AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

KƏSR-MAKSİMAL, KƏSR-İNTEQRAL OPERATORLARIN VƏ ONLARIN KOMMUTATORLARININ ORLİÇ VƏ ÜMUMİLƏŞMİŞ ORLİÇ-MORRİ FƏZALARINDA MƏHDUDLUĞU MEYARLARI

İxtisas: 1202.01-Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Sabir Qəhrəman oğlu Həsənov**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2022

Dissertasiya işi Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r. e. d., professor
Vaqif Sabir oğlu Quliyev

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Rəhim Mikayıl oğlu Rzayev

riyaziyyat elmləri doktoru, dosent
Mübariz Qafarşah oğlu Hacıbəyov

riyaziyyat elmləri doktoru, dosent
Cavanşir Cavad oğlu Həsənov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r. e. d., prof.

____________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.-r. e. n.

____________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r. e. d., prof.

____________ **Bilal Telman oğlu Bilalov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Dissertasiya işi harmonik analizin-funksional fəzalar nəzəriyyəsi, maksimal operatorlar nəzəriyyəsi, kəsr –maksimal operatorlar nəzəriyyəsi, Riss potensialı nəzəriyyəsi kimi bir-biri ilə sıx əlaqəli olan və bir-birini effektli tamamlayan bölmələrinə həsr olunmuşdur. Funksional analizin inkişafı və diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin tələbatı funksional fəzaların tədqiqinə zərurət yaratmışdır. Yuxarıda qeyd olunanlar dissertasiya mövzusunun kafi qədər aktual olduğunu göstərir və görundüyü kimi nəzəri və praktiki əhəmiyyətə malikdir.

Harmonik analiz sahəsində axırıncı onilliklərin əsas nailiyyətlərindən biri maksimal operatorlar nəzəriyyəsinin, kəsr-maksimal operatorlar və potensial tip inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin ideya və texnikalarının uğurla cəlb olunmasından ibarətdir. Bu ideya və metodlar xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində, funksiyalar nəzəriyyəsində, funksional analizdə, ehtimal nəzəriyyəsində, yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin məsələlərində, bircins qrupların harmonik analizində və s. riyaziyyatın bölmələrində tətbiq olunur. Maksimal operatorun, kəsr-maksimal operatorun və Riss potensialının funksional fəzalarda sistematik öyrənilməsi öz başlanğıcını klassik Hardi-Littlvud-Sobolev teoremindən götürür. 1970-ci illərdə J. Peetre, D.R. Adamsın işlərində Hardi-Littlvud-Sobolev teoremi Lebeq fəzasından Morri fəzasına ümumiləşdirilmişdir. Morri fəzasını 1938-ci ildə elliptik tənliklərin və variasiya hesabının bəzi problemləri ilə əlaqədar Ç.B. Morri daxil etmişdir. Sonralar bu operatorların və onların kommutatorlarının öyrənilməsini W. Orlicz, R.Coifman, R.Rochberg, G.Weiss, E.Stein, C.Fefferman, S.Chanillo, A. Cianchi, H.Kita, E.Nakai, S.Janson, Y.Sawano, V.Kokilashvilli, D.Yang, M.A.Ragusa, X.Fu, E.Sawano, V.T.Burenkov, L.Softova, V.S.Guliyev, A.Gogatishvili, R.Mustafaev, P.Zhang,A.M.Nadjafov və s. tədqiqatçılar davam etdirmişlər.

Potensial nəzəriyyəsinin metodlarının xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin çoxsaylı sərhəd məsələlərinə, analitik funksiyalar nəzəriyyəsinin məsələlərinə, həmçinin mexanikanın məsələlərinə tətbiqi zəngin tarixə və effekli praktikaya malikdir. Kəsr-maksimal, kəsr-inteqral operatorların və onların kommutatorlarının məhdudluğu bəzi funksional fəzalarda VMO əmsallı elliptik tənliklərin həllərinin requlyarlığının tədqiqinə tətbiq edilə bilər. Riss potensialının müxtəlif xassələri М. Рисс, Г.Х. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, С.Л. Соболев, И. Стейн və s. tədqiqatçıların işlərində öyrənilmişdir. Azərbaycan riyaziyyatçılarından bu sahədə A.G. Hacıyev, S.K. Abdullayev, R.K.Seyfullayev, V.S.Quliyev, İ.A.Əliyev, R.M. Rzayev, R.Ə.Bəndəliyev,J.J.Həsənov,EJ.İbrahimov,Y.Y.Məmmədov,M.Q.Hacıbəyov və s. tədqiqatçıların işlərini qeyd etmək olar.

Kəsr-maksimal,kəsr-inteqral operatorların Orliç fəzasında məhdudluğu meyarları tutum tip terminlərdə A.Çiançının[1] işlərində alınmışdır. Təqdim olunan işdə isə [15,19] bu operatorların Orliç fəzasında məhdudluğu üçün Sobolev terminlərində zəruri və kafi şərtlər isbat olunur. Bu nəticələr qeyd olunan operatorlar üçün müxtəlif xarakteristikalardır. Bundan əlavə, kəsr-maksimal, kəsr-inteqral operatoların kommutatorlarının Orliç fəzalarında məhdudluğu öyrənilir. V.S.Quliyev və F.Deringozün[2] işlərində Riss potensialı və onun kommutatorunun məhdudluğu üçün ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında Spanne tip kafi şərtlər isbat olunur. Təqdim olunan işdə isə zəruri şərtlər isbat olunur. Bundan əlavə, bu işdə [9,14,17] kəsr-maksimal, kəsr-inteqrql operatorların və onların kommutatorlarının ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında Adams tip məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunur. P.Zhang[3] işində b funksiyası Lipşis fəzasına daxil olduğu halda maksimal operatorun kommutatorunun məhdudluğu Lebeq fəzasında öyrənilir. Bu işdə isə b funksiyası uyğun olaraq Lipşis fəzasına və BMO fəzasına daxil olduğu halda kəsr-maksimal, kəsr-inteqral operatorların kommutatorları üçün Orliç fəzalarında məhdudluq meyarları isbat edilir [15,18,19].

----

[1] Cianchi, A. Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces // Journal of London Mathematical Society -1999, 60(1), p. 247-286.

[2] Guliyev, V.S., Deringoz, F. On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces // Journal of Functional Spaces. Article ID 617414, -2014, -11 p.

[3] Zhang, P. Characterization of Lipscitz spaces via commutators of the Hardy-Littlewood maximal function // C.R. Acad. Sci., -2017, v.355, -p. 336-344.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin obyekti kərs-maksimal, kəsr-inteqral operatorların və onların kommutatorlarının Orliç və ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu meyarlarının öyrənilməsi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

•kəsr-maksimal operator, Riss potensialı və onların kommutatorlarının uyğun olaraq Orliç fəzalarında və ümumi-ləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapmaq.

•BMO fəzasının və Lipşis fəzasının kəsr-maksimal operatorun və Riss potensialının kommutatorlarının köməyi ilə uyğun olaraq Orliç fəzalarında və ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzlarında xarakterizasiyası.

•maksimal operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapmaq.

•maksimal operatorun vektorqiymətli ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğunun isbatı və Riss potensialı üçün ikiçəkili bərabərsizliyin p-qabarıq çəkili modulyar Banax funksional fəzalarında isbatı.

•multisubxətti kəsr-maksimal operatorun modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu və həmçinin multixətti kəsr-inteqral operatorun Morri fəzaları hasilində və modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapmaq.

•parametrik Marsinkeviç inteqralının ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğunun tədqiqi.

Tədqiqat metodları. Dissertasiyada funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analizin, inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

1. Kəsr-maksimal, kəsr-inteqral operatorların və onların kommutatorlarının uyğun olaraq Orliç və ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər.

2. Maksimal operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu meyarları, Riss potensialı üçün p-qabarıq Banax funksiyalar fəzasında ikiçəkili bərabərsizliklər.

3. Multisubxətti kəsr-maksimal və multixətti kəsr-inteqral operatorların uyğun olaraq Morri fəzaları hasilində və modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu meyarları.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alımışdır:

1. Kəsr-maksimal operator və onun kommutatorlarının Orlıç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

2. Riss potensialının və onun kommutatorunun Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

3. Kəsr-maksimal,kəsr-inteqral opratorların və onların kommutatorlarının ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

4. Maksimal operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

5. Maksimal operatorun vektorqiymətli ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat olunmuşdur.

6. Riss potensialı üçün *p*-qabarıq çəkili modulyar Banax funksional fəzalarında ikiçəkili bərabərsizliklər isbat olunmuşdur.

