(x,-1;\bar{\upsilon})}{\partial t}=u(x,-1;\bar{\upsilon})-\varphi_0(x),\frac{\partial\psi(x,1;\bar{\upsilon})}{\partial t}=0,\ x\in(0,\pi), \tag{9}$$

и вариационному неравенству

$$\int_0^\pi[-\psi(x,1;\upsilon)+\alpha\bar{\upsilon}(x)][\upsilon(x)-\bar{\upsilon}(x)]dx\ge 0,\ \forall\upsilon\in U_\partial \tag{10}$$

Далее, применяя метод Фурье к задачам (1),(2),(5), (7)-(9), вариационному неравенству (10) и устремляя $\alpha\to 0$, в случае $U_\partial=L_2(0,\pi)$ получается точное решение задачи (4),(1),(2),(5)

$$\bar{\upsilon}(x)=\sum_{k=1}^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}sh2k\left[k\varphi_{0k}+\varphi_{1k}cth2k-k\int_{-1}^1 G_k(-1;\tau)f_k(\tau)d\tau\right]\sin kx$$

и решение исходной задачи (1)-(3)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\varphi_{0k}chk(1+t)+\frac{\varphi_{1k}}{ksh2k}[ch2kchk(1+t)-chk(1-t)]\right.$$

$$\left.-chk(1+t)\int_{-1}^1 G_k(-1;\tau)f_k(\tau)d\tau+\int_{-1}^1 G_k(t;\tau)f_k(\tau)d\tau\right\}\sin kx,$$

где $G_k(t;\tau)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases}\ddot{u}_k(t)-k^2u_k(t)=f_k(t), & t\in(-1,1),\\ \dot{u}_k(-1)=\varphi_{1k},\dot{u}_k(1)=\bar{\upsilon}_k, & k=1,2,...\end{cases}$$

а $\varphi_{0k},\varphi_{1k},f_k(t),\bar{\upsilon}_k$ - коэффициенты Фурье функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x)$, $f(x,t),\bar{\upsilon}(x)$ по системе функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx\right\}_{k=1}^\infty$.

Отсюда делаются следующие выводы:

а) с ростом индекса k и при $\alpha\to 0$ коэффициенты Фурье функции $\bar{\upsilon}(x)$ и $u(x,t)$ могут неограниченно возрастать, если этот рост не будет «подавляться» более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов $\varphi_{0k},\varphi_{1k}$ и значений норм $\|f_k\|_{L_2(-1,1)}$;

б) граничная задача (1)-(3) при вышеуказанных условиях на данные имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\{\exp(2k)\varphi_{0k}\}_{k=1}^\infty,\left\{\exp(2k)\frac{\varphi_{1k}}{k}\right\}_{k=1}^\infty,\{\exp(2k)\cdot\|f_k\|_{L_2(-1,1)}\}_{k=1}^\infty\subset l_2.$$

Поэтому становится ясным природа некорректности в задаче Коши-Дирихле (1)-(3) и смысл регуляризации в задаче (4),(1),(2),(5), причем регуляризация позволяет найти приближенное решение. Далее приводится аналог примера Адамара в задаче (1)-(3), когда $f(x,t)\equiv 0,\varphi_0(x)\equiv 0,\ \varphi_1(x)=\exp(-\sqrt{k})\sin kx,\ k\in N$. Для того чтобы функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяла условию $\left\{\exp(2k)\cdot\frac{\varphi_{1k}}{k}\right\}_{k=1}^\infty\subset l_2$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье φ_{1k} имели асимптотику для больших k порядка $\exp(-(2+\varepsilon)k)$, где $\varepsilon>0$. В рассматриваемом нами примере имеем асимптотику всего лишь равную $\exp(-\sqrt{k})$, которая явно недостаточно для корректности задачи Коши-Дирихле для уравнения Лапласа.

