AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ƏKS ƏLAQƏLİ İDARƏETMƏ SİSTEMLƏRİNDƏ İDARƏ VƏ NƏZARƏT NÖQTƏLƏRİNİN YERLƏRİNİN OPTİMALLAŞDIRMA MƏSƏLƏLƏRİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

İxtisas: 1203.01 – Kompüter elmləri

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Vüqar Adəm oğlu Həşimov**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2021

Dissertasiya işi Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor
Kamil Rəcəb oğlu Ayda-zadə

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Fikrət Güləli oğlu Feyziyev

riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Rəşad Sirac oğlu Məmmədov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: f.-r.e.d., professor

________________ **Qalina Yuriyevna Mehdiyeva**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.-r.e.n., dosent

________________ **Elxan Nəriman oğlu Səbziyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü,f.-r.e.d., professor

________________ **Vaqif Rza oğlu İbrahimov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Məlum olduğu kimi, paylanmış parametrli obyektlərin əks əlaqə ilə optimal idarəetmə məsələləri toplanmış parametrli obyektlərin idarəetməsindən fərqli olaraq kifayət qədər az tədqiq edilmişdir. Buna səbəb birincisi, baxılan obyektin (prosesin) bütün nöqtələrində onun cari vəziyyəti haqqında informasiyanın alınmasını tələb edən sistemlərin texniki tətbiqinin çətinliyi ilə əlaqədardır. İkincisi isə, idarə olunan obyektlərin riyazi modellərinin həm struktur, həm də parametrik identifikasiya məsələlərinin həlli, müvafiq riyazi məsələləri həll etmək üçün effektiv ədədi üsullar və alqoritmlərin yaradılması ilə bağlı problemlərin mövcudluğudur.

XIX əsrin sonlarında – XX əsrin əvvəllərində aparılmış tədqiqatlar nəticəsində sənaye proseslərinin və texniki obyektlərin tənzimlənməsi üçün yüksək dəqiqlikli ölçü cihazları hazırlanmışdır. Bu istiqamətdə dünya üzrə məşhur olan alimlər J.K. Maksvell, E.J. Raus, İ.A. Vışneqradski, A. Qurviç, A.M. Lyapunov və digər alim və mühəndislər elmə əhəmiyyətli töhfələrini vermişdirlər. Raketlərin hazırlanması sahəsində qarşıya çıxmış problemlərlə əlaqədar olaraq hesablama və ölçmə vasitələrinin inkişaf etdirilməsi ilə L.S. Pontryagin, R.E. Bellman, A.M. Letov və digər alimlər tərəfindən adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan toplanmış parametrli obyektlərin əks əlaqəli idarəetmə sistemləri istiqamətində apardıqları tədqiqatların nəticələri müxtəlif texniki və sənaye obyektlərinin avtomatik idarəetmə sistemlərinin hazırlanmasında öz geniş tətbiqini tapmışdır.

Bununla belə, son illərdə toplanmış parametrli sistemlər üçün məlum yanaşma və üsulların xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan paylanmış parametrli obyektlərin əks əlaqə ilə idarə edilməsində tətbiq olunması üçün aktiv tədqiqatlar aparılmışdır. Tədqiqatlardan alınmış nəticələr həm idarəetmə sistemlərinin lahiyələndirilməsində, həm də texniki obyektlərin və mürəkkəb sənaye proseslərin tənzimlənməsi məsələlərində istifadə edilməkdədir. Əldə olunmuş müəyyən nəaliyyətlərə baxmayaraq, paylanmış parametrli obyektlərin idarəetməsinin sintezi məsələləri hələki kifayət qədər tədqiq olunmamışdır. Bu həm nəzəri xarakterli problemlərlə (idarəolunanlıq, müşahidəolunanlıq məsələlərinin tədqiq edilməsi, uyğun proseslərin optimal idarə edilməsi üçün effektiv ədədi həll üsullarının hazırlanması), həm də tədqiq olunan obyektlərdə əks əlaqəli idarəetmə sisteminin texniki tətbiq problemləri (məkan fəzasının böyüklüyü, obyektin bütün nöqtələrinin cari vəziyyəti haqqında kifayət qədər operativ və dəqiq məlumatın alınmasının mümkünsüzlüyü, bundan əlavə obyektin bütün və ya müəyyən nöqtələrində idarəetmə tədbirlərinin vaxtında həyata keçirilməsinin mümkünsüzlüyü və digər səbəblər) ilə əlaqədardır. Buna görə də hazırki dövrdə sözügedən istiqamətdə tədqiqat işlərinin aparılması aktualdır. Hal-hazırda bir çox paylanmış parametrli obyektlər üçün müxtəlif məlum prinsiplərdən, hesablama üsullarından və telemexaniki texniki müşahidə vasitələrindən istifadə etməklə avtomatik idarəetmə və tənzimləmə sistemləri hazırlanır və ya artıq fəalliyyət göstərirlər.

İnformasiya və kompüter texnologiyalarının inkişafı və yüksək dəqiqlikli nəzarət-ölçü cihazlarının yaradılması ilə əlaqədar olaraq, başlanğıc-sərhəd şərtləri ilə verilmiş müxtəlif növ funksional tənliklər ilə təsvir olunan paylanmış parametrli mürəkkəb obyektlərin avtomatik idarəetmə və tənzimləmə sistemlərinin yaradılmasına maraq artmışdır.

Məlumdur ki, optimal idarəetmə nəzəriyyəsində proqram idarəetməsi dinamik sistemlər üçün zamandan asılı funksiya şəklində axtarılır. Bu tip idarəetmə məsələsi kosmik uçuşlara nəzarət və ya raketin istiqamətinin idarə edilməsi kimi kifayət qədər nisbətən dar çərçivədə olan praktiki məsələlərin həllini təsvir edir və həllində istifadə olunur. Lakin müəyyən məsələlər üçün optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin daha mükəmməl tətbiqinə mane olan bir çox amillər və təsirlər mövcuddur. Misal üçün, bir çox məsələlərdə başlanğıc təsirlərin qeyri-dəqiq verilməsi, modelin parametrlərinin dəqiq müəyyənləşdirilməsinin çox mürəkkəbliyi, yaxud da, bəzən mümkünsüzlüyü ilə əlaqədar qaçılmaz bir çox qeyri-müəyyənliklər mövcuddur. Aydındır ki, əvvəlcədən bir idarəetmə strategiyasının qurulması ehtiyacının yaranması olduqca arzuolunmazdır. Bu səbəbdən mühəndislər üçün idarəetmənin sistemin hazırkı anda vəziyyətinin qiymətindən asılı funksiya olaraq əks əlaqə ilə seçilməsi (sintez məsələsi) daha təbiidir.

Bir çox optimal idarəetmənin sintezi məsələlərində prosesin faza vəziyyəti zaman və yaxud məkan dəyişənlərinə görə həm “nöqtəvi”, həm də “inteqral” şəkildə yüklənmiş diferensial tənliklər ilə, sərhəd şərtləri qeyri-lokal ayrılmamış aralıq şərtləri ilə verilmiş başlanğıc-sərhəd məsələlərinə gətirilmiş olur. Xüsusi törəməli yüklənmiş diferensial tənliklərlə qeyri-lokal məsələlərə gətirilən çoxlu sayda texnoloji proseslərin təsviri son illərdə bu sahədə çalışan bir çox tədqiqatçı alimlərin diqqətini cəlb etmişdir. Belə proseslərə misal olaraq, əks əlaqəli idarətmənin sintezi ilə nöqtəvi istilik təsirləri ilə üzərində nəzarət ölçmə cihazları yerləşdirilmiş lövhənin qızdırılması, müəyyən xarici zərbələrin təsirindən rəqs halına keçən membranın nöqtəvi sakitləşlərici təsirlərlə rəqslərinin söndürülməsi kimi məsələləri göstəmək olar.