7. Multisubxətti kəsr-maksimal operatorun modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

8. Kəsr-inteqral operatorun Morri fəzaları hasilində və modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

9. Parametrik Marsinkeviç inteqralının ümümiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu isbat olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyada alınan nəticələr nəzəri xarakter daşıyır və operatorlar nəzəriyyəsinin Orliç fəzalarında və ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında inkişafını şərtləndirir. Dissertasiyada alınan nəticələr yalnız funksional analiz və operatorlar nəzəriyyəsinin mütəxəssizləri üçün deyil, həmçinin , məsələn, xüsusi törəməli tənliklərdə, variasiya məsələlərində maraq kəsb edə bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" (rəh. AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S. Quliyev); "Diferensial tənliklər" (rəh. f.-r.e.d., prof. Ə.B. Əliyev) şöbələrinin seminarlarında, AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ümuminstitut seminarında; BDU-nun "Riyazi analız" (rəh. f.-r.e.d., prof. S.S. Mirzəyev) və "Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz" (rəh. f.-r.e.d., prof. Ə.M. Əhmədov) kafedralarının seminarlarında məruzə edilmişdir. Dissertasiyanın əsas nəticələri həmçinin riyaziyyat üzrə "Riy. Anal., Dif. Tənliklər" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı, 2015): riyaziyyat üzrə "Qeyri-harmonik Anal. və Dif. Oper." adlı beynəlxalq konfransda (Bakı, 2016), akad. A. Hacıyevin 80-illiyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransda (Bakı, 2017); riyaziyyat üzrə "Morri tip fəzalarda operatorlar və tətbiqləri" adlı beynəlxalq konfranslarda (Türkiyə, 2017, 2019); riyaziyyat üzrə "Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri" adlı beynəlxalq konfransda(Bakı, 2019) məruzə olunmuşdur.

Alınan nəticələr funksional analizdə və operatorlar nəzəriyyəsində tətbiq edilə bilər. Alınan nəticələrin köməyi ilə elliptik operatorlar üçün sərhəd məsələlərinin xassələrini tədqiq etmək olar.Kəsr-inteqral operator və onun kommutatoru üçün alınan qiymətləndirmələri baxılan fəzalarda VMO əmsallı elliptik tənliklərin həllərinin requlyarlığının tədqiqinə tətbiq etmək olar. Həmçinin kəsr-maksimal operator və onun kommutatorunun məhdudluğunu baxılan funksional fəzalarda Şredinger operatorunun məhdudluğunun təqiqinə tətbiq etmək olar.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Mudafiəyə çıxarılan bütün əsas nəticələr şəxsən müəllif tərəfindən funksional analizin və operatorlar nəzəriyyəsinin metodlarını tətbiq etməklə alınmışdır. Elmi məsləhətçi tədqiqat istiqamətinin seçilməsində və alınan nəticələrin analizində iştirak etmişdir.

Nəşrlər.

• Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında AAK tərəfindən tövsiyyə edilmiş nəşrlərdə -15.

• Tezislər -6.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın strukturu və həcmi(işarələrdə). Titul səhifəsi -419 işarə, mündəricat -2660 işarə, giriş -83708 işarə, dissertasiyanın əsas məzmunu -320244 işarə(I fəsil -83283 işarə, II fəsil -101442 işarə, III fəsil -77654 işarə, IV fəsil -57865 işarə), nəticə -2101 işarə, ədəbiyyat -26280 işarə, cəmi -435412 işarə.

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi dörd fəsildən ibarətdir. Dissertasiyanın birinci fəslində kəsr-maksimal, kəsr-inteqral ope-ratorlar və onların kommutatorları daxil edilir və Orliç fəzalarında tədqiq edilir. Bu fəsildə M_α kəsr-maksimal operator, I_α Riss poten-sialı və onların kommutatorlarının Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunur. Bu nəticələrin tətbiqi kimi b funksiyası uyğun olaraq BMO fəzasına və Lipşis fəzasına daxil olduqda $M_{b,\alpha}$ kəsr-maksimal kommutatorun, $[b, M_\alpha]$ qeyri-xətti kommutatorun, $[b, I_\alpha]$ kommutatorunun mədudluğu öyrənilir və BMO və Lipşis fəzalarının uyğun olaraq yeni xarakteristikaları alınır. Birinci fəslin birinci bəndində Orliç fəzası haqqında zəruri faktlar şərh olunur.

Tərif 1. Əgər $\Phi:[0,+\infty)\to[0,\infty]$ funksiyası qabarıq, soldan kəsilməz və $\lim\limits_{r\to+0}\Phi(r)=\Phi(0)=0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\Phi(r)=\infty$ olarsa, onda Φ Yunq funksiyası adlanır.

Y ilə elə Φ Yunq funksiyaları çoxluğunu işarə edək ki, $0<r<+\infty$ olduqda $0<\Phi(r)<+\infty$ olsun.

Tərif 2. (Orliç fəzası). Φ Yunq funksiyası üçün

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(k\,|f(x)|)dx<+\infty,\text{ùÿðùàí ñû } k>0 \text{ ö÷öí}\right\}$$

çoxluğu Orliç fəzası adlanır. $L^\Phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fəzası elə f funksiyaları çoxluğudur ki, istənilən $B\subset\mathbb{R}^n$ kürəsi üçün $f\chi_B\in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$.

$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ fəzası

$$\|f\|_{L^\Phi}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)dx\le 1\right\}$$

normasına nəzərən Banax fəzasıdır.

Ölçülən $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ çoxluğu, ölçülən f funksiyası və $t>0$ üçün

$$m(\Omega,f,t)=|\{x\in\Omega:|f(x)|>t\}|$$

olsun.

$\Omega = \mathbb{R}^n$ olduqda onu $m(f,t)$ ilə işarə edək.

Tərif 3. Zəif Orliç fəzası

$$WL^{\Phi}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \| f \|_{WL^{\Phi}} < +\infty\}$$

aşağıdakı norma ilə müəyyən olunur:

$$\| f \|_{WL^{\Phi}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi(t) m\left(\frac{f}{\lambda}, t\right) \leq 1 \right\}.$$

Φ Yunq funksiyası və $0 \leq s \leq +\infty$ üçün

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\} \quad (\inf \varnothing = +\infty)$$

olsun.

Əgər $\Phi \in Y$ olarsa, onda Φ^{-1} funksiyası Φ funksiyasının adi tərs funksiyasıdır. Qeyd edək ki,

$$\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(\Phi(r)), \ \ 0 \leq r < +\infty.$$

Əgər $\Phi(2r) \leq k\Phi(r)$ bərabərsizliyi r>0 və hər hansı $k > 1$ üçün ödənərsə, onda deyirlər ki, Φ Yunq funksiyası Δ_2-şərtini ödəyir və $\Phi \in \Delta_2$ kimi işarə olunur. Əgər $\Phi \in \Delta_2$ olarsa, onda $\Phi \in Y$ olar. Əgər $\Phi(r) \leq \dfrac{1}{2k}\Phi(kr), \quad r \geq 0,$ bərabərsizliyi hər hansı $k > 1$ üçün ödənərsə, onda deyirlər ki, Φ Yunq funksiyası ∇_2-şərtini ödəyir və $\Phi \in \nabla_2$ kimi işarə olunur.

Φ Yunq funksiyası üçün tamamlayıcı $\tilde{\Phi}$ funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \sup\{rs - \Phi(s) : s \in [0,\infty)\}, & r \in [0,\infty) \\ +\infty, & r = +\infty. \end{cases}$$

$\tilde{\Phi}$ tamamlayıcı funksiyası həmçinin Yunq funksiyası adlanır və $\tilde{\tilde{\Phi}} = \Phi$.

Qeyd edək ki, kəsr-maksimal operator aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$M_{\alpha} f(x) = \sup_{B} |B(x,t)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B} |f(y)|\, dy, \ \ 0 \leq \alpha < n,$$

burada supremum x-in daxil olduğu hər bir $B \subset \mathbb{R}^n$ kürələri üçün götürülür, I_α Riss inteqral operatoru isə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n.$$

Əgər α=0 olarsa,onda $M \equiv M_0$ Hardi-Littlvud maksimal operatoru adlanır.

Kəsr-maksimal коmmutator aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$M_{b,\alpha} f(x) = \sup_{x \in B} |B|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_B |b(x) - b(y)| \, |f(y)| \, dy,$$

burada supremum x-in daxil olduğu hər bir $B \subset \mathbb{R}^n$ kürələri üçün götürülür və b lokal inteqrallanan funksiyadır.

Əgər α=0 olarsa, onda $M_b \equiv M_{b,0}$ maksimal kommutator adlanır.

M_α qeyri-xətti kommutator operatoru lokal inteqrallanan b funksiyası ilə aşağıdakı kimi təyin etmək olar:

$$[b, M_\alpha](f)(x) = b(x) M_\alpha(f)(x) - M_\alpha(bf)(x),$$

kommutator $[b, I_\alpha]$ və operator $|b, I_\alpha|$ isə uyğun olaraq aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$[b, I_\alpha] = I_\alpha(bf)(x) - b(x) I_\alpha(f)(x), \quad |b, I_\alpha| = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(x) - b(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy.$$

İkinci bənddə M_α operatorunun Orliç fəzalarında və zəif Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

1.2 bəndinin əsas nəticəsi aşağıdakı teoremlə ifadə olunur:

Teoreм 1. Tutaq ki, $0 < \alpha < n$, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır və $\Phi \in Y$. Onda

$$r^{-\frac{\alpha}{n}} \Phi^{-1}(r) \le C \Psi^{-1}(r) \qquad (1)$$

şərti istənilən $r > 0$, və r-dən asılı olmayan $C > 0$ sabiti üçün M_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ fəzasından $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, əgər $\Phi \in \nabla_2$ olarsa, onda (1) şərti M_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Dissertasiyanın birinci fəslinin 1.3 bəndində $M_{b,\alpha}$ kəsr-maksimal kommutatorun və $[b, M_\alpha]$ kommutatorunun Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

Tərif 4.

$$\| f \|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| \, dy$$

sonlu normalı $BMO(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\text{const}\} : \| f \|_* < \infty \}$ fəzası daxil edək, burada $f_{B(x,r)} = \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)dy$.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ fəzası $\| \cdot \|_*$ normasına nəzərən Banax fəzasıdır.