В разделе 1.2 рассматривается некорректная граничная задача Коши-Неймана для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\quad t\in(-1,1), \tag{12}$$

$$u(x,-1)=\varphi_0(x),\frac{\partial u(x,-1)}{\partial t}=\varphi_1(x),\quad x\in(0,\pi), \tag{13}$$

где $f(x,t)\in L_2(Q)$, $\varphi_0(x)\in W_2^1(0,\pi)$, $\varphi_1(x)\in L_2(0,\pi)$ - заданные функции.

Задаче (11)-(13) сопоставляется задача оптимального управления: найти минимум функционала

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^\pi[u(x,-1;\upsilon)-\varphi_0(x)]^2dx$$

в $U_\partial\subset L_2(0,\pi)$ при ограничениях (11), (12) и

$$\frac{\partial u(x,-1)}{\partial t}=\varphi_1(x), \frac{\partial u(x,1)}{\partial t}=\upsilon(x), \quad x\in(0,\pi),$$

где U_∂ выпуклое, замкнутое множество в $L_2(0,\pi)$, причем $0\in U_\partial$. Новая задача регуляризируется и получаются результаты, аналогичные в разделе 1.1.

В разделе 1.3 рассматривается некорректная задача Коши-Неймана для уравнения Гельмгольца и получаются результаты, аналогичные в разделе 1.1.

Вторая глава диссертации состоит из двух разделов и посвящена исследованию некоторых некорректно поставленных задач для линейных эллиптических уравнений второго порядка.

В разделе 2.1 рассматривается некорректная граничная задача Коши-Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Au=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{14}$$

$$u|_{S_T}=0 \text{ на } (x,t)\in S_T, \tag{15}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x), \quad x\in\Omega, \tag{16}$$

где $\Omega\subset R^n$ - ограниченная область в R^n с гладкой границей Γ, $Q_T=\Omega\times(0,T)$ - цилиндр в R^{n+1}, $S_T=\Gamma\times(0,T)$ - боковая поверхность цилиндра Q_T, $f\in L_2(Q_T)$, $\varphi_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\varphi_1\in L_2(\Omega)$ - заданные функции;

$$Au\equiv\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall\xi\in R^n$ и для всех $x\in\overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\nu\sum_{i=1}^n\xi_i^2,\ \nu=const>0,\ a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ i,j=1,...,n.$$

Предполагается, что $\dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t}\in U_\partial$, где U_∂ - выпуклое замкнутое множество из $L_2(\Omega)$, причем $0\in U_\partial$.

Задаче (14)-(16) сопоставляется следующая задача оптимального управления: найти минимум функционала

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_\Omega[u(x,0;\upsilon)-\varphi_0(x)]^2dx \tag{17}$$

в U_∂ при ограничениях (14), (15) и

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}=\upsilon(x),\ x\in\Omega, \tag{18}$$

где $u(x,t;\upsilon)$ - решение задачи (14),(15),(18), соответствующее управлению $\upsilon\in U_\partial$.

Далее задача (17),(14),(15),(18) регуляризируется, т.е. рассматривается задача минимизации функционала

$$J_\alpha(\upsilon)=J(\upsilon)+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega|\upsilon(x)|^2dx \qquad (\alpha>0) \tag{19}$$

при ограничениях (14),(15),(18).

Доказываются следующие результаты.

Теорема 3. Для задачи оптимального управления (19),(14),(15),(18) существует такая единственная функция $\overline{\upsilon}\in U_\partial$, что

$$J_\alpha(\overline{\upsilon})=\inf_{\upsilon\in U_\partial}J_\alpha(\upsilon).$$

Теорема 4. Для того чтобы функция $\overline{\upsilon}(x)\in U_\partial$ была оптимальным управлением в задаче (19),(14),(15),(18) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла граничной задаче (14),(15), (18), сопряженной граничной задаче

$$\frac{\partial^2\psi(x,t;\overline{\upsilon})}{\partial t^2}+A\psi(x,t;\overline{\upsilon})=0,\quad (x,t)\in Q_T, \tag{20}$$

$$\psi(x,t;\bar{\upsilon})|_{S_T}=0\ ,\quad (x,t)\in S_T\ , \tag{21}$$

$$\frac{\partial\psi(x,0;\bar{\upsilon})}{\partial t}=u(x,0;\bar{\upsilon})-\varphi_0(x)\ ,\ \frac{\partial\psi(x,T;\bar{\upsilon})}{\partial t}=0,\quad x\in\Omega \tag{22}$$