Toplanmış parametrli sistemlərin optimal idarəetmə məsələlərinə həm nəzəri, həm də ədədi aspektdən çoxlu işlər həsr olunmuşdur. Onlardan F.M. Kirillovanın, L.S. Pontryaginin, R.E. Bellmanın, V.Q. Boltyanskinin, N.N. Krasovskinin, F.P. Vasilyevin, R.F. Qabasovun, R.P. Fedorenkonun, respublikamızda isə M.C. Mərdanovun, K.B. Mənsimovun, T.Q. Məlikovun, İ.G. Məmmədovun, Y.Ə. Şərifovun, Ş.F. Məhərrəmovun və s. işlərində baxılan optimal idarəetmə məsələləri üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışlar. Zəruri şərtlərin alınması və onlardan istifadə etməklə ədədi həll üsullarının işlənməsinə isə Y.Q. Yevtuşenkonun, N.N. Moiseevin, A.A. Abramovun, O.O. Vasilyevanın, ölkəmizdə isə F.A. Əliyevin, M.M. Mütəllimovun, K.R. Ayda-zadənin, V.M. Abdullayevin, A.B. Rəhimovun və digər alimlərin işlərini qeyd etmək olar.

Praktiki məsələrin əksəriyyətində bir çox proseslər paylanmış paramterli sistemlərlə təsvir olunur. Bu sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələlərini çoxlu alimlər tədqiq etmişlər. Bunlardan optimal idarəetmənin keyfiyyət nəzəriyyəsinə aid J.L. Lions, V.Q. Boltyanski, F.P. Vasilyev, A.İ. Eqorov, A.D. İsgəndərov, K.Q. Həsənov, H.F. Quliyev, K.B. Mənsimov, F.G. Feyziyev, M.H. Yaqubov, M.A. Sadıqov, R.Q. Tağıyev, S.S. Haxıyev, Ş.Ş. Yusubov, E.N. Mahmudov işlərini, ədədi həll üsullarının işlənməsinə isə F.A. Əliyevin, K.R. Ayda-zadənin, V.M. Abdullayevin, Y.R. Əşrəfovanın, A.B. Rəhimovun, S.Z. Quliyevin, C.Ə. Əsədovanın, S.Q. Talıbovun və digər alimlərin işlərini xüsusi qeyd etmək olar.

Əks əlaqəli optimal idarəetmə sistemlərinin geniş təqbiq edilməsi ilə onun tədqiqatına bir çox alimlər nəzər yetirmişdirlər ki, bunlardan da V.İ. Utkinin, T.K. Sirazetdinovun, A.İ. Yeqorovun, A.Q. Butkovskinin, B.T. Polyakın və digər alimlərin apardıqları tədqiqatları göstərmək olar. Bu istiqamət azərbaycanlı alimlərimizin də diqqətində olmuş və bir çox tədqiqatlar aparılmışdır. Bunlardan K.R. Aydazadənin, V.M. Abdullayevin, S.Z. Quliyevin, Q.Ə. Rüstəmovun və bir çox digər alimlər işlərini göstərmək olar.

Kompüter texnologiyalarının çox sürətlə inkişaf etməsinə baxmayaq, hesablama riyaziyyatında çox sayda məsələlər vardır ki, onların həllində daha dəqiq və sürətli ədədi həll üsullarının işlənib hazırlanması aktual olaraq qalır. Misal üçün, qeyri-lokal şərtlərlə verilmiş adi diferensial tənliklər sistemi hesablama riyaziyyatı məsələlərinin ən vacib siniflərindən biri hesab olunur. Bu məsələlərdə diferensial tənliklərin ədədi həll üsullarında törəmələrin daha yüksək dəqiqlikli tərtibdən aproksimasiya edilərək ədədi həll sxemlərinin işlənməsi praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Belə ədədi həll sxemlərin hazırlanmasında Q.Yu. Mehdiyevanın, V.R. İbrahimovun, K.R. Aydazadənin, V.M. Abdullayevin və digər alimlərin işlərini xüsusi ilə qeyd edə bilərik.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Dissertasiya işinin tədqiqat obyekti əsasən paylanmış parametrli sistemlərin toplanmış (nöqtəvi) mənbələrlə əks əlaqəli idarəetmə məsələləridir. Tədqiqatın predmeti isə toplanmış idarəetmə mənbələrinin və əks əlaqənin aparıldığı nəzarət nöqtələrinin, həmçinin xətti əks əlaqə parametrlərinin sintezi üçün birinci tərtib effektiv ədədi optimalallaşdırma üsullarıdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. İşdə əsas məqsəd aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Paylanmış parametrli sistemlərdə əks əlaqəli idarəetmə parametrlərinin sintezi məsələlərinin ədədi həll üsullarının işlənməsi.
2. Elastik membranın rəqslərinin söndürülməsi, bircins çubuğun və ya nazik lövhənin qızdırılması məsələlərində nəzarət nöqtələrinin yerlərinin optimal koordinatları və xətti əks əlaqə paramterlərinə

görə məqsəd funksionalının qradiyentinin alınması.
3. Membranın rəqslərinin söndürülməsi məsələsində toplanmış rəqs sakitləşdiricilərinin təsir nöqtələrinin optimal koordinatları və ya təsir zaman anlarına görə məqsəd funksionalının qradiyent düsturlarının alınması.
4. Lövhənin qızdırılması məsələsində nöqtəvi istilik mənbələrinin təsir yerlərinin optimal koordinatlarına görə məqsəd funksionalının qradiyentinin alınması.
5. Çubuğun, lövhənin qızdırılması və ya membranın rəqs prosesinə təsir edən başlanğıc təsirlər dəqiq məlum olmadıqda, lakin onların qiymətlərinin daxil olduğu çoxluqlar və bu çoxluqlarda paylanma funksiyaları verildikdə optimal idaərətmənin sintezinə "dəstə" halında baxılması.
6. Qeyri-lokal aralıq şərtlərlə verilmiş xətti adi diferensial tənliklər sistemlərinin yüksək tərtibdən aproksimasiya üsullarının tətbiq edilməsi ilə ədədi həll üsullarının işlənib hazırlanması.
7. Dirakın birölçülü və ya ikiölçülü $\delta(x)$-funksiyaları ilə təsvir olunmuş uyğun olaraq toplanmış parametrli sistemlərdə impuls və ya paylanmış parametrli sistemlərdə toplanmış (nöqtəvi) mənbələrin təsirlərinin kəsilməz olan hamar funksiya ilə aproksimasiya olunması.
8. Kompüter eksperimentlərinin aparılması üçün ədədi həll üsulları əsasında alqortimlərin və proqram paketlərin işlənib hazırlanması.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində xüsusi törəməli yüklənmiş diferensial tənliklər, optimal idarəetmə, sonlu ölçülü optimallaşdırmanın ədədi həll üsullarından, həm nöqtəvi, həm də inteqral mənada yüklənmiş xüsusi törəməli diferensial üçün başlanğıc-sərhəd məsələlərinin ədədi həll üsullarından, xüsusilə də ikiölçülü fəza dəyişənləri üçün dəyişən istiqamətlər üsulundan, qeyri-lokal ayrılmamış aralıq şərtlərlə verilmiş xətti adi diferensial tənliklər, həm diferensial tənliklərin, həm də optimal idarəetmə məsələlərin kompüterlə sürətli həlli üçün abstraktlaşdırılmış proqram paketlərinin yaradılmasında istifadə olunan obyekt yönümlü proqramlaşma dillərindən istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar aşağıdakılardır:
1. Əks əlaqəli optimal idarəetmə məsələlərində idarə və nəzarət