Növbəti teoremlə $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt ifadə olunur.

Теорем 2. Tutaq ki, $0 < \alpha < n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ və Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır və $\Phi \in Y$.

1. Əgər $\Phi \in \nabla_2$ və $\Psi \in \Delta_2$ olarsa, onda

$$r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}) + \sup_{r<t<\infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) \Phi^{-1}(t^{-n}) t^\alpha \le C \Psi^{-1}(r^{-n})$$

sərti $r > 0$ olduqda, burada $C > 0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\Psi \in \Delta_2$ olarsa, onda

$$r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}) \le C \Psi^{-1}(r^{-n}) \qquad (2)$$

şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \nabla_2$ и $\Psi \in \Delta_2$. Əgər

$$\sup_{r<t<\infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) \Phi^{-1}(t^{-n}) t^\alpha \le C r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}) \qquad (3)$$

şərti istənilən $r>0$ üçün ödənilərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (2) şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Tərif 5. Tutaq ki, $0<\beta<1$. Əgər elə müsbət C sabiti varsa ki, istənilən $x,y\in\mathbb{R}^n$ üçün

$$|b(x)-b(y)|\le C|x-y|^{\beta}$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda deyirlər ki, b funksiyası $\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ Lipşis fəzasına daxildir.

C sabitinin bu bərabərsizliyi ödəyən ən kiçik qiyməti b funksiyasının $\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ norması adlanır və $\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)}$ kimi işarə olunur.

Teorem 3. Tutaq ki, $0<\beta<1,\ 0\le\alpha<n,\ 0<\alpha+\beta<n,$ $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\setminus\{\mathrm{const}\},\Phi,\Psi$ Yunq funksiyalarıdır və $\Phi\in Y$.

1. Əgər $\Phi\in\nabla_2$ olarsa və

$$t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}\Phi^{-1}(t)\le C\Psi^{-1}(t) \tag{4}$$

şərti $t>0$ olduqda ödənilərsə, burada $C>0$ sabiti t-dən asılı deyil, onda $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər

$$\Psi^{-1}(t)\le C\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}} \tag{5}$$

şərti $t>0$ olduqda ödənilərsə,burada $C>0$ t-dən asılı deyil, onda $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\Phi\in\nabla_2$ və $\Psi^{-1}(t)\approx\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$ olarsa, onda $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Teorem 4. Tutaq ki, $0<\beta<1,\ \ 0\le\alpha<n,\ \ 0<\alpha+\beta<n,$ $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\setminus\{\mathrm{const}\}$, Φ,Ψ Yunq funksiyalarıdır və $\Phi\in Y$.

1. Əgər (4) şərti ödənilərsə, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər (5) ödənilərsə və $\frac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ hər hansı $\varepsilon > 0$ üçün sanki azalandırsa, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\Psi^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$ və $\frac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ hər hansı $\varepsilon > 0$ üçün sanki azalan olarsa, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Qeyd olunmuş B_0 kürəsi üçün B_0-a nəzərən kəsr-maksimal funksiya aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$M_{\alpha,B_0}(f)(x) = \sup_{B_0 \supseteq B \ni x} \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_B |f(y)|\,dy, \quad 0 \le \alpha < n,$$

burada supremum $B \subseteq B_0$ olduqda bütün B kürələri üzrə götürülür və $x \in B$.

Teorem 5. Tutaq ki, $0 < \beta < 1$, $0 \le \alpha < n$, $0 < \alpha + \beta < n$ və $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\mathrm{const}\}$ mənfi olmayan funksiyadır. Fərz edək ki, Φ, Ψ Yunq funksiyalarıdır, $\Phi \in Y \cap \nabla_2$ və $\Psi^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$. Onda aşağıdakı təkliflər ekvivalentdir:

1. $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

2. $[b, M_\alpha]$ kommutatoru $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhduddur.

3. Elə $C > 0$ sabiti var ki,

$$\sup_B |B|^{-\beta/n}\, \Psi^{-1}(|B|^{-1})\, \| b(\cdot) - |B|^{-\alpha/n} M_{\alpha,B}(b)(\cdot) \|_{L^\Psi(B)} \le C.$$

Dissertasiyanın birinci fəslinin, 1.4 bəndində Riss potensialının Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

Növbəti teoremlə I_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə və $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər ifadə olunur:

Teorem 6. Tutaq ki, $0<\alpha<n$ və $\Phi,\Psi\in\Upsilon$.

1. Onda

$$r^\alpha\Phi^{-1}(r^{-n})+\int_r^\infty \Phi^{-1}(t^{-n})t^\alpha\frac{dt}{t}\le C\Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{6}$$

şərti $r>0$ olduqda, burada $C>0$ sabiti r-dən asılı deyil, I_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir. Bunda əlavə, $\Phi\in\nabla_2$, olarsa, (6) şərti I_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Onda

$$r^\alpha\Phi^{-1}(r^{-n})\le C\Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{7}$$

şərti $r>0$ olduqda, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə və $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər

$$\int_r^\infty \Phi^{-1}(t^{-n})t^\alpha\frac{dt}{t}\le Cr^\alpha\Phi^{-1}(r^{-n})$$

requlyarlıq şərti $r>0$ olduqda ödənilərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (7) şərti I_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, $\Phi\in\nabla_2$, olduqda (7) şərti I_α operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Dissertasiyanın birinci fəslinin 1.5 bəndində Riss potensialının kommutatorunun Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunur.

Aşağıdakı teoremlə $|b,I_\alpha|$ operatorun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt ifadə olunur.

Teorem 7. Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ və $\Phi,\Psi\in Y$.

1. Əgər $\Phi\in\nabla_2$ və $\Psi\in\Delta_2$ olarsa, onda

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-n})+\int_r^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-n})t^{\alpha}\frac{dt}{t}\le C\Psi^{-1}(r^{-n}) \qquad (8)$$

şərti $r>0$ olduqda, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $[b,I_\alpha]$ operatrunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\Psi\in\Delta_2$ olarsa, onda (2) şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi\in\nabla_2$ və $\Psi\in\Delta_2$. Əgər

$$\int_r^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-n})t^{\alpha}\frac{dt}{t}\le Cr^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-n}) \qquad (9)$$

şərti $r>0$ olduqda ödənilərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (2) şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Teorem 8. Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $b\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)\setminus\{\rm const\}$ və $\Phi,\Psi\in Y$.

1. Əgər $\Phi\in\nabla_2$, $\Psi\in\Delta_2$ olarsa və (8) ödənilərsə, onda $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ şərti $[b,I_\alpha]$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\Psi^{-1}(t)\lesssim\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarsa, onda $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\Phi\in\nabla_2$, $\Psi\in\Delta_2$, $\Psi^{-1}(t)\approx\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarsa və (9) şərti ödənilərsə, onda $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Teorem 6-nın tətbiqi kimi b Lipşis fəzasına daxil olduqda $[b,I_\alpha]$ operatorunun Orliç fəzasında məhdudluğuna baxaq və bu məhdudluğun köməyi ilə Lipşis fəzasının bəzi yeni xarakterizasiyaları verilir.

Teorem 9. Tutaq ki, $0<\beta<1$, $0<\alpha<n$, $0<\alpha+\beta<n$, $b\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)\setminus\{\rm const\}$, $\Phi,\Psi\in Y$.

1. Əgər $\Phi \in \nabla_2$ olarsa və

$$\int_t^{\infty} \Phi^{-1}(r^{-n}) r^{\alpha+\beta} \frac{dr}{r} \le C t^{\alpha+\beta} \Phi^{-1}(t^{-n}), \tag{10}$$

$$t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}} \Phi^{-1}(t) \le C \Psi^{-1}(t) \tag{11}$$

şərtləri istənilən $t>0$ üçün ödənilərsə, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $[b, I_\alpha]$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər

$$\Psi^{-1}(t) \le C \Phi^{-1}(t) t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}} \tag{12}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün ödənilərsə, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $|b, I_\alpha|$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\Psi^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t) t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$, $\Phi \in \nabla_2$ olarsa və (10) şərti ödənilərsə, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $|b, I_\alpha|$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Теорем 10. Пусть $0<\beta<1$, $0<\alpha<n$, $0<\alpha+\beta<n$, $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\mathrm{const}\}$, $\Phi, \Psi \in \Upsilon$.

1. Əgər (10) və (11) şərtləri ödənilərsə, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $[b, I_\alpha]$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər (12) şərti ödənilərsə və $\frac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ hər hansı $\varepsilon>0$ üçün sanki azalandırsa, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $|b, I_\alpha|$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\Psi^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t) t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$ olarsa, (10) şərti ödənilərsə və $\frac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$

hər hansı $\varepsilon > 0$ üçün sanki azalandırsa, onda $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ şərti $|b, I_\alpha|$ operatorunun $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$-dən $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

İkinci fəsil kəsr-maksimal, kəsr-inteqral operatorların və onların kommutatorlarının ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğuna həsr edilmişdir.