и вариационному неравенству

$$\int_\Omega(-\psi(x,T;\bar{\upsilon})+\alpha\,\bar{\upsilon}(x))(\upsilon(x)-\bar{\upsilon}(x))dx\geq 0\quad\forall\upsilon\in U_\partial\ . \tag{23}$$

Далее, применяя метод Фурье к задачам (14),(15),(18), (20)-(22), (23) и устремляя $\alpha\to 0$, в случае $U_\partial=L_2(\Omega)$ получается точное решение задачи (17),(14),(15),(18)

$$\bar{\upsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k sh\lambda_k T\left(\varphi_{0k}+\frac{\varphi_{1k}cth\lambda_k T}{\lambda_k}-\int_0^T G_k(0;\tau)f_k(\tau)d\tau\right)X_k(x)$$

и решение исходной задачи (14)-(16)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\varphi_{0k}ch\lambda_k t+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k sh\lambda_k T}(ch\lambda_k t\cdot ch\lambda_k T-ch\lambda_k(T-t))-$$

$$-ch\lambda_k t\cdot\int_0^T G_k(0;\tau)f_k(\tau)d\tau+\int_0^T G_k(t;\tau)f_k(\tau)d\tau\Bigg]X_k(x),$$

где $X_k(x)$ и λ_k, $k=1,2,...$ системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи

$$AX(x)=-\lambda^2X(x),\quad X(x)|_\Gamma=0\ ,$$

$f_k(t),\varphi_{0k},\varphi_{1k}$, $k=1,2,...$ - коэффициенты Фурье функций $f(x,t)$, $\varphi_0(x),\varphi_1(x)$ по системе функций $X_k(x)$, а $G_k(t;\tau)$ функция Грина следующей задачи

$$\begin{cases}\ddot{u}_k(t)-\lambda_k^2u_k(t)=f_k(t),\quad t\in(0,T),\\ \dot{u}_k(0)=\varphi_{1k}\ ,\ \dot{u}_k(T)=\bar{\upsilon}_k,\quad k=1,2,...\end{cases}$$

Из полученных формул делаются следующие выводы:

а) с ростом индекса k и при $\alpha\to 0$ коэффициенты Фурье функции $\bar{\upsilon}(x)$ и $u(x,t)$ могут неограниченно возрастать, если этот рост не будет «подавляться» более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов $\varphi_{0k},\varphi_{1k}$ и значений норм $\|f_k\|_{L_2(0,T)}$;

б) граничная задача (14)-(16) при вышеуказанных условиях на данные имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\{\varphi_{0k}\exp(\lambda_kT)\}_{k=1}^{\infty},\left\{\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k}\exp(\lambda_kT)\right\}_{k=1}^{\infty},\{\|f_k\|_{L_2(0,T)}\exp(\lambda_kT)\}_{k=1}^{\infty}\subset l_2\,.$$

Поэтому становится ясным природа некорректности в задаче Коши-Дирихле (14)-(16).

Далее приводится аналог примера Адамара для рассматриваемой задачи.

В разделе 2.2 рассматривается некорректная задача Коши-Неймана для эллиптического уравнения второго порядка и получаются результаты аналогичные в разделе 2.1.

Третья глава диссертации состоит из четырех разделов и посвящена исследованию обратных задач для некоторых гиперболических уравнений второго порядка.