nöqtələrinin yerlərinin optimallaşdırılması məsələlərinin ədədi həlli;
2. Membranın başlanğıc rəqs təsirlərinin gücləri və təsir nöqtələri qeyri-dəqiq verildikdə rəqslərin sakitləşdirilməsində idarəetmənin sintezi məsələsinin həlli;
3. Başlanğıc vəziyyəti və ya ətraf mühitin temperaturu qeyri-dəqiq verildikdə istilikkeçirmə proseslərində idarəetmənin sintezi məsələsinin həlli;
4. Qeyri-lokal aralıq şərtlərlə verilmiş xətti adi diferensial tənliklər sistemlərinin yüksək tərtibdən ədədi həlli;
5. Dirakın $\delta(x)$-funksiyaları ilə təsvir olunmuş toplanmış (nöqtəvi) mənbələrin kəsilməz, hamar funksiyalarla aproksimasiyası;
6. Alınmış məqsəd funksionalının qradiyent düsturlarından istifadə etməklə qoşma qradiyent, qradiyentin proyeksiyası, cərimə funksiyası üsullarının tətbiqi ilə kompüter eksperimentlərin aparılması üçün proqram təminatının hazırlanması.

Tədqiqatın elmi yenilikləri. İşin əsas elmi yenilikləri aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Paylanmış parametrli sistemlərin əks əlaqəli optimal idarəetmə məsələlərində sintez olunan parametrlərə görə məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır.
2. Paylanmış parametrli sistemlərdə verilmiş sayda toplanmış idarəetmə təsirlərinin və əks əlaqəli nəzarət nöqtələrinin yerləşmə koordinatlarına görə məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır.
3. İdarə olunan sistemlərin başlanğıc şərtləri və ya ona təsir edən ətraf mühit təsirlərinin qiymətləri əvvəlcədən dəqiq məlum olmadıqda, lakin onların mümkün qiymətlər çoxluğu və bu çoxluğa daxil olan elementlərin paylanma funksiyaları verildikdə əks əlaqə parametrlərinin bu çoxluqlara nəzərən məsələnin “dəstə” halında idarəetməsinə görə məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır.
4. Qeyri-lokal ayrılmamış aralıq şərtlərlə verilmiş xətti adi diferensial tənliklər sistemlərinin yüksək tərtibli dəqiqliklə ədədi həll üsullarının işlənib hazırlanmışdır.
5. Adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə başlanğıc-sərhəd

məsələlərinin şəbəkə üsullarının tətbiqi ilə həllində birölçülü və ikiölçülü Dirakın $\delta(x)$-funksiyalarının aproksimasiya sxemləri təklif edilmiş və tədqiq edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Tədqiqatlarda nəzəri olaraq paylanmış parametrli dinamik sistemlərdə əks əlaqəli optimal idarətmənin sintezi məsələləri üçün birinci tərtib zəruri şərtlər üçün məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır ki, praktiki mühəndis məsələlərində bu nəticələrdən istifadə etməklə optimal idarəetmə və tənzimləmə məsələlərini həll etmək olar. Təklif olunan yanaşmaları idarəetmə sistemlərinin lahiyələndirilməsi və bir çox digər paylanmış parametrli sistemlərin və obyektlərin optimal idarə olunması və tənzimləmə məsələlərində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. İşin əsas nəticələri aşağıdakı müxtəlif nüfuzlu həm ölkədaxili, həm də xarici beynəlxalq elmi konfranslarda əyani və ya "onlayn" rejimdə iştirak etməklə, həmçinin bir çox elmi seminarlarda məruzə olunmuşdur.

- **beynəlxalq konfranslarda:**

"Прикладная математика и фундаментальная информатика" (RF, Omsk, 2017, 2018, 2019, 2020), "Актуальные проблемы прикладной математики и физики" (RF, Nalçik, 2017, 2018), "Математика, ее приложения и математическое образование" (RF, Ulan-Ude, Baykal, 2017), "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (RF, Samara, 2017), "International Conference on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2017, 2018, 2019, 2020)" (Montenegro, Petrovac), "Control and Optimization with Industrial Applications (COIA- 2018, 2020)" (Bakı), "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" beynalxalq konfrans (Bakı, 2019).

- **elmi seminarlarda:**

AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Optimal idarəetmə" şöbəsində keçirilmiş elmi seminarlarda "Qızdırılma prosesinin sərhəd idarəetməsinin sintezi məsələsinin tədqiqi", "Optimization and control of placements of point dampers on the plate" (Bakı, 2017), "Lövhənin qızdırılması prosesində nöqtəvi ölçmələr və toplanmış istilik mənbələrinin yerləşməsinin optimallaşdırılması" (Bakı, 2018) mövzularında məruzələr edilmişdir.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiya işi üzrə 35 elmi iş nəşr olunmuşdur ki, onlardan 13 məqalə, o cümlədən 11 xarici ölkələrdə, 22 sayda konfrans materialları və tezisləridir ki, onların da əksəriyyəti xaricdə və ölkəmizdə keçirilmiş nüfuzlu konfranslarda məruzə olunmuşdur. 5 məqalə Scopus bazasına, 3 məqalə isə Clarivate Analytics agentliyinin Web of ScienceTM Core Collection beynəlxalq bazasına daxildir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri İnstitutu.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi 142 səhifədən, 212881 simvoldan, 7 cədvəldən və 10 şəkildən ibarət olmaqla, giriş, dörd fəsil, işin əsas nəticəsi, istifadə edilmiş 113 ədəbiyyat siyahısından, proqram təminatının mətninin verildiyi Əlavədən ibarətdir.

İŞİN QISA MƏZMUNU

Girişdə baxılan məsələlərin aktuallığı, əldə olunmuş elmi yeniliklər haqqında, tədqiqatların nəzəri və praktiki əhəmiyyəti, aprobasiyası haqqında ətraflı məlumatlar verilmişdir.

Birinci fəsildə paylanmış parametri sistemlərdə toplanmış təsirlərlə proqram və əks əlaqəli optimal idarəetmə proseslərində nazik elastik membranın rəqslərinin sakitləşdirilməsi məsələsi nəzərdən keçirilir. Əks əlaqəli idarəetmədə sakitləşdiricilərin iş rejimi ölçmə nöqtələrinin kifayət qədər yaxın ətrafında membranın vəziyyətinin ölçülməsindən xətti asılı olaraq müəyyən edilir.

1.1 paraqrafında membranının rəqslərinin sakitləşdirilməsi prosesinin optimal idarəetmə məsələsinin qoyuluşu verilmişdir.

$$u_{tt}(x,t) = a^2\mathcal{L}u(x,t) - \lambda u_t(x,t) + p(x,t) + \tag{1}$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \vartheta_i(t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)),\ \ x = (x_1,x_2) \in \Omega,\ \ t \in (0,T],$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ \ u_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = \varphi_2(x,t),\ \ x \in \Gamma,\ \ t \in (0,T], \tag{3}$$

burada, $u(x,t) - t$ zaman anı və $x \in \Omega$ nöqtəsində membranın vəziyyətini təyin edir; $a^2 > 0$, $\gamma \geq 0$ verilmiş kəmiyyətlərdir; $\mathcal{L} = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ ikiölçülü Laplas operatoru; $\Omega \subset R^2$ – Γ sərhədi verilmiş qabarıq oblastdır. $p(x,t) \in L_2(\Omega \times [0,T])$, $\varphi_0(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi_1(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi_2(x,t) \in L_2(\Gamma \times [0,T])$ təyin olunmuş verilmiş funksiyalar; N – idarəedici sakitləşdiricilərin sayıdır. $\vartheta(t) = \left(\vartheta_1(t),\ldots,\vartheta_N(t)\right) \in L_2^N[0,T]$ vektor funksiyası $\eta = (\eta^1,\ldots,\eta^N)$, $\eta^i = \left(\eta_1^i,\eta_2^i\right) \in \Omega$, $i = 1,2,\ldots,N$ yerləşmə nöqtələrinin kifayət qədər kiçik ε_x ətrafında toplanmış sakitləşdiricilərin idarəetmə təsirlərinin gücünü təyin edən funksiyalardır. T – idarəetmə müddətidir.