Fəslin 2.1 bəndində Orliç-Morri fəzalarında və ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında zəruri faktlar sadalanır.

Tərif 6. Tutaq ki, $\varphi(x,r)$ $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-da müsbət ölçülən funksiyadır və Φ ixtiyari Yunq funksiyasıdır. $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ilə ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasını - yəni elə $f \in L^\Phi_{loc}(\mathbb{R}^n)$ funksiyalar fəzasını işarə edək ki, norma aşağıdakı kimi təyin olunsun:

$$\|f\|_{M^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1})\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} < \infty.$$

Əgər $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ funksiyası üçün elə $C>0$ sabiti varsa ki, $\varphi(r)\le C\varphi(s), r\le s$ ($\varphi(r)\ge C\varphi(s), r\le s$) olsun, onda φ funksiyası sanki artan (sanki azalan) funksiya adlanır.

Φ Yunq funksiyası üçün $\mathcal{G}_\Phi$ ilə elə sanki azalan $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edək ki, $\dfrac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(\upsilon_n^{-1}t^{-n})}, t\in(0,\infty)$ funksiyası sanki artan olsun.

2.2 bəndində kəsr-maksimal operatorun ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında Adams tip güclü (zəif) məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

Teorem 11. Tutaq ki, $\Phi\in\nabla_2$ və $0<\alpha<n$. Tutaq ki, $\varphi\in\Omega_\Phi$

$$\sup_{r<t<\infty}\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\operatorname{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi(x,s)}{\Phi^{-1}(|B(x,s)|^{-1})}\le C\varphi(x,r) \tag{13}$$

və

$$r^\alpha\varphi(x,r)+\sup_{r<t<\infty}t^\alpha\varphi(x,t)\le C\varphi(x,r)^\beta \tag{14}$$

şərtlərini hər hansı $\beta \in (0,1)$ və istənilən $x \in \mathbb{R}^n$ üçün ödəyir və $r > 0$. $\eta(x,r) \equiv \varphi(x,r)^{\beta}$ və $\Psi(r) \equiv \Phi(r^{1/\beta})$ olsun. Onda M_{α} operatoru $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdud olar.

Növbəti теорем bəndin əsas nəticələrindən biridir.

Теорем 12 (Adams tip nəticə). Tutaq ki, $0 < \alpha < n$, Φ Yunq funksiyasıdır, $\varphi \in \Omega_{\Phi}$, $\beta \in (0,1)$, $\eta(t) \equiv \varphi(t)^{\beta}$ və $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$.

1. Əgər $\Phi \in \nabla_2$ olarsa və $\varphi(t)$ (13) şərtini ödəyərsə, onda

$$t^{\alpha}\varphi(t) + \sup_{t<r<\infty} r^{\alpha}\varphi(r) \le C\varphi(t)^{\beta} \tag{15}$$

şərti istənilən $t > 0$ üçün, burada $C > 0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, M_{α} operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_{\Phi}$ olarsa, onda

$$t^{\alpha}\varphi(t) \le C\varphi(t)^{\beta} \tag{16}$$

şərti istənilən $t > 0$ üçün, burada $C > 0$ sabiti t-dən asılı deyil, M_{α} operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \nabla_2$. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_{\Phi}$

$$\sup_{t<r<\infty} r^{\alpha}\varphi(r) \le Ct^{\alpha}\varphi(t) \tag{17}$$

şərtini istənilən $t > 0$ üçün ödəyərsə, burada $C > 0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda (16) şərti M_{α} operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

Əgər teorem 12-də $p < q < \infty$ olduqda $\Phi(t) = t^p$, $p \in [1,\infty)$ və $\beta = \frac{p}{q}$ götürsək, onda ümumiləşmiş Morri fəzalarında aşağıdakı yeni nəticəni alarıq.

Nəticə 1. Tutaq ki, $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$ $\varphi \in \Omega_p \equiv \Omega_{t^p}$.

1. Əgər $\varphi(t)$

$$\sup_{r<t<\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi(s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \le C\varphi(r) \tag{18}$$

şərtini ödəyərsə, onda $t^{\alpha}\varphi(t)+\sup\limits_{t<r<\infty} r^{\alpha}\varphi(r)\le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}}$ şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, M_{α} operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi\in\mathcal{G}_p\equiv\mathcal{G}_{t^p}$ olarsa, onda

$$t^{\alpha}\varphi(t)\le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}} \tag{19}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, M_{α} operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə mədudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\varphi\in\mathcal{G}_{\Phi}$ (17) şərtini ödəyərsə, onda (19) şərti M_{α} operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Əgər teorem 12-də

$$\varphi(t)=\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})},\ 0\le\lambda\le n,\ \Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta}),\ \beta\in(0,1],$$

$$\eta(t)\equiv\varphi(t)^{\beta}=\left(\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})}\right)^{\beta}=\frac{\Psi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Psi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})}$$

götürsək, onda Orliç-Morri fəzasında aşağıdakı yeni nəticə alınar.

Nəticə 2. Tutaq ki, $\Phi\in\nabla_2$, $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$ və $\beta\in(0,1)$. Əgər

$$\sup_{t<r<\infty} r^{\alpha}\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}r^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}r^{-\lambda})}\le Ct^{\alpha}\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün ödənilərsə, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda

$$t^{\alpha}\le C\left[\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})}\right]^{\beta-1}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, M_α operatorunun $\mathrm{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathrm{M}^{\Psi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Tərif 7. Φ Yunq funksiyası və $\lambda\in\mathrm{R}$ üçün $W\mathrm{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ilə zəif Orliç-Morri fəzasını - yəni elə $f\in WL^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ funksiyaları fəzasını işarə edək ki, sonlu kvazinorma aşağıdakı şəkildə verilsin:

$$\|f\|_{W\mathrm{M}^{\Phi,\lambda}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-\frac{\lambda}{n}})\|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL^{\Phi}}.$$

Tərif 8. Tutaq ki, $\varphi(x,r)$ $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ çoxluğunda müsbət ölçülən funksiya, Φ isə ixtiyari Yunq funksiyasıdır. $W\mathrm{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ilə zəif ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasını - yəni norması aşağıdakı kimi təyin olunan $f\in WL^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək:

$$\|f\|_{W\mathrm{M}^{\Phi,\varphi}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1})\|f\|_{WL^{\Phi}(B(x,r))}<\infty.$$

Teorem 13. Tutaq ki, Φ Yunq funksiyasıdır və $0<\alpha<n$. Tutaq ki, $\varphi\in\Omega_\Phi$ (13) və (14) şərtlərini ödəyir. $\eta(x,t)\equiv\varphi(x,t)^{\beta}$ və $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$ $\beta\in(0,1)$ olsun. Onda M_α operatoru $\mathrm{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $W\mathrm{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdud olar.

Teorem 14 (Adams tip nəticənin zəif versiyası). Tutaq ki, $0<\alpha<n$, Φ Yunq funksiyasıdır, $\varphi\in\Omega_\Phi$, $\beta\in(0,1)$ и $\eta(t)\equiv\varphi(t)^{\beta}$ və $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$.

1. Əgər $\varphi(t)$ (13) şərtini ödəyərsə, onda (15) şərti M_α operatorunun $\mathrm{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $W\mathrm{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda (16) şərti M_α operatorunun $\mathrm{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $W\mathrm{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ (17) şərtini ödəyərsə, onda (16) şərti M_α operatorunun $\mathrm{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $W\mathrm{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

İkinci fəslin 2.3 bəndində kəsr-maksimal operatorun kommutatorun ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında uyğun olaraq Spanne tip və Adams tip məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

Növbəti teorem işin əsas nəticələrindən biridir.

Teorem 15 (Spanne tip nəticə)**.** Tutaq ki, $0 \le \alpha < n$, $\varphi_1 \in \Omega_\Phi$, $\varphi_2 \in \Omega_\Psi$ və $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Əgər $\Psi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t) t^{-\alpha/n}$ və $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olarsa, onda

$$\sup_{r<t<\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \Psi^{-1}(t^{-n}) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(s)}{\Phi^{-1}(s^{-n})} \le C\varphi_2(r) \tag{20}$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ və $\Psi \in \Delta_2$ olarsa, onda

$$t^\alpha \varphi_1(t) \le C\varphi_2(t) \tag{21}$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Psi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t) t^{-\alpha/n}$ və $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$

$$\sup_{r<t<\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi_1(t) \le C r^\alpha \varphi_1(r) \tag{22}$$

şərtini istənilən $r>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (21) şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Əgər teorem 15-də $\Phi(t) = t^p$, $\Psi(t) = t^q$, $p, q \in [1, \infty)$ götürsək, onda ümumiləşmiş Morri fəzalarında aşağıdakı yeni nəticə alınar.

Nəticə 3. Tutaq ki, $p, q \in [1, \infty)$, $0 \le \alpha < n$, $\varphi_1 \in \Omega_p \equiv \Omega_{t^p}$, $\varphi_2 \in \Omega_q$ və $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Əgər $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olarsa, onda

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}}\le C\varphi_2(r)$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda (21) şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $1<p<\frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$. Əgər $\varphi_1\in\mathcal{G}_p$ (22) şərtini ödəyərsə, onda (21) şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün səruri və kafi olar.