В разделе 3.1 рассматривается задача определения правой части уравнения колебаний струны, т.е. требуется определить пару функций $u(x,t)\in W_{2,0}^1(Q_T)$, $\upsilon(x,t)\in L_2(Q_T)$ из системы

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\upsilon(x,t),\ (x,t)\in Q_T\ , \tag{24}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ 0\leq x\leq l\ , \tag{25}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad 0\leq t\leq T\ , \tag{26}$$

$$u(x_0,t)=\varphi(t)\ ,\ 0\leq t\leq T\ , \tag{27}$$

где $Q_T=(0,l)\times(0,T)$ - прямоугольник, $u_0\in\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, $u_1\in L_2(0,l)$, $\varphi\in L_2(0,T)$ - заданные функции, $x_0\in(0,l)$ - заданная точка.

Отметим, что краевая задача (24)-(26) при каждой фиксированной $\upsilon(x,t)\in L_2(Q_T)$ имеет единственное обобщенное решение в

$W^1_{2,0}(Q_T)$ и она обладает свойствами $u \in C\left([0,T]; \overset{0}{W}{}^1_2(0,l)\right)$,

$\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T]; L_2(0,l))$.

Эта задача сводится к следующей задаче: найти минимум функционала

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^T [u(x_0,t;\upsilon) - \varphi(t)]^2 dt, \quad (28)$$

при ограничениях (24)-(26), где $u(x,t;\upsilon)$ - решение задачи (24)-(26) при $\upsilon = \upsilon(x,t)$. Эту задачу назовем задачей (28),(24)-(26). Если существует такая функция $\upsilon \in L_2(Q_T)$, что $\min\limits_{\upsilon \in L_2(Q_T)} J(\upsilon) = 0$, то дополнительное условие (27) выполняется.

В этом разделе сначала показывается, что

$$\inf_{\upsilon \in L_2(Q_T)} J(\upsilon) = 0.$$

В работе показывается, что функционал (28) дифференцируем в $L_2(Q_T)$ и для дифференциала функционала (28) получается выражение:

$$dJ(\upsilon) = \langle J'(\upsilon), \delta\upsilon \rangle_{L_2(Q_T)} = \int_{Q_T} \psi(x,t;\upsilon)\delta\upsilon(x,t)dxdt,$$

где $\psi(x,t;\upsilon)$ - обобщенное решение следующей сопряженной задачи при $\upsilon = \upsilon(x,t)$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = [u(x,t;\upsilon) - \varphi(t)]\delta(x - x_0), \ (x,t) \in Q_T, \quad (29)$$

$$\psi(x,T) = 0, \ \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t} = 0, \ 0 \le x \le l, \quad (30)$$

$$\psi(0,t) = 0, \ \psi(l,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \quad (31)$$

а $\delta(x)$ - функция Дирака.

Далее доказывается условие оптимальности.

Теорема 5. Пусть выполняются вышеизложенные условия на данные задачи (24)-(27). Тогда для оптимальности управления

$\upsilon_* = \upsilon_*(x,t) \in L_2(Q_T)$ в задаче (28),(24)-(26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\psi_*(x,t) = 0 \ \text{ почти для всех } (x,t) \in Q_T,$$

где $\psi_*(x,t) = \psi(x,t;\upsilon_*)$ - решение задачи (29)-(31) при $\upsilon = \upsilon_*(x,t)$.

В разделе 3.2 изучается обратная граничная задача для уравнения колебаний струны.

В области $Q_T = \{(x,t) \mid 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \quad (32)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \ 0 \le x \le l, \quad (33)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \upsilon(t), \ 0 \le t \le T, \quad (34)$$

где $f \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in W^1_2(0,l)$, $u_1 \in L_2(0,l)$ - заданные функции, $l > 0$, $T > 0$ - заданные постоянные, причем $T > 2l$, $\upsilon(t)$ - неизвестная граничная функция. Для того чтобы определить $\upsilon(t)$, мы воспользуемся дополнительной информацией

$$u|_{x=0} = a(t),$$

где $a \in L_2(0,T)$ - заданная функция. Как в предыдущем разделе, эта задача сводится к следующей задаче: минимизировать функционал

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^T [u(0,t;\upsilon) - a(t)]^2 dt \quad (35)$$

при ограничениях (32)-(34).