$x \in \Omega$ görə kəsilməz diferensiallanan $\delta(x;\mathcal{O}_\varepsilon(\tilde{\eta}))$ funksiyası $\tilde{\eta} \in \Omega$ nöqtəsinin yerləşdiyi $\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})$ oblastı ətrafında mənbənin gücünün paylanmasını təyin edir və aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdir:

$$\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))\begin{cases} \geq 0, & \text{olduqda } x \in \mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}), \\ = 0, & \text{olduqda } x \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}), \end{cases}$$

$$\iint_\Omega \delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))\,dx = \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})} \delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))\,dx = 1, \ \ \tilde{\eta} \in \Omega.$$

Məsələ sakitləşdiricilərin η yerləşmə nöqtələri və müəyyən texnoloji məhdudiyyətləri ödəyən $\vartheta(t)$ idarəetmə güclərinin təyin edilməsindən ibarətdir ki,

$$\eta^i \in \Omega_i \subset \Omega, \ \ i = 1,2,\ldots,N, \tag{4}$$

$$\underline{\vartheta}_i \leq \vartheta_i(t) \leq \overline{\vartheta}_i, \text{ sanki hər bir } t \in [0,T], \tag{5}$$

ən qısa T zamanında aşağıdakı funksional minimal qiymət alsın.

$$\mathcal{J}_T(\vartheta,\eta) = \alpha_1 \iint_\Omega [u(x,T) - U_1(x)]^2\,dx + \\ +\alpha_2 \iint_\Omega [u_t(x,T) - U_2(x)]^2\,dx\,. \tag{6}$$

Burada, $U_1(x)$, $U_2(x)$ – verilmiş funksiyalar, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ uyğun çəki əmsallarıdır.

1.2 paraqrafında (6) funksionalının idarəetmə parametrlərinə nəzərən zəruri optimallıq üçün şərtləri alınmışdır.

Teorem 1. (1)–(3), (4), (5) şərtləri daxilində hər bir T idarəetmə zamanına görə (6) funksionalının $\vartheta = \vartheta(t)$ idarəetmə təsirlərinə və uyğun η nöqtələrinə görə qradiyentinin komponentləri üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$\mathrm{grad}_{\vartheta_i(t)} \mathcal{J}_T(\vartheta,\eta) = - \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))\, dx,$$

$$\mathrm{grad}_{\eta_s^i} \mathcal{J}_T(\vartheta,\eta) = - \int_0^T \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \vartheta_i(t)\psi_{x_s}(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))dx\, dt,$$

$i = 1,2,\ldots,N,\ s = 1,2.$ Burada $\psi(x,t)$ funksiyası aşağıdakı qoşma başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\psi_{tt}(x,t) = a^2\mathcal{L}\psi(x,t) + \lambda\psi_t(x,t),\quad x \in \Omega,\ \ t \in [0,T),$$
$$\psi(x,T) = -2\alpha_2[u_t(x,T) - U_2(x)],\ \ x \in \Omega,$$
$$\psi_t(x,T) = 2\alpha_1[u(x,T) - U_1(x)] + \lambda\psi(x,T),\ \ x \in \Omega,$$
$$\psi(x,t) = 0,\ \ x \in \Gamma,\ \ t \in [0,T).$$

Teorem 2. Əgər $(\vartheta^*(t),\eta^*)$ cütü (1)–(3), (4), (5), (6) məsələsinin lokal minimumudursa, onda (4) və (5) şərtlərini ödəyən ixtiyari $(\vartheta(t),\eta)$ parametrləri üçün

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^T \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^{i*})} \psi(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^{i*}))\big(\vartheta_i(t) - \vartheta_i^*(t)\big)\, dx\, dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{2}\int_0^T \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^{i*})} \vartheta_i^*(t)\psi_{x_s}(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^{i*}))\big(\eta_s^i - \eta_s^{i,*}\big)dx\, dt \le 0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi zəruridir.

1.3 paraqrafında kənarlardan bərkidilmiş membranın eninə rəqslərinin sakitləşdirilməsi məsələsinə baxılır. Fərz olunur ki, rəqslər başlanğıc anda xarici mənbələrin membranın hər hansı θ^ν, $\nu = 1,2,\ldots,L$ nöqtələri ətafında təsirləri nəticəsində yaranmış rəqslər η^i, $i = 1,2,\ldots,N_c$ nöqtələrinin yaxın ətrafında verilmiş τ_s, $s = 1,2,\ldots,N_t$ zaman anlarında sakitləşdirici təsirlərlə söndürülür. Sakitləşdiricilərin fəaliyyət rejimlərini ξ^j, $j = 1,2,\ldots,N_o$ nöqtələrinin ətrafında membranın eninə yerdəyişməsinin cari qiymətlərindən xətti asılı hesab edilir.

Baxılan prosesi $t > 0$ üçün aşağıdakı başlanğıc-sərhəd məsələsi şəklində təsvir etmək olar:

$$u_{tt}(x,t) = a^2\mathcal{L}u(x,t) - \lambda u_t(x,t) + \qquad (7)$$

$$+\sum_{s=1}^{N_t}\delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\sum_{i=1}^{N_c}\vartheta_s^i\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)),\ \ x=(x_1,x_2)\in\Omega,$$

$$u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=\sum_{\nu=1}^{L}q^\nu\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\theta^\nu)),\ \ x\in\Omega, \tag{8}$$

$$u(x,t)=0,\ \ x\in\Gamma, \tag{9}$$

burada, $u(x,t)$ – membranın $x\in\Omega\subset R^2$ nöqtəsində t zaman anında vəziyyətini təyin edən funksiyadır; a^2, $\lambda\geq 0$ verilmiş sabitlərdir; Γ – Ω oblastının sərhədidir; q^ν membranın $\theta^\nu=(\theta_1^\nu,\theta_2^\nu)\in\Omega$, $\nu=1,2,\ldots,L$, nöqtələri ətrafında ν-cü xarici mənbənin gücüdür, L – sayı verilmişdir; $\vartheta=\left(\vartheta_1^1,\ldots,\vartheta_1^{N_c},\ldots,\vartheta_{N_t}^1,\ldots,\vartheta_{N_t}^{N_c}\right)\in R^{N_tN_c}$ vektoru $\eta^i=\left(\eta_1^i,\eta_2^i\right)\in\Omega$, $i=1,2,\ldots,N_c$, $\eta=(\eta^1,\eta^2,\ldots,\eta^{N_c})$ nöqtələrinin ətrafında yerləşdirilmiş idarəetmə təsirlərini müəyyən edən vektordur; $\tau=\left(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{N_t}\right)$ verilmiş N_t sayda zaman anlarının ətrafında sakitləşdiricilərin təsir sayıdır, $\tau_s>\tau_{s-1}>0$, $s=1,2,\ldots,N_t$, $\tau_0=0$, $\tau_{N_t}=T_f$; T_f – verilmiş idarəetmə müddətidir.