Teorem 16. Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$, Φ Yunq funksiyasıdır və $\Phi\in\Delta_2\cap\nabla_2$. Tutaq ki, $\varphi\in\Omega_\Phi$ (20) və

$$r^\alpha\varphi(x,r)+\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^\alpha\varphi(x,t)\le C\varphi(x,r)^\beta$$

şərtlərini istənilən $\beta\in(0,1)$, istənilən $x\in\mathbb{R}^n$ və $r>0$ üçün ödəyir. $\eta(x,r)\equiv\varphi(x,r)^\beta$ və $\Psi(r)\equiv\Phi(r^{1/\beta})$ olsun. Onda $M_{b,\alpha}$ operatoru $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdud olar.

İşin əsas nəticələrindən biri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 17 (Adams tip nəticə). Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $\Phi\in\Delta_2$, $\varphi\in\Omega_\Phi$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\beta\in(0,1)$, $\eta(r)\equiv\varphi(r)^\beta$ və $\Psi(r)\equiv\Phi(r^{1/\beta})$.

1. Əgər $\Phi\in\nabla_2$ olarsa və $\varphi(t)$ (20) şərtini ödəyərsə, onda

$$r^\alpha\varphi(r)+\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^\alpha\le C\varphi(r)^\beta$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda

$$r^{\alpha}\varphi(r) \le C\varphi(r)^{\beta} \tag{23}$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \nabla_2$. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha} \le Cr^{\alpha}\varphi(r)$$

şərtini istənilən $r>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (23) şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Əgər teorem 17-də $p<q<\infty$ olduqda $\Phi(t)=t^p$, $p\in[1,\infty)$ və $\beta=\frac{p}{q}$ götürsək, onda ümumiləşmiş Morri fəzalarında aşağıdakı yeni nəticə alınar.

Nəticə 4. Tutaq ki, $0<\alpha<n, 1\le p<q<\infty, \varphi\in\Omega_p$ və $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Əgər $1<p<\infty$ olarsa və $\varphi(t)$

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi(s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \le C\varphi(r) \tag{24}$$

şərtini ödəyərsə, onda

$$r^{\alpha}\varphi(r)+\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha} \le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}}$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda

$$r^{\alpha}\varphi(r) \le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}} \tag{25}$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $1<p<\infty$. Əgər $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha}\le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}}$$

şərtini istənilən $r>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (23) şərti $M_{b,\alpha}$ operatorunun $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

İkinci fəslin 2.4 bəndində $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}$ ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında I_α Riss potensialının uyğun olaraq Spanne tip və Adams tip məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

Teorem 18 (Spanne tip nəticə). Tutaq ki, Φ,Ψ Yunq funksiyalarıdır, $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$ və $0<\alpha<n$.

1. Əgər (Φ,Ψ) funksiyaları $\Phi\in\nabla_2$ və (6) şərtlərini ödəyərsə,onda

$$\int_t^\infty \operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty}\frac{\varphi_1(s)}{\Phi^{-1}(\upsilon_n^{-1}s^{-n})}\Psi^{-1}(\upsilon_n^{-1}r^{-n})\frac{dr}{r}\le C\varphi_2(t) \tag{26}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda

$$t^{\alpha}\varphi_1(t)\le C\varphi_2(t) \tag{27}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, (Φ,Ψ) funksiyaları $\Phi\in\nabla_2$, (6) şərtlərini ödəyir. Əgər $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ funsiyası

$$\int_t^\infty \frac{\Psi^{-1}(\upsilon_n^{-1}r^{-n})}{\Phi^{-1}(\upsilon_n^{-1}r^{-n})}\varphi_1(r)\frac{dr}{r}\le Ct^{\alpha}\varphi_1(t) \tag{28}$$

requlyarlıq şərtini istənilən $t>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda (27) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Əgər teorem 18-də $\Phi(t)=t^p$, $\Psi(t)=t^q$, $p,q\in[1,\infty)$ götürsək, onda ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında aşağıdakı yeni nəticə alınar.

Nəticə 5. Tutaq ki, $0<\alpha<n$ və $p,q\in[1,\infty)$.

1. Əgər $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$ və $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$ olarsa, onda

$$\int_t^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{n}{p}}}{r^{\frac{n}{q}}}\frac{dr}{r}\le C\varphi_2(t) \tag{29}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $M^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1\in G_p\equiv G_{t^p}$ olarsa, onda (27) şərti I_α operatorunun $M^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq li, $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$ və $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$. Əgər $\varphi_1\in G_p$

$$\int_t^\infty r^\alpha\varphi_1(r)\frac{dr}{r}\le Ct^\alpha\varphi_1(t) \tag{30}$$

requlyarlıq şərtini istənilən $t>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda (27) şərti I_α operatorunun $M^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Alınmış əsas nəticələrdən biri aşağıdakıdır.

Teorem 19 (I_α üçün Adams tip nəticə). Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $\Phi\in Y$, $\beta\in(0,1)$, $\eta(t)\equiv\varphi(t)^\beta$ və $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$.

1. Əgər $\Phi\in\nabla_2$ olarsa və $\varphi(t)$ (13) şərtini ödəyərsə, onda

$$t^\alpha\varphi(t)+\int_t^\infty r^\alpha\varphi(r)\frac{dr}{r}\le C\varphi(t)^\beta \tag{31}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α

operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$- ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi \in G_\Phi$ olarsa, onda

$$t^\alpha \varphi(t) \le C\varphi(t)^\beta, \tag{32}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \nabla_2$. Əgər $\varphi \in G_\Phi$

$$\int_t^\infty r^\alpha \varphi(r)\frac{dr}{r} \le Ct^\alpha \varphi(t) \tag{33}$$

requlyarlıq şərtini istənilən $t>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, onda (32) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$- ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Əgər teorem 19-da $p<q<\infty$ olduqda $\Phi(t)=t^p,\ p\in[1,\infty)$ və $\beta=\frac{p}{q}$ götürsək, onda ümumiləşmiş Morri fəzalarında aşağıdıkı yeni nəticə alınar.

Nəticə 6. Tutaq ki, $1<p<q<\infty$.

1. Əgər $\varphi(t)$ (18) şərtini ödəyərsə, onda

$$t^\alpha \varphi(t) + \int_t^\infty r^\alpha \varphi(r)\frac{dr}{r} \le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}} \tag{34}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi \in G_p$ olarsa, onda

$$t^\alpha \varphi(t) \le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}} \tag{35}$$

şərti istənilən $t>0$ üçün, burada $C>0$ t-dən asılı olmayan sabitdir, I_α operatorunun $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\varphi \in G_p$ (33) requlyarlıq şərtini ödəyərsə, onda, (35) şərti

I_α operatorunun $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

İkinci fəslin 2.5 bəndində ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında $[b,I_\alpha]$ kommutatorunun uyğun olaraq Spanne tip və Adams tip məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

Aşağıdakı teoremlə işin əsas nəticələrindən biri ifadə olunmuşdur.

Teorem 20 ($[b,I_\alpha]$ üçün Spanne tip nəticə). Tutaq ki, $0<\alpha<n$ və $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Tutaq ki, Φ Yunq funksiyasıdır və Ψ onun $\Psi^{-1}(t)$ tərsi ilə $\Psi^{-1}(t):=\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}, t\in(0,\infty)$ şəklində təyin olunmuşdur. Əgər $\Phi,\Psi\in\Delta_2\cap\nabla_2$ olarsa, onda

$$\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi_1(s)}{\Phi^{-1}(s^{-n})}\Psi^{-1}(t^{-n})\frac{dt}{t}\le C\varphi_2(r)$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada C>0 r-dən asılı olmayan sabitdir, $|b,I_\alpha|$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Tutaq ki, Φ,Ψ Yunq funksiyalarıdır . Əgər $\Psi\in\Delta_2$ və $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda (27) $|b,I_\alpha|$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, Φ Yunq funksiyasıdır və Ψ özünün tərsi ilə $t\in(0,\infty),\Psi^{-1}(t):=\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ şəklində təyin olunmuşdur və $\Phi,\Psi\in\Delta_2\cap\nabla_2$. Əgər $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$

$$\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^\alpha\varphi_1(t)\frac{dt}{t}\le Cr^\alpha\varphi_1(r) \tag{36}$$

requlyarlıq tip şərti istənilən $r>0$ üçün ödəyərsə, burada C>0 r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (27) şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Teorem 21 ($[b,I_\alpha]$ üçün Adams tip nəticə). Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $\Phi\in\mathcal{Y}$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\beta\in(0,1)$, $\eta(t)\equiv\varphi(t)^\beta$ və $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$.

1. Əgər $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olarsa və $\varphi(t)$

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1}) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi(x,s)}{\Phi^{-1}(|B(x,s)|^{-1})} \le C\varphi(x,r)$$

şərtini ödəyərsə, C sabiti x və r-dən asılı deyil, onda

$$r^{\alpha}\varphi(r)+\int_r^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha}\frac{dt}{t} \le C\varphi(r)^{\beta}$$

şərti istənilən $r>0$ üçün, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, $|b,I_\alpha|$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\Phi \in \Delta_2$ və $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda (32) şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t) \le C\varphi(r) \qquad (37)$$

və

$$\int_r^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha}\frac{dt}{t} \le Cr^{\alpha}\varphi(r) \qquad (38)$$

şərtlərini istənilən $r>0$ üçün ödəyərsə, burada $C>0$ r-dən asılı olmayan sabitdir, onda (32) şərti $|b,I_\alpha|$ operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafidir.