Функцию $\upsilon(t)$ назовем управлением. Предполагается, что $\upsilon \in L_2(0,T)$.

Доказывается

Теорема 6. В задаче оптимального управления (35),(32)-(34)

$$\inf_{\upsilon \in L_2(0,T)} J(\upsilon) = 0.$$

Теорема 7. Для того чтобы $\bar{\upsilon} \in L_2(0,T)$ было оптимальным управлением в задаче (35),(32)-(34)необходимо и достаточно, что

$$J'(\bar{\upsilon}) = \psi(l,t;\bar{\upsilon}) = 0,$$

где $\psi(x,t;\bar{\upsilon})$ решение следующей сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \ (x,t) \in Q_T,$$

$$\psi(x,T) = 0, \ \frac{\partial \psi(x,T)}{\partial t} = 0, \ 0 \le x \le l,$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0,t;\bar{\upsilon}) - a(t), \ \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \ 0 \le t \le T.$$

В разделе 3.3 в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассматривается обратная граничная задача для гиперболического уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0, \ (x,t) \in Q_T, \tag{36}$$

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \ x \in \Omega, \tag{37}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{S_T^1} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{S_T^2} = \upsilon(s,t), (s,t) \in S_T^2, \tag{38}$$

$$u\big|_{S_T^1} = a(s,t), (s,t) \in S_T^1, \tag{39}$$

где Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей Γ. $S_T = \Gamma \times (0,T)$ - боковая поверхность цилиндра Q_T, $S_T = S_T^1 \cup S_T^2$, $S_T^1 \cap S_T^2 = \varnothing$, $mes\, S_i^i > 0$, $i = 1,2$, $Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, причем $a_{ij}(x)$ - заданные функции из $C^1(\bar{\Omega})$, $\forall \xi \in R^n$ и для всех $x \in \bar{\Omega}$ $\quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \alpha = const > 0,$$

$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)$ - конормальная производная, ν - внешняя нормаль к границе Γ области Ω, $T > 0$ - заданное постоянное, $a(s,t) \in L_2(S_T^1)$ - заданная функция.

В (38) $\upsilon(s,t)$ - неизвестная граничная функция.

В работе эта задача сводится к следующей задаче: минимизировать функционал

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_{S_T^1} [u(s,t;\upsilon) - a(s,t)]^2 ds dt \tag{40}$$

на решениях задачи (36)-(38), где $u(x,t;\upsilon)$ - является решением задачи (36)-(38) при $\upsilon = \upsilon(s,t)$. Функция $\upsilon(s,t)$ называется управлением, причем предполагается, что $\upsilon \in L_2(S_T^2)$.

В этом разделе доказываются

Теорема 8. В задаче оптимизации (40),(36)-(38)

$$\inf_{\upsilon \in L_2(S_T^2)} J(\upsilon) = 0.$$

Теорема 9. Для того, чтобы $\bar{\upsilon} \in L_2(S_T^2)$ было оптимальным управлением в задаче (40),(36)-(38) необходимо и достаточно, что

$$J'(\bar{\upsilon})(\upsilon - \bar{\upsilon}) = 0 \quad \forall \upsilon \in L_2(S_T^2).$$

Далее показывается, что

$$J'(\bar{\upsilon})(\upsilon - \bar{\upsilon}) = \int_{S_T^2} p(s,t;\bar{\upsilon})(\upsilon(s,t) - \bar{\upsilon}(s,t)) ds dt,$$

где $p(x,t;\bar{\upsilon})$ - решение следующей сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + Ap = 0, \ (x,t) \in Q_T,$$

$$p(x,T) = 0, \ \frac{\partial p(x,T)}{\partial t} = 0, \ x \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \nu_A}\right|_{S_T^1} = u(s,t;\bar{\upsilon}) - a(s,t), \quad \left.\frac{\partial p}{\partial \nu_A}\right|_{S_T^2} = 0.$$