Tutaq ki, xarici rəqs mənbələrinin q^ν güc qiymələri və onların θ^ν, $\nu=1,2,\ldots,L$ yerləşmə koordinatları dəqiq məlum deyil, lakin onların mümkün Q^ν və Θ^ν çoxluqları və bu çoxluqlarda $\rho_{Q^\nu}(q)\geq 0$, $\rho_{\Theta^\nu}(\theta)\geq 0$ paylanma funksiyaları verilmişdir.

İdarəetmə təsirlərinin güclərini təyin edən ϑ_s^i qiymətləri və onların η^i yerləşmə koordinatları baxdığımız rəqslərin sakitləşdirilməsinin idarəedilməsi məsələsində optimallaşdırılan parametrlərdir. Texniki və texnoloji mülahizələrə əsaslanaraq onlara qoyulan məhdudiyyətləri ödəyirlər:

$$\underline{\vartheta^i}\leq\vartheta_s^i\leq\overline{\vartheta^i},\ \ i=1,2,\ldots,N_c,\ \ s=1,2,\ldots,N_t, \tag{10}$$

$$\eta^i\in\mathcal{O}_{\varepsilon_x}\left(\eta^i\right)\subset\Omega_c^i\subset\Omega,\ \ i=1,2,\ldots,N_c, \tag{11}$$

(11) məhdudiyyət şərtlərində Ω_c^i sakitləşdiricilərin yerləşdirildiyi qapalı altoblastlardır; $\underline{\vartheta^i}$, $\overline{\vartheta^i}$ – verilmiş qiymətlərdir, $i=1,2,\ldots,N_c$.

Sakitləşdirici idarəetmə təsirlərinin cari qiymətlərini nəzarət nöqtələrində membranın vəziyyətinə görə aşağıdakı xətti əks əlaqəli funksiyası kimi təyin edək:

$$\hat{u}_s^j = \int\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\, d\hat{x}\, d\hat{t}\,, \quad (12)$$

$$\vartheta_s^i = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[\int\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon}(\xi^j)} u(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\, d\hat{x}\, d\hat{t} - z_i^j \right], \quad (13)$$

$i = 1,2,\ldots,N_c,\ j = 1,2,\ldots,N_o,\ s = 1,2,\ldots,N_t$. Burada, $k = ((k_i^j))$ – gücləndirmə əmsalları matrisi; $z = ((z_i^j))$, $z_i^j - \xi^j$ nəzarət nöqtəsinə nəzərən η^i nöqtələrində yerləşdirilən sakitləşdiricilərə görə membranın vəziyyətinin nominal qiymətləridir, $i = 1,2,\ldots,N_c,\ j = 1,2,\ldots,N_o$; k, z – əks əlaqənin optimallaşdırılan parametrləridir.

(13) düsturunu (7) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$u_{tt}(x,t) = a^2\mathcal{L}u(x,t) - \lambda u_t(x,t) + \sum_{s=1}^{N_t} \delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) \sum_{i=1}^{N_c} \delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[\int\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint\limits_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\, d\hat{x}\, d\hat{t} - z_i^j \right], \quad (14)$$

$$x \in \Omega.$$

Aydındır ki, nəzarət cihazlarının membranın hər bir nöqtəsində yerləşdirilməsi mümkün olmaya bilər, yalnız membranın müəyyən altoblastlarda yerləşdirilə bilər:

$$\xi^j \in \mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j) \subset \Omega_o^j \subset \Omega,\ \ j = 1,2,\ldots,N_o, \quad (15)$$

və praktiki olaraq sakitləşdiricilərin yerləşmə və nəzarət nöqtələrinin altoblastları (11) və (15) şərtlərinə görə kəsişməyə bilərlər, yəni

$$\Omega_c^i \cap \Omega_o^j = \emptyset, \quad i = 1,2,\ldots,N_c, \quad j = 1,2,\ldots,N_o.$$

Baxılan məsələdə məqsəd membranın rəqslərinin sakitləşdirilməsi prosesində idarəetmə $k \in \mathrm{R}^{N_cN_o}$, $z \in \mathrm{R}^{N_cN_o}$ əks əlaqə parametrlərinin, ξ ölçmə və η sakitləşdirici nöqtələrinin yerlərinin optimal qiymətlərinin müəyyən edilməsindən ibarətdir. Sonlu ölçülü $y = (k,z,\xi,\eta)$ kimi işarə etdiyimiz sintez olunan parametrlər vektorunun ümumi ölçüsü $N = 2(N_cN_o + N_c + N_o)$-a bərabərdir, yəni $y \in \mathrm{R}^N$.

Funksionallarla müəyyən edilən idarəetmə parametrlərinin keyfiyyət meyarlarını aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\mathcal{J}(y) = \int_Q \iint_\Theta I(y;q,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_Q(q)\, d\theta\, dq\,, \qquad (16)$$

$$I(y;q,\theta) = \int_{T_f}^{T_1} \iint_\Omega \mu(x)[u(x,t;y,q,\theta)]^2\, dx\, dt + \Re(y;\varepsilon), \qquad (17)$$

$$\Re(y;\varepsilon) = \varepsilon_1 \left\| k - \hat{k} \right\|^2_{\mathrm{R}^{N_c N_o}} + \varepsilon_2 \| z - \hat{z} \|^2_{\mathrm{R}^{N_c N_o}} +$$
$$+\varepsilon_3 \left\| \xi - \hat{\xi} \right\|^2_{\mathrm{R}^{2N_o}} + \varepsilon_4 \| \eta - \hat{\eta} \|^2_{\mathrm{R}^{2N_c}},$$

burada, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$, $\varepsilon_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,4$, $\hat{k} \in \mathrm{R}^{N_c N_o}$, $\hat{z} \in \mathrm{R}^{N_c N_o}$, $\hat{\xi} \in \mathrm{R}^{2N_o}$, $\hat{\eta} \in \mathrm{R}^{2N_c}$ – qiymətləri requlyarlaşdırma parametrləridir.

y əks əlaqə parametrlərinin optimallaşdırılması məsələsində (10) məhdudiyyətini nəzərə alaraq cərimə funksiyalarından istifadə edək. (16) məqsəd funksionalının inteqralaltı (17) funksionalına cərimə toplananını əlavə etsək:

$$\tilde{\mathcal{J}}(y) = \int_Q \iint_\Theta \tilde{I}(y;q,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_Q(q)\, d\theta\, dq\,, \qquad (18)$$

$$\tilde{I}(y;q,\theta) = I(y;q,\theta) + \mathcal{R}G(y). \qquad (19)$$

Burada aşağıdakı işarələmədən istifadə edək:

$$G(y) = \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} [g_i^+(\tau_s;y)]^2\,,$$

$$g_i^+(\tau_s;y) = \begin{cases} 0, & g_i(\tau_s;y) \leq 0, \\ g_i(\tau_s;y), & g_i(\tau_s;y) > 0, \quad i = 1,2,\ldots,N_c, \ \ s = 1,2,\ldots,N_t. \end{cases}$$

(19) düstrunda $\mathcal{R} > 0$ parametri cərimə əmsalıdır, $\mathcal{R} \to +\infty$.