İkinci fəslin 2.6 bəndində zəif ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında Ris potensialının uyğun olaraq Spanne tip zəif məhdudluğu və Adams tip zəif məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunur.

Teorem 22 (Spanne tip nəticənin zəif versiyası). Tutaq ki, $0<\alpha<n$ və Φ,Ψ Yunq funksiyalarıdır, $\Phi,\Psi \in \mathcal{Y}$.

1. Əgər (Φ,Ψ) funksiyaları (6) şərtini ödəyərsə, onda (26) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda (27) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, (Φ,Ψ) funksiyaları (6) şərtini ödəyir. Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ (28) şərtini ödəyərsə, onda (27) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Bizim vacib nəticələrimizdən biri aşağıdakı teoremdir.

Teorem 23 (Adams tip nətisənin zəif versiyası). Tutaq ki, $0<\alpha<n$, $\Phi \in Y$, $\beta \in (0,1)$, $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$, və $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$.

1. Əgər $\varphi(t)$ (13) şərtini ödəyərsə, onda (31) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olarsa, onda (32) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ (33) requlyarlıq şərtini ödəyərsə, onda (32) şərti I_α operatorunun $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt olar.

Üçüncü fəsil maksimal operatorların və inteqral operatorların bəzi çəkili modulyar fəzalarda məhdudluğuna həsr edilmişdir.

Fəslin 3.1 bəndində maksimal operatorun və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

Tərif 9. $1<p<\infty$ olduqda lokal inteqrallanan və aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyən $w:\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ funksiyası A_p çəki adlanır:

$$\sup_{B\in\mathcal{B}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-\frac{p'}{p}}dx\right)^{\frac{p'}{p}}<\infty.$$

Lokal inteqrallanan $w:\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ funksiyası hər hansı $C>0$ sabiti üçün

$$\frac{1}{|B|}\int_B w(y)dy \le Cw(x), \quad x\in B,$$

şərtini ödəyərsə, onda A_1 çəki adlanır.

A_∞ çəkini belə təyin edək: $A_\infty = \bigcup_{p\ge 1} A_p$.

İstənilən $w \in A_\infty$ və Lebeq mənada ölçülən istənilən E çoxluğu üçün $w(E) = \int_E w(x)dx$ qəbul edək.

Tərif 10. Tutaq ki, φ $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-da müsbət ölçülən funksiya, w isə $\mathbb{R}^n$-də mənfi olmayan ölçülən funksiya və Φ ixtiyari Yunq funksiyasıdır. $M_w^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ilə ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzasını - yəni norması aşağıdakı kimi təyin olunan $f \in L_w^{\Phi,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ funksiyalar fəzasını işarə edək:

$$\|f\|_{M_w^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(w(B(x,r))^{-1})\|f\|_{L_w^\Phi(B(x,r))} \equiv$$

$$\equiv \sup_{B\in\mathcal{B}} \varphi(B)^{-1}\Phi^{-1}(w(B)^{-1})\|f\|_{L_w^\Phi(B)} < \infty.$$

Aşağıdakı teorem işin əsas nəticələrindən biridir.

Теоем 24. Tutaq ki, Φ Yunq funksiyası, φ_1, φ_2 isə $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-də müsbət ölçülən funksiyalardır.

1. Əgər $\Phi \in \nabla_2$ və $w \in A_{i_\Phi}$ olarsa,onda

$$\sup_{r<t<\infty}\left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(w(B(x,s))^{-1})}\right)\Phi^{-1}(w(B(x,t))^{-1}) \le C\varphi_2(x,r), \quad (39)$$

burada C x и r-dən asılı olmayan sabitdir, şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^\Phi$ olarsa, onda

$$\varphi_1(x,r) \le C\varphi_2(x,r), \quad (40)$$

burada C x и r-dən asılı olmayan sabitdir, şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \nabla_2$ və $w \in A_{i_\Phi}$. Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^\Phi$ olarsa, onda (40) şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

$WM_w^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ilə zəif ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasını - yəni norması aşağıdakı kimi təyin olunan $f \in WL_w^{\Phi,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək:

$$\| f \|_{WM_w^{\Phi,\varphi}} \equiv \sup_{x\in \mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(w(B(x,r))^{-1}) \| f \|_{WL_w^{\Phi}(B(x,r))} < \infty.$$

Teorem 25. Tutaq ki, Φ Yunq funksiyası, φ_1, φ_2 isə $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-da müsbət ölçülən funksiyalardır.

1. Əgər $w \in A_{i_\Phi}$ olarsa, onda (39) şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\varphi_1 \in \mathsf{G}_w^\Phi$ olarsa, onda (40) şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $w \in A_{i_\Phi}$. Əgər $\varphi_1 \in \mathsf{G}_w^\Phi$ olarsa, onda (40) şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $WM_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

M_b kommutatorunun məhdudluğu üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teoeм 26. Tutaq ki, $b \in BMO(\mathsf{R}^n)$, Φ Yunq funksiyası, φ_1, φ_2 isə $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-da müsbət ölçülən funksiyalardır.

1. Tutaq ki, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ və $w \in A_1$. Onda

$$\sup_{r<t<\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Phi^{-1}(w(B(x,t))^{-1}) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(w(B(x,s))^{-1})} \le C\varphi_2(x,r),$$

burada C x и r-dən asılı olmayan sabitdir, şərti M_b operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün kafidir.

2. Əgər $\Phi \in \Delta_2$, $\varphi_1 \in \mathsf{G}_w^\Phi$ və $w \in A_1$ olarsa, onda (40) şərti M operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruridir.

3. Tutaq ki, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ və $w \in A_1$. Əgər $\varphi_1 \in \mathsf{G}_w^\Phi$ olarsa, onda

$$\sup_{r<t<\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi_1(x,t) \le C\varphi_1(x,r),$$

burada C x и r-dən asılı olmayan sabitdir, şərti M_b operatorunun $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdudluğu üçün zəruri və kafi olar.

Üçüncü fəslin 3.2 bəndində maksimal operatorun vektorqiymətli ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu şərtləri tapılmışdır.

Tərif 11. Tutaq ki, φ $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-da müsbət ölçülən funksiya, w isə $\mathbb{R}^n$-də mənfi olmayan ölçülən funksiyadır, Φ Yunq funksiyasıdır və $1 \le q \le \infty$. $M_w^{\Phi,\varphi}(l_q) = M_w^{\Phi,\varphi}(l_q, \mathbb{R}^n)$ ümumiləşmiş vektorqiymətli çəkili Orliç-Morri fəzası $\mathbb{R}^n$-də Lebeq mənada ölçülən və norması aşağıdakı kimi təyin olunan $F = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ funksiyalar ardıcıllığından ibarət çoxluqdur:

$$\| F \|_{M_w^{\Phi,\varphi}(l_q)} = \| \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \|_{M_w^{\Phi,\varphi}(l_q)} := \left\| \| \{f_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \|_{l_q} \right\|_{M_w^{\Phi,\varphi}} < \infty.$$

Bəndin əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 27. Tutaq ki, $1 < q < \infty$, Φ Yunq funksiyasıdır, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, $w \in A_1$ və $(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$ aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\int_r^{\infty} \left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(w(B(x,s))^{-1})} \right) \Phi^{-1}(w(B(x,t))^{-1}) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r),$$

burada C x və r-dən asılı deyil. Onda M maksimal operatoru $M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_q)$-dən $M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_q)$-ə məhdud olar, yəni elə $C > 0$ sabiti var ki,

$$\| MF \|_{M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_q)} \le C \| F \|_{M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_q)}$$

bərabərsizliyi istənilən $F = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_q)$ üçün doğrudur.

Qeyd edək ki, $q = \infty$ üçün aşağıdakı daha ümumi nəticə alınır.

Teorem 28. Tutaq ki, $w \in A_{i_\Phi}$, $\Phi \in \nabla_2$ və $(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$ (39) şərtini ödəyir. Onda M maksimal operatoru $M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_\infty)$-dan $M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_\infty)$-a məhdud olar, yəni elə $C>0$ sabiti var ki,

$$\| MF \|_{M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_\infty)} \le C \| F \|_{M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_\infty)}$$

bərabərsizliyi istənilən $F = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_\infty)$ üçün ödənilir.

Üçüncü fəslin 3.3 bəndində çəki funksiyaları üzərinə elə inteqral tip şərtlər tapılır ki, Riss operatorunun bir modulyar p-qabarıq çəkili BFF-dən digərinə məhdudluğu təmin olunur və potensial üçün ikiçəkili bərabərsizlik isbat olunur. Xüsusi halda, çəki funksiyaları üzərinə elə kafi şərtlər tapılır ki, Riss potensialının Musilak-Orliç fəzasında məhdudluğu təmin olunur.

Tutaq ki, (Ω,μ) dolu σ-sonlu ölçülü fəzadır. $L_0 = L_0(\Omega,\mu)$ ilə Ω çoxluğunda ölçülən həqiqiqiymətli μ-ölçülən funksiyalar küllisini işarə edək.