Наконец, в последнем разделе 3.4 рассматривается задача определения коэффициента при младшем члене в уравнении колебаний струны: требуется определить пару функций $u \in W_{2,0}^1(Q_T)$, $\upsilon \in L_\infty(0,T)$ из системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \upsilon u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{41}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x),\ 0 \le x \le l, \tag{42}$$

$$u(0,t) = 0,\quad u(l,t) = 0,\quad 0 \le t \le T, \tag{43}$$

$$u(x_0,t) = \varphi(t),\ 0 \le t \le T, \tag{44}$$

где $Q_T = (0,l)\times(0,T)$, $f \in L_2(0,T)$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, $u_1 \in L_2(0,l)$, $\varphi \in L_2(0,T)$ - заданные функции, $x_0 \in (0,l)$ - заданная точка. Эта задача сводится к следующей задаче: найти минимум функционала

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^T [u(x_0,t;\upsilon) - \varphi(t)]^2 dt, \tag{45}$$

при ограничениях (41)-(43), где $u(x,t;\upsilon)$ - решение задачи (41)-(43) при $\upsilon = \upsilon(x,t)$.

Доказывается необходимое условие:

Теорема 10. Пусть выполнены вышеналоженные условия на данные задачи (41)-(44). Тогда для оптимальности $\upsilon_* = \upsilon_*(x,t) \in L_\infty(Q_T)$ в задаче (45), (41)-(43) необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$u_*(x,t)\psi_*(x,t) = 0 \ \text{ почти для всех } (x,t) \in Q_T,$$

где $u_*(x,t) = u(x,t;\upsilon_*)$ решение задачи (41)-(43), а $\psi_*(x,t) = \psi(x,t;\upsilon_*)$ - обобщенное решение следующей сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \upsilon_* \psi = -[u(x,t;\upsilon_*) - \varphi(t)]\delta(x - x_0),\ (x,t) \in Q_T,$$

$$\psi(x,T) = 0,\ \frac{\partial \psi(x,T)}{\partial t} = 0,\ 0 \le x \le l,$$

$$\psi(0,t) = 0,\ \psi(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Г.Ф.Кулиеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Quliyev H.F., Zeynalli S.M. On application of optimal control methods to the solution of the Cauchy-Dirichlet problem for a second order elliptic equation // Proceeding of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, vol.XXXVI (XLIV), 2012, p.109-116.
2. Quliyev H.F., Zeynalli S.M. On application of the optimal control methods to solving Cauchy-Neymann problem for the second order elliptic equation / 9th seminar of differential equation and dynamical systems, Tebriz, Iran, 2012, 11-13 July, p.343-344.
3. Кулиев Г.Ф., Зейналлы С.М. Применение методов оптимального управления к решению задачи Коши-Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка / Материалы международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика И.И.Ибрагимова, Баку, 2012, с.126-128.
4. Кулиев Г.Ф., Зейналлы С.М., Гусейнова А.Ф. О применении методов оптимального управления к решению задачи Коши-Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка /BDU-nun hesablama riyaziyyatı kafedrasının 50 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, Bakı 15-16 noyabr, 2012, s.155-158.
5. Quliyev H.F., Gasimov Y.S., Zeynalli S.M. Optimal control method to solving Cauchy-Dirichlet problem for elliptic equation