Teorem 3. (14), (8)–(11), (15), (18), (19) məsələsində (18) funksionalının $y = (k,z,\xi,\eta) \in \mathrm{R}^N$ (12), (13) əks əlaqə parametrlərinə görə qradiyentinin komponentləri üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}(y)}{\partial k_i^j} = \int_Q \int_\Theta \left\{ -\sum_{s=1}^{N_t} \left[\int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\, d\hat{x}\, d\hat{t} - z_i^j \right] \times \right.$$

$$\times \left[\int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))\delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\, dx\, dt + \right.$$

$$+ 2\mathcal{R}g_i^+(\tau_s;y)\,\mathrm{sgn}\left(g_i^0(\tau_s;y)\right)\Bigg] + 2\varepsilon_1\left(k_i^j - \hat{k}_i^j\right)\Bigg\}\rho_\Theta(\theta)\rho_Q(q)\,d\theta\,dq,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j} = \int_Q \iint_\Theta \Bigg\{k_i^j \sum_{s=1}^{N_t}\Bigg[\int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))\delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\,dx\,dt +$$

$$+2\mathcal{R}g_i^+(\tau_s;y)\,\mathrm{sgn}\left(g_i^0(\tau_s;y)\right)\Bigg] + 2\varepsilon_2\left(z_i^j - \hat{z}_i^j\right)\Bigg\}\rho_\Theta(\theta)\rho_Q(q)\,d\theta\,dq,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_\gamma^j} = \int_Q \iint_\Theta \Bigg\{-\sum_{s=1}^{N_t} \int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u_{\hat{x}_\gamma}(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\,d\hat{x}\,d\hat{t} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \Bigg[\int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))\delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\,dx\,dt +$$

$$+ 2\mathcal{R}g_i^+(\tau_s;y)\,\mathrm{sgn}\left(g_i^0(\tau_s;y)\right)\Bigg] + 2\varepsilon_3\left(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j\right)\Bigg\}\rho_\Theta(\theta)\rho_Q(q)\,d\theta\,dq,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} = \int_Q \iint_\Theta \Bigg\{-\sum_{s=1}^{N_t} \int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi_{x_\gamma}(x,t)\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))\delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\,dx\,dt \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \Bigg[\int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\,d\hat{x}\,d\hat{t} - z_i^j\Bigg] +$$

$$+ 2\varepsilon_4\left(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i\right)\Bigg\}\rho_\Theta(\theta)\rho_Q(q)\,d\theta\,dq,$$

$i = 1,2,\dots,N_c,\ j = 1,2,\dots,N_o,\ \gamma = 1,2.$ Burada $\psi(x,t)$ funksiyası aşağıdakı qoşma başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\psi_{tt}(x,t) = a^2\mathcal{L}\psi(x,t) + \lambda\psi_t(x,t) - 2u(x,t;y,q,\theta)\chi_{[T_f,T_1]}(t) +$$

$$+\sum_{s=1}^{N_t}\delta(t;\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\sum_{j=1}^{N_o}\delta(x;\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \left[\int_{\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(\hat{x},\hat{t})\delta(\hat{x};\mathcal{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i))\delta(\hat{t};\mathcal{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))\, d\hat{x}\, d\hat{t} + \right.$$

$$\left. + 2rg_i^+(\tau_s;y)\,\mathrm{sgn}\left(g_i^0(\tau_s;y)\right)\right], \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T_1),$$

$$\psi(x,T_1) = 0, \quad \psi_t(x,T_1) = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$\psi(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T_1).$$

İkinci fəsildə xüsusi törəməli diferensial tənliklər ilə təsvir olunmuş paylanmış parametrli obyektlərin əks əlaqə ilə idarəetmənin optimal sintezi məsələsinə yanaşma tədqiq edilmişdir.

2.1 paraqrafında çubuğun qızdırılması prosesi nümunəsində idarəetmənin sintezi məsələsi nəzərdən keçirilmişdir.

Uzunluqları l olan bircins çubuqların ardıcıl olaraq eyni bir uclarından qızdırılması prosesinin idarəetmə məsələsinə baxaq. Qızdırılma prosesinin qoyuluşu aşağıda göstərilmiş başlanğıc-sərhəd məsələsi ilə verilmişdir:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - \lambda_0[u(x,t) - \theta], \qquad (20)$$
$$(x,t) \in \Omega = (0,l) \times (0,T],$$
$$u_x(0,t) = \lambda_1[u(0,t) - \vartheta(t)], \quad t \in (0,T], \qquad (21)$$
$$u_x(l,t) = -\lambda_2[u(l,t) - \theta], \quad t \in (0,T]. \qquad (22)$$

Burada, $u(x,t)$ – t zamanında çubuğun x nöqtəsində temperaturu; $\theta = \mathrm{const}$ ətraf mühitin temperaturu; $a^2 = \mathrm{const}$ istilik keçirmə əmsalı, λ_0, λ_1 və λ_2 verilmiş əmsallarıdır. T – prosesin davametmə müddətidir. $\vartheta = \vartheta(t)$ idarəedici istilik mənbəyinin temperaturun zamandan asılı hissə-hissə kəsilməz funksiyasıdır və aşağıdakı texnoloji məhdudiyyətləri ödəyir:

$$\underline{\vartheta} \le \vartheta(t) \le \overline{\vartheta}, \quad t \in [0,T], \qquad (23)$$

burada $\underline{\vartheta}$ və $\overline{\vartheta}$ məhdudiyyət qiymətləri əvvəlcədən verilmişdir.

Fərz edilir ki, çubuqların başlanğıc temperaturu əvvəlcədən dəqiq verilməmişdir. Lakin hər bir çubuğun başlanğıc temperatur qiyməti onun uzunluğu boyunca sabitdir və bu mümkün Φ çoxluğunda $\rho_\Phi(\varphi) \ge 0$ paylanma funksiyası məlumdur:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \varphi = \mathrm{const} \in \Phi, \quad x \in [0,l]. \qquad (24)$$

Eyni ilə mühitin $\theta = \mathrm{const}$ temperaturu dəqiq məlum deyil, lakin mümkün Θ çoxluğunda verilmiş $\rho_\Theta(\theta) \geq 0$ paylanma funksiyası ilə təyin edilə bilər:

$$\theta \in \Theta, \ \ t \in [0,T]. \tag{25}$$

Tutaq ki, qızdırılma prosesi zamanı çubuğun L_x sayda $\xi_i \in [0,l]$, $i = 1,2,\dots,L_x$ nöqtələrində zamana görə kəsilməz olaraq

$$u_i(t) = u(\xi_i,t), \ \ i = 1,2,\dots,L_x. \tag{26}$$

temperaturun ölçülməsi yerinə yetirilir. Burada,

$$0 \leq \xi_i \leq l, \ \ i = 1,2,\dots,L_x, \tag{27}$$

$\vartheta(t)$ sərhəd idarəetməsinin qiyməti prosesin cari vəziyyətinə əsasən ölçmə nöqtələrindən alınan nəticələrin xətti əks əlaqəsi şəklində təyin edilir. Əks əlaqənin (26) kimi kəsilməz olduğu halda idarəetmə aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\vartheta(t;y) = \sum_{i=1}^{L_x} k_i[u(\xi_i,t) - z_i]\,, \ \ t \in [0,T], \tag{28}$$

burada, z_i – i-indeksli ölçmə nöqtəsində nominal temperatur; k_i – gücləndirmə əmsalıdır, $i = 1,2,\dots,L_x$. $k = \left(k_1,k_2,\dots,k_{L_x}\right)$, $z = \left(z_1,z_2,\dots,z_{L_x}\right)$, $\xi = \left(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{L_x}\right)$, $y = (k,z,\xi)$ işarəmələri (28) düsturunda və daha sonra istifadə olunmuşdur.

(28) düsturunu (21) sərhəd şərtində yerinə yazsaq,

$$u_x(0,t) = \lambda_1\left(u(0,t) - \sum_{i=1}^{L_x} k_i[u(\xi_i,t) - z_i]\right), \ \ t \in (0,T], \tag{29}$$

ayrılmamış aralıq şərtlərlə qeyri-lokal sərhəd şərtini almış olarıq.