Tərif 12. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, onda deyirlər ki, həqiqi normalı X fəzası BFF fəzası adlanır:

P1) norма $\|f\|_X$ istənilən μ-ölçülən f funksiyası üçün təyin edilir, $f \in X$ yalnız və yalnız $\|f\|_X < \infty$ olduqda, $\|f\|_X = 0$ isə yalnız və yalnız sanki hər yerdə $f = 0$ olduqda doğrudur,

P2) $\|f\|_X = \||f|\|_X$, istənilən $f \in X$ üçün,

P3) əgər sanki hər yerdə $0 \le f_n \uparrow f \le g$ olarsa, onda $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ (Fatu xassəsi),

P4) əgər E çoxluğu Ω çoxluğunun elə altçoxluğu olarsa ki, $\mu(E) < \infty$ olsun, onda $\|\chi_E\| < \infty$, burada χ_E E çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır,

P5) istənilən ölçülən $E \subset \Omega$ çoxluğu üçün $\mu(E) < \infty$ olduqda elə $C_E > 0$ sabiti var ki,aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir,

$$\int_E f(x)dx \le C_E \|f\|_X \cdot$$

$Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ olsun. $k \in Z$ üçün təyin edək:

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^k < |x| \le 2^{k+1}\},\ E_{k,2} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2}\},$$
$$E_{k,1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^{k-1}\}, \qquad E_{k,3} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2^{k+2}\}.$$

Bəndin əsas nəticəsi aşağıdakıdır.

Teorem 29. Tutaq ki, $v(x)$ və $w(x)$ $\mathbb{R}^n$-də çəki funksiyalarıdır. X və Y $\mathbb{R}^n$-də Lebeq ölçülü və uyğun olaraq $\|\cdot\|_{X(\mathbb{R}^n)}$ və $\|\cdot\|_{Y(\mathbb{R}^n)}$ normalı Banax funksiyalar fəzaları olsun . Fərz edək ki, $X_v(\mathbb{R}^n)$ və $Y_w(\mathbb{R}^n)$ uyğun çəkili fəzalardır və elə $p > 1$ var ki, $Y_w(\mathbb{R}^n)$ modulyar p-qabarıq çəkili BF fəzasıdır. Tutaq ki, $I_s \in [L_p(\mathbb{R}^n); Y(\mathbb{R}^n)]$, $X_v(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{p,v}(\mathbb{R}^n)$ və aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $A=\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_{|y|<t} v(y)^{-p'}dy\right)^{\alpha/p'}\left\|\frac{\chi_{\{|x|>t\}}}{|x|^{n-s}}\left(\int\limits_{|y|<|x|} v(y)^{-p'}dy\right)^{(1-\alpha')/p'}\right\|_{Y_w}<\infty$,

2) $B=\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_{|y|>t} (v(y)|y|^{n-s})^{-p'}dy\right)^{\beta/p'}\left\|\chi_{\{|x|<t\}}\left(\int\limits_{|y|>x} (v(y)|y|^{n-s})^{-p'}dy\right)^{(1-\beta)/p'}\right\|_{Y_w}<\infty,$

burada $0<\alpha,\beta<1$;

3) $\exists C>0$,ki,

$$ess\sup_{y\in E_k} w(y)\le C\, ess\inf_{y\in E_{k,2}} v(y)\,,\quad \forall k\in Z\,,$$

4) $\exists C>0$,ki,

$$\|\sum_k |g_k|\chi_{E_k}\|^p_{Y_w(\mathbb{R}^n)}\le C\sum_k \||g_k|\chi_{E_k}\|^p_{Y_w(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Onda $I_s\in[X_v(\mathbb{R}^n)\,;Y_w(\mathbb{R}^n)]$.

Dördüncü fəsildə Morri tip funksional fəzalarda inteqral operatorlar öyrənilir. Dördüncü fəslin birinci bəndində $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha,m}$ multisubxətti kəsr-maksimal operatorun modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər ifadə olunur.

Tərif 13. Tutaq ki, $1\le p<\infty, 0\le\lambda\le n$. $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ilə Morri fəzasını, $WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ilə zəif Morri fəzasını- yəni elə lokal inteqrallanan $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək ki, uyğun olaraq sonlu norma aşağıdakı kimi təyin olunsun:

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,t>0} r^{-\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{L^p(B(x,r))},\ \|f\|_{WL^{p,\lambda}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,t>0} r^{-\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{WL^p(B(x,r))}\,.$$

Tərif 14. Tutaq ki, $1\le p<\infty,\ 0\le\lambda\le n,\ [r]=\min\{1,r\}$. $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ilə modifə olunmuş Morri fəzasını, $W\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ilə zəif modifə olunmuş Morri fəzasını - yəni elə lokal inteqrallanan sonlu normalı $f(x), x\in\mathbb{R}^n$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək ki, norma uyğun olaraq aşağıdakı kimi təyin olunsun:

$$\| f \|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x\in \mathbb{R}^n, r>0} [r]^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{\tilde{L}^p(B(x,r))}, \quad \| f \|_{W\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x\in \mathbb{R}^n, r>0} [r]^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{W\tilde{L}^p(B(x,r))}.$$

Tutaq ki, $1 < s \le \infty$, $\Omega \in L^s(\mathsf{S}^{mn-1})$ $\mathbb{R}^{mn}$-də sıfır tərtibdən bircins funksiyadır. Kobud Ω nüvəli $\mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m}$ multisubxətti kəsr-maksimal operator aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m}(\vec{f})(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{nm-\alpha}} \int_{B(\vec{0},r)} |\Omega(\vec{y})| \prod_{j=1}^{m} | f_j(x-y_j) | \, d\vec{y}, \;\; 0 \le \alpha < nm.$$

Bəndin əsas nəticələrindən biri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 30. Tutaq ki, $0 < \alpha < mn$, $1 \le s' < \dfrac{mn}{\alpha}$ и $\Omega \in L^s(\mathsf{S}^{mn-1})$.

Fərz edək ki, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{p_j} = \frac{\lambda}{p}, \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{q_j} = \frac{\lambda}{q}$.

(i) Əgər $p > s'$, $\dfrac{\alpha}{mn} \le \dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{q_j} \le \dfrac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}$ və $0 \le \lambda_j < n - \dfrac{\alpha p_j}{m}$ olarsa, onda $\dfrac{\alpha}{n} \le \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \le \dfrac{\alpha}{n-\lambda}$ şərti $\mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m}$ operatorunun $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ modifə olunmuş Morri fəzaları hasilindən $\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modifə olunmuş Morri fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, elə C sabiti var ki, istənilən $f \in \tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\| \mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m} f \|_{\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}}.$$

(ii) Əgər $p = s'$, $\dfrac{\alpha}{mn} \le \dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{p_j q_j} \le \dfrac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}$ və $0 \le \lambda_j < n - \dfrac{\alpha p_j}{m}$ olarsa, onda $\dfrac{\alpha}{n} \le \dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{q} \le \dfrac{\alpha}{n-\lambda}$ şərti $\mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m}$ operatorunun $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ modifə olunmuş Morri fəzaları hasilindən $W\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zəif modifə olunmuş Morri fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bunda əlavə, elə C sabiti var ki, istənilən $f \in \tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\| \mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m} f \|_{W\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}}.$$

(iii) Əgər $s' \le \dfrac{mn-\lambda}{\alpha} \le p \le \dfrac{mn}{\alpha}$ olarsa, onda $\mathsf{M}_{\Omega,\alpha,m}$ operatoru $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$-dən $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdud olar.

Dördüncü fəslin 4.2 bəndində $I_{\Omega,\alpha,m}$ multixətti kəsr-inteqral operatorun Morri fəzaları hasilində və modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər ifadə olunmuşdur. Ω kobud nüvəli multixətti inteqral operator aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I_{\Omega,\alpha,m}(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{nm-\alpha}} \prod_{j=1}^{m} f_j(x-y_j)\, d\vec{y}.$$

Teorem 31. Tutaq ki, $0 < \alpha < mn$, $1 < s \le \infty$ və $\Omega \in L^s(\mathsf{S}^{mn-1})$. Həmçinin $\sum_{j=1}^{m} \dfrac{\lambda_j}{p_j} = \dfrac{\lambda}{p}$, $\dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{q_j} = \dfrac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}$ və $0 \le \lambda_j < n - \dfrac{\alpha p_j}{m}$, $j = 1,\dots,m.$

(i) Əgər $p > s'$ və $\sum_{j=1}^{m} \dfrac{\lambda_j}{q_j} = \dfrac{\lambda}{q}$ olarsa, onda $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n-\lambda}$ şərti $I_{\Omega,\alpha,m}$ operatorunun $L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ Morri fəzaları hasilindən $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morri fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, elə müsbət C sabiti var ki, istənilən $f \in L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{L^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{L^{p_j,\lambda_j}}.$$

(ii) Əgər $p = s'$ və $\lambda \sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{p_j q_i} = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\lambda_j}{p_j q_j}$ olarsa, onda $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n-\lambda}$ şərti $I_{\Omega,\alpha,m}$ operatorunun $L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ Morri fəzaları hasilindən $WL^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zəif Morri fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, elə müsbət C sabiti var ki, istənilən $f \in L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{WL^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{L^{p_j,\lambda_j}} .$$