/ 4th Conference an control and optimization with industrial applications, Borovets, Bulqaria, 2013, 10-12 July, p.32.
6. Кулиев Г.Ф., Зейналлы С.М. О применении методов оптимального управления к решению задачи Коши-Неймана для эллиптического уравнения второго порядка // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2013, №2, с.29-38.
7. Quliyev H.F., Gasimov Y.S., Zeynalli S.M. Application of the optimization methods to solution of the Cauchy-Dirichlet problem for Poisson equation // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2013, №3, с.12-18.
8. Кулиев Г.Ф., Зейналлы С.М. Применение методов оптимизации к решению задачи Коши-Неймана для уравнения типа Гельмгольца // Proceedings of the Institute of Applied Mathmatics, v.3, №2,2014, p.164-172.
9. Кулиев Г.Ф., Гасымов Ю.С., Зейналлы С.М. Об определении правой части уравнения колебаний струны // "Riyaziyyat və İKT-nin tətbiq sahələri, yeni tədris texnologiyaları" beynəlxalq konfransının materialları, I hissə, Gəncə, 05-06 iyun 2014, c.198-199.
10. Кулиев Г.Ф., Зейналлы С.М. Об определении коэффициента при младшем члене в уравнении колебаний струны // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2014, №3, с.50-56.
11. Зейналлы С.М. Обратная граничная задача для гиперболического уравнения второго порядка и ее исследование методами оптимизации // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2014, №1, с.98-105.
12. Quliyev H.F., Gasimov Y.S., Zeynalli S.M. Optimal control method for solving the Cauchy-Neumann problem for the Poisson equation // Journal of mathematical Physics, Analysic, Geometry, 2014, vol.10, №4, p.412-421.

SÜBHİYYƏ MƏMMƏD qızı ZEYNALLI

OPTİMAL İDARƏETMƏ ÜSULLARININ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN KORREKT OLMAYAN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRƏ TƏTBİQİ

X Ü L A S Ə

Dissertasiya işi optimal idarəetmə üsullarının tətbiqi ilə ikitərtibli elliptik tənliklər üçün bəzi korrekt olmayan məsələlərin və bəzi ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün tərs məsələlərin tədqiqinə həsr olunub.

İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- müxtəlif ikitərtibli elliptik tənliklər üçün qeyri-korrekt Koşi-Dirixle, Koşi-Neyman məsələlərinin həlli alınmışdır;
- müxtəlif ikitərtibli elliptik tənliklər üçün Koşi-Dirixle, Koşi-Neyman məsələlərinin qeyri-korrektliyinin səbəbləri aşkarlanıb;
- köməkçi funksionalın qradiyentinin aşkar ifadəsi tapılıb, simin rəqsləri tənliyinin sağ tərəfini tapılmağa imkan verən optimallığın zəruri və kafi şərti çıxarılıb;
- köməkçi funksionalların qradiyentinin aşkar ifadəsi tapılıb, ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün sərhəd funksiyasını tapmağa imkan verən optimallıq üçün zəruri və kafi şərt çıxarılıb;
- köməkçi funksionalın qradiyentinin aşkar ifadəsi tapılıb, simin rəqsləri tənliyində kiçik əmsalın tapılmasına imkan verən optimallıq üçün zəruri şərt çıxarılıb.

SUBHIYA MAMED qizi ZEYNALLI

APPLICATION OF THE OPTIMAL CONTROL METHODS TO THE SOLITION OF THE ILL-POSED PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

The thesis is devoted to the investigation of some ill-posed problems for the second order elliptic equations and inverse problems for the second order hyperbolic equations.

The following main results have been obtained in the work:

- the solutions of the ill-posed Cauchy-Dirichlet and Cauchy-Neumann problems for the different second order elliptic equations;
- the ill-possedness of the Cauchy-Dirichlet and Cauchy-Neumann problems for the different second order elliptic equations;
- explicit formula is derived for the gradient of the auxiliary functional, necessary and sufficient optimality conditions are found allowing to determine the right hand side of the equation of string vibrations;
- explicit formula is derived for the gradient of the auxiliary functional, necessary and sufficient optimality conditions are found allowing to determine the boundary function for the second order hyperbolic equations;
- explicit formula is derived for the gradient of the auxiliary functional and necessary optimality condition is found allowing to determine lower coefficient in the string vibration equation.

Формат бумаги 60x84 1/16. Тираж 100.

Издательство «Бакы Университети», Баку, AZ 1148, ул. З.Халилова, 23.