Qızdırılma prosesinin idarə edilməsi zamana görə kəsilməz (26) müşahidələri ilə aparıldıqda məqsəd funksionallarını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\mathcal{J}(y) = \int_\Theta \int_\Phi I(y;\varphi,\theta)\rho_\Phi(\varphi)\,\rho_\Theta(\theta)d\varphi\, d\theta\,, \tag{30}$$

$$I(y;\varphi,\theta) = \int_0^l \mu(x)[u(x,T;y,\varphi,\theta) - U(x)]^2 dx + \tag{31}$$

$$+\varepsilon\|y - \hat{y}\|^2_{R^{3L_x}}.$$

Kəsilməz (26) müşahidələri ilə (28) idarəetməsinin sonluölçülü $y \in$

R^{3L_x} parametrlər vektorunun sintezi (20), (29), (22), (24), (25), (30), (31) məsələsinin həllində (23) məhdudiyyət şərtinin nəzərə alınması ilə və (27) şərtinin ödənməsi üçün qradiyentin proyeksiyası üsulunun tətbiqi ilə cərimə funksiyalarlının minimallaşdırılması üsullarından istifadə olunacaqdır.

Sadəlik üçün ikitərəfli bərabərsizlik şəklində olan (23) şərtini ona ekvivalent formada yeni bərabərsizlik kimi yazaq:

$$g(t;y) = d_1 - \left|\vartheta_{d_0}(t;y)\right| \geq 0, \quad t \in [0,T], \tag{32}$$

$$\vartheta_{d_0}(t;y) = d_0 - \vartheta(t;y), \quad d_0 = \frac{\overline{\vartheta} + \underline{\vartheta}}{2}, \quad d_1 = \frac{\overline{\vartheta} - \underline{\vartheta}}{2}.$$

(23) məhdudiyyət şərtinin nəzərə alınması üçün (32) daxili cərimə funksiyasından istifadə edəcəyik. Bu halda minimallaşdırılan (31) funksionalını aşağıdakı şəklində yaza bilərik:

$$\tilde{I}(y;\varphi,\theta) = I(y;\varphi,\theta) + \mathcal{R}G(y), \tag{33}$$

$$G(y) = \int_0^T [\min(0, g(t,y))]^2 \, dt,$$

burada, $\mathcal{R}$ – cərimə əmsalıdır və $\mathcal{R} \to +\infty$.

Teorem 4. (30), (33) cərimə funksionalının (20), (29), (22), (24), (25) başlanğıc-sərhəd məsələsində (28) kəsilməz əks əlaqə ilə sintez edilən parametrlərə görə qradiyentin komponentləri aşağıdakı düsturlarla təyin edilir:

$$\frac{\partial \mathcal{J}(y)}{\partial k_i} = \int_\Theta \int_\Phi \left\{ \int_0^T \left[-\lambda_1 a^2 \psi(0,t)(u(\xi_i,t) - z_i) + 2\mathcal{R}(u(\xi_i,t) - z_i) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \operatorname{sgn}(\vartheta_{d_0}(t,y)) \min\big(0, g(t,y)\big) \right] dt + 2\varepsilon\big(k_i - \hat{k}_i\big) \right\} \rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta) d\varphi \, d\theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}(y)}{\partial z_i} = \int_\Theta \int_\Phi \left\{ \int_0^T \left[\lambda_1 a^2 \psi(0,t) k_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\mathcal{R} k_i \operatorname{sgn}(\vartheta_{d_0}(t,y)) \min\big(0, g(t,y)\big) \right] dt + 2\varepsilon(z_i - \hat{z}_i) \right\} \times$$

$$\times \rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta) d\varphi \, d\theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}(y)}{\partial \xi_i} = \int\limits_{\Theta}\int\limits_{\Phi}\left\{\int\limits_0^T\left[-\lambda_1 a^2\psi(0,t)k_i u_x(\xi_i,t) + 2\mathcal{R}k_i u_x(\xi_i,t)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\mathrm{sgn}(\vartheta_{d_0}(t,y))\min\big(0,g(t,y)\big)\right]dt + 2\varepsilon\big(\xi_i - \hat{\xi}_i\big)\right\}\rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta)d\varphi\, d\theta\,,$$

$i = 1,2,\ldots,L_x$. Burada, $\psi(x,t) = \psi(x,t;y,\varphi,\theta)$ bütün $x \in (\xi_i,\xi_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,L_x$, intervallarında aşağıdakı başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\psi_t(x,t) = -a^2\psi_{xx}(x,t) + \lambda_0\psi(x,t),$$
$$x \in (\xi_i,\xi_{i+1}),\ \ i = 0,\ldots,L_x,\ \ t \in [0,T),$$
$$\psi(x,T) = -2\mu(x)\big(u(x,T) - U(x)\big),\ \ x \in [0,l],$$
$$\psi_x(0,t) = \lambda_1\psi(0,t),\ \ t \in [0,T),$$
$$\psi_x(l,t) = -\lambda_2\psi(l,t),\ \ t \in [0,T),$$

lakin, $\xi_i \in (0,l)$, $i = 1,2,\ldots,L_x$ müşahidə nöqtələrində aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

$$\psi_x(\xi_i^+,t) = \psi_x(\xi_i^-,t) - \lambda_1\psi(0,t)k_i +$$
$$+\frac{2k_i\mathcal{R}}{a^2}\mathrm{sgn}\left(\vartheta_{d_0}(t,y)\right)\min(0,g(t,y))\,,\ \ i = 1,2,\ldots,L_x,$$
$$\psi(\xi_i^+,t) = \psi(\xi_i^-,t),\ \ i = 1,2,\ldots,L_x.$$

2.2 paraqrafında verilmiş sayda nöqtəvi istilik mənbələri ilə nazik lövhənin qızdırılması prosesində idarəetmənin sintezi məsələsində idarə və nəzarət nöqtələrinin, həmçinin xətti əks əlaqə paramterlərinin optimallaşdırılması məsələsinə baxılır.

$$u_t(x,t) = a^2\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u(x,t)) - \lambda_0[u(x,t) - \theta] + , \qquad (34)$$
$$+\sum_{i=1}^{N_c}\vartheta_i(t)\delta\big(x - \eta^i\big)\,, x = (x_1,x_2) \in \Omega \subset \mathrm{R}^2,\ \ t \in (0,T],$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \mathrm{const} \in \Phi,\ \ x \in \Omega, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathrm{n}} = \lambda[u(x,t) - \theta],\ \ x \in \Gamma,\ \ t \in (0,T]. \qquad (36)$$

Burada, a^2, λ_0, λ – verilmiş əmsallardır; Ω – lövhəni əhatə edən sərhəddi Γ olan oblast, n – Γ sərhəddinə daxili normaldır.

Hesab edəcəyik ki, lövhənin başlanğıc $\varphi(x)$ və ətraf mühütin $\theta = \mathrm{const}$ temperaturu dəqiq məlum deyil, başlanğıc temperaturun mümkün $\Phi \subset \mathrm{R}$ qiymətlər çoxluğu və bu çoxluqda uyğun $\rho_\Phi(\varphi) \geq$

0, ətraf mühütin temperaturunun mümkün $\Theta \subset \mathrm{R}$ qiymətlər çoxluğu və bu çoxluğdan olan qiymətlərə uyğun $\rho_\Theta(\theta) \geq 0$ paylanma funksiyası məlumdur.