Bəndin əsas nəticələrindən biri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 32. Tutaq ki, $0 < \alpha < mn$, $1 < s \le \infty$ və $\Omega \in L^s(\mathbb{S}^{mn-1})$. Həmçinin

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{p_j} = \frac{\lambda}{p}, \; \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} = \frac{\alpha}{m(n-\lambda_j)} \text{ və } 0 \le \lambda_j < n - \frac{\alpha p_j}{m}, \; j = 1, \dots, m .$$

(i) Əgər $p > s'$ və $\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{q_j} = \frac{\lambda}{q}$ olarsa, onda $\frac{\alpha}{n} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\alpha}{n-\lambda}$ şərti $I_{\Omega,\alpha,m}$ operatorunun $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ modifə olunmuş Morri fəzaları hasilindən $\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modifə olunmuş Morri fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, elə müsbət C sabiti var ki, istənilən $f \in \tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}} .$$

(ii) Əgər $p = s'$ və $\lambda \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j q_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{p_j q_j}$ olarsa, onda $\frac{\alpha}{n} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\alpha}{n-\lambda}$ şərti $I_{\Omega,\alpha,m}$ operatorunun $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ modifə olunmuş Morri fəzaları hasilindən $W\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zəif modifə olunmuş Morri fəzasına məhdudluğu üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə, elə müsbət C sabiti var ki, istənilən $f \in \tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{W\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}} .$$

4.3 bəndində $(\varphi_1, \varphi_2, \Phi)$ üzərinə elə kafi şərtlər tapılır ki, μ_Ω^ρ parametrik Marsinkeviç operatorunun bir ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasından digərinə məhdudluğu təmin olunur. Bu nəticənin tətbiqi kimi Şredinger operatoru ilə əlaqəli Marsinkeviç operatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzasında məhdudluğu isbat olunmuşdur.

Yüksək tərtibdən parametrik Marsinkeviç inteqral operatoru aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\mu_{\Omega}^{\rho}(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} \left| \frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-p}} f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

burada $0<\rho<n$.

Yunq funksiyası üçün aşağıdakı ədədi xarakteristikalardan istifadə edəcəyik:

$$a_{\Phi} := \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}, \quad b_{\Phi} := \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}.$$

Teorем 33. Tutaq ki, $0<\rho<n$, Φ ixtiyari Yunq funksiyasıdır, φ_1, φ_2 və Φ aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\int_r^{\infty} \left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(|B(x_0,s)|^{-1})} \right) \Phi^{-1}(|B(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r), \quad (41)$$

burada C x və r-dən asılı olmayan sabitdir. Həmçinin tutaq ki, $\Omega \in L^{\infty}(S^{n-1})$. Əgər Φ funksiyası $1<a_{\Phi}\le b_{\Phi}<\infty$ şərtini ödəyərsə, onda μ_{Ω}^{ρ} operatoru $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$-dən $M^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$-ə məhdud olar.

Klassik Marsinkeviç funksiyasına analoji olaraq L Şredinger operatoru ilə əlaqəli μ_j Marsinkeviç funksiyasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\mu_j^L f(x) = \left(\int_0^{\infty} \left| \int_{|x-y|\le t} K_j^L(x,y) f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

burada $K_j^L(x,y) = \tilde{K}_j^L(x,y)|x-y|$ və $\tilde{K}_j^L(x,y)$ $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j} L^{-\frac{1}{2}}$, $j=1,\dots,n.$ üçün nüvədir.

Teorем 34. Tutaq ki, $V\in B_n$, Φ Yunq funksiyasıdır, (φ_1,φ_2) isə (41) şərtini ödəyir. Əgər $1<a_{\Phi}\le b_{\Phi}<\infty$ olarsa, onda μ_j^L operatoru M^{Φ,φ_1}-dən M^{Φ,φ_2}-ə məhdud olar.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi maksimal və inteqral operatorların bəzi funksional fəzalarda məhdudluğu meyarlarının alınmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. Kəsr- maksimal operator və onun kommutatorunun Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

2. Riss potensialının və onun kommutatorunun Orliç fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

3. Kəsr-maksimal operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat edilmişdir.

4. Riss potensialı və onun kommutatorunun ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

5. Riss potensialının zəif məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt isbat olunmuşdur.

6. Maksimal operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat edilmişdir.

7. Maksimal operatorun ümumiləşmiş vektor-qiymətli çəkili Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu öyrənilmişdir.

8.Riss potensialı üçün p-qabarıq çəkili modulyar Banax funksiyalar fəzalarında ikiçəkili bərabərsizliklər isbat olunmuşdur.

9. Multisubxətti kəsr-maksimal operatorun modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

10. Multixətti kəsr-inteqral operatorun Morri fəzaları hasilində və modifə olunmuş Morri fəzaları hasilində məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər isbat edilmişdir.

11. Parametrik Marsinkeviç inteqral operatorun ümumiləşmiş Orliç-Morri fəzalarında məhdudluğu öyrənilmişdir.

Qeyd edək ki, dissertasiya işundə alınan nəticələr nəzəri xarakter daşıyır.

Sonda müəllif işə daimi diqqətinə, dəyərli məsləhətlərinə və faydalı müzakirələrə görə elmi məsləhətçisi AMEA-nın müxbir üzvü, professor V.S. Quliyevə öz dərin təşəkkürünü bildirir.

Dissertasiyanın əsas məzmunu aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Hasanov, S.G. Multi-sublinear rough maximal operator on product Morrey and product modified Morrey spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2014, 4(2), -p. 57-65.

2. Hasanov, S.G. Multi-sublinear rough fractional maximal operator on product Morrey spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2015, 4(2), -p. 66-76.

3. Hasanov, S.G. Multisublinear rough fractional maximal operator on product modified Morrey spaces // 7rd International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications", MADEA-7, -Baku, -08-13 Sept., -2015, -p. 66-67.

4. Hasanov, S.G. Multi-sublinear rough fractional maximal operator on product modified Morrey spaces // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics , -2015, 41(1), -p. 77-87.

5. Hasanov, S.G. Marcinkiewicz integral and its commutators on local Morrey type spaces // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2015, 35(4), -p. 84-94.

6. Hasanov, S.G. Marcinkiewicz integral and its commutators on local Morrey type spaces // 7rd International Workshop "Nonharmonic Analysis And Differential Operators", -Baku, -25-27 May, -2016, -p. 44.

7. Hasanov, S.G. Multilinear rough fractional integral operators on product Morrey spaces // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, -2016, 4(1), -p. 112-119.

8. Hasanov, S.G. Multilinear rough fractional integral on product modified Morrey spaces // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2016, 36(4), -p.99-107.

9. Deringoz F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces // Journal of Inequalities and Applications, -2016, 248(1), -22 p.

10. Deringoz, F., Hasanov, S.G. Parametric Marcinkiewicz integral operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2016, 36(4), -p.70-76.

11. Hasanov, S.G. Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces // International Conference devoted to the 80-th anniversary of acad. Akif Gadjiev, -Baku, -06-08 Dec., -2017, -p. 91.

12. Deringoz, F, Hasanov, S.G. Parametric Marcinkiewicz integral operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // International Conference “Operators in Morrey type spaces and Appl.”, OMTSA-2017, -Kirsehir: -2017, -10-13 July, -p. 158.

13. Bandaliyev, R.A., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Two-weighted inequalities for the Riesz potential in p-convex weighted modular Banach function spaces // Ukrainian Mathematical Journal, -2017, 69(11), -p. 1443-1454.

14. Bandaliyev, R.A., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Correction to “Two-weighted inequalities for the Riesz potential in p-convex weighted modular Banach function spaces” // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2021, 41(4), -p. 54-56.

15. Deringoz, F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. A characterization for Adams type boundedness of the fractional maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // Integral Transforms and Special Functions, -2017, 28(4), -p. 284-299.

16. Guliyev, V.S., Deringoz, F., Hasanov, S.G. Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces // Journal of Inequalities and Applications, -2017, 75(1), -18 p.

17. Deringoz, F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Maximal operator and its commutators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces // Tokyo Journal of Mathematics, -2018, 41(2), -p. 347-369.

18. Deringoz, F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Commutators of fractional maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // Positivity, -2018, 22(1), -p. 141-158.

19. Guliyev, V.S., Deringos, F., Hasanov, S.G. Commutators of fractional maximal operator on Orlicz spaces // Mathematical Notes, -2018, 104 (3,4), -p. 498-507.

20. Guliyev, V.S., Deringoz, F., Hasanov, S.G. Fractional maximal function and its commutators on Orlicz spaces // Analysis and Mathematical Physics Journal, -2019, 9(1), -p. 165-179.

21. Hasanov, S.G. New characterizations of BMO spaces via commutators on Orlicz spaces // 3rd International Conference entitled Operators in General Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA 2019), -Kirsehir: -16-20 July, -2019, -p.88.

22. Hasanov, S.G. Characterizations of maximal operators in generalized weighted Orlicz-Morrey spaces // International Conference on "Modern Problems of Mathematics and Mechanics"(MPMM-2019), -Baku: -23-25 October, -2019, -p. 234-235.

Dissertasiyanın müdafiəsi **04 mart 2022-ci il** tarixində saat **14^{00}** Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B. Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya ilə AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **28 yanvar 2022-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 14.01.2022
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 74432
Tiraj: 50