Tutaq ki, qızdırılma prosesində lövhə üzərində N_o sayda ξ^j, $j = 1, \ldots, N_o$ nöqtələrində

$$\xi^j = \left(\xi_1^j, \xi_2^j\right) \in \Omega, \ \ \underline{a_1} \leq \xi_1^j \leq \overline{a_1}, \ \ \underline{a_2} \leq \xi_2^j \leq \overline{a_2}, \quad j = 1,2,\ldots,N_o, \tag{37}$$

zamana görə kəsilməz olaraq

$$u_{\xi^j}(t) = u\left(\xi^j, t\right), \ \ \xi^j \in \Omega, \ \ t \in [0,T], \ \ j = 1,2,\ldots,N_o. \tag{38}$$

cari temperaturun ölçülməsi yerinə yetirilir.

Müşahidələr (38) kimi olduqda $\vartheta_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,N_c$, toplanmış idarəetmə təsirlərinin qiymətləri xətti əks əlaqə ilə aşağıdakı düsturla verilmişdir:

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u\left(\xi^j, t\right) - z_i^j\right], \ \ t \in [0,T], \ \ i = 1,2,\ldots,N_c. \tag{39}$$

Burada k_i^j – i-indeksli istilik mənbəyinin j-indeksli müşahidə nöqtəsində temperaturunun nəzərə alınması ilə gücləndirmə əmsalı; z_i^j – j-inkeksli müşahidə nöqtəsinin i-indeksli mənbədə saxlamalı olan nominal temperaturdur.

İdaəretmənin (39) ifadəsini (34) diferensial tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$u_t(x,t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x,t)) - \lambda_0[u(x,t) - \theta] + \tag{40}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u\left(\xi^j, t\right) - z_i^j\right] \delta\left(x - \eta^i\right), \ \ x \in \Omega, \ \ t \in (0,T],$$

İdarəetmə təsirlərinin mümkün qiymətləri aşağıdakı kimi təyin edilmişdir:

$$\underline{\vartheta_i} \leq \vartheta_i(t) \leq \overline{\vartheta_i}, \ \ i = 1, \ldots, N_c, \ \ t \in [0, T], \tag{41}$$

Təbii olaraq, istilik mənbələrinin $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^{N_c})$ yerləşmə nöqtələri aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

$$\eta^i = \left(\eta_1^i, \eta_2^i\right) \in \Omega, \ \ \underline{a_1} \leq \eta_1^i \leq \overline{a_1}, \ \ \underline{a_2} \leq \eta_2^i \leq \overline{a_2}, i = 1, \ldots, N_c. \tag{42}$$

Baxılan məsələdə optimallaşdırılan parametrlər $\eta \in \mathrm{R}^{2N_c}$, $\xi \in \mathrm{R}^{2N_o}$, $K, Z \in \mathrm{R}^{N_c N_o}$ sabit parametrlərdir. Ümumi sayı $n = 2(N_c N_o +$

$N_o + N_c$)-ə bərabərdir və $y = (K, Z, \xi, \eta) \in \mathrm{R}^n$ işarələməsini daxil edək.

İdarəetmə meyarını aşağıdakı funksional ilə ifadə edək:

$$\mathcal{J}(y) = \int_\Phi \int_\Theta I(y;\varphi,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)\,d\theta\,d\varphi\,, \tag{43}$$

$$I(y;\varphi,\theta) = \iint_\Omega \mu(x)[u(x,T;y,\varphi,\theta) - U(x)]^2\,dx + \varepsilon\|y - \hat{y}\|^2_{\mathrm{R}^n}, \tag{44}$$

(40), (35), (36) başlanğıc-sərhəd məsələsinin hər hansı mümkün y vektoru, φ başlanğıc şərti və θ ətraf mühitin temperaturuna görə həllini $u(x,t;y,\varphi,\theta)$ kimi işarə edək. $\hat{y}$, $\varepsilon > 0$ requlyarlaşdırma parametrləridir.

(39) ifadəsini idarəedici təsirlərə olan (41)-də yerinə yazsaq, alarıq:

$$\underline{\vartheta_i} \le \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j\left[u\left(\xi^j,t\right) - z_i^j\right] \le \overline{\vartheta_i},\ \ t \in [0,T],\ \ i = 1,2,\ldots,N_c. \tag{45}$$

Aşağıdakı işarələməni daxil edək

$$g_i(t;y) = \left|g_i^0(t;y)\right| - \frac{\overline{\vartheta_i} - \underline{\vartheta_i}}{2},$$

$$g_i^0(t;y) = \frac{\overline{\vartheta_i} + \underline{\vartheta_i}}{2} - \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j\left[u\left(\xi^j,t\right) - z_i^j\right], t \in [0,T], i = 1,2,\ldots,N_c.$$

Onda (45) məhdudiyyət şərtini daha sadə halda yaza bilərik:

$$g_i(t;y) \le 0,\ \ t \in [0,T],\ \ i = 1,2,\ldots,N_c. \tag{46}$$

Mənbələrin yerləşmə və müşahidə nöqtələri arasında məsafə d-dən kiçik deyildir:

$$\left(\xi_1^j - \eta_1^i\right)^2 + \left(\xi_2^j - \eta_2^i\right)^2 \ge d^2, \tag{47}$$
$$i = 1,2,\ldots,N_c,\ \ j = 1,2,\ldots,N_o.$$

(47)-dəki N_cN_o sayda şərti aşağıdakı şəkildə göstərək və (44) əlavə edək

$$g_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot\,;y) = d^2 - \left(\xi_1^j - \eta_1^i\right)^2 + \left(\xi_2^j - \eta_2^i\right)^2 \le 0, \tag{48}$$
$$i = 1,2,\ldots,N_c,\ \ j = 1,2,\ldots,N_o.$$

(46) və (48) məhdudiyyət şərtlərinin ümumi sayı $N = N_c(N_o + 1)$-ə bərabərdir.

Baxılan y parametrlərinin sintezi məsələsində (46) və (48) məhdudiyyətlərinin ödənilməsini təmin etmək üçün (43), (44) funksionalına cərimə həddini əlavə edərək xarici cərimə funksiyalarından istifadə edəcəyik:

$$\tilde{\mathcal{J}}(y) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \tilde{I}(y;\varphi,\theta)\rho_{\Theta}(\theta)\rho_{\Phi}(\varphi)\, d\theta\, d\varphi\,, \qquad (49)$$

$$\tilde{I}(y;\varphi,\theta) = I(y;\varphi,\theta) + G(y), \qquad (50)$$

$$G(y) = \sum_{i=1}^{N_c} \mathcal{R}_i \int_0^T [g_i^+(t;y)]^2\, dt + \sum_{i=N_c+1}^{N} \mathcal{R}_i [g_i^+(\cdot\,;y)]^2\,.$$

burada, $\mathcal{R}_i \to +\infty$, $i = 1,2,\ldots,N$ cərimə əmsallarıdır.

Teorem 5. (49), (50) cərimə funksionalının (40), (35), (36), (37), (42) başlanğıc-sərhəd məsələsində (38) kəsilməz əks əlaqə ilə sintez olunan parametrlərə görə qradiyentin komponentləri aşağıdakı düsturlarla təyin edilir:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}(y)}{\partial k_i^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ -\int_0^T \left(\psi(\eta^i,t) + 2\mathcal{R}_i g_i^+(t;y)\, \mathrm{sgn}(g_i^0(t;y))\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[u\left(\xi^j,t\right) - z_i^j\right] dt + 2\varepsilon\left(k_i^j - \hat{k}_i^j\right) \right\} \rho_{\Theta}(\theta)\rho_{\Phi}(\varphi)\, d\theta\, d\varphi\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}(y)}{\partial z_i^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ k_i^j \int_0^T \left(\psi(\eta^i,t) + 2\mathcal{R}_i g_i^+(t;y)\, \mathrm{sgn}(g_i^0(t;y))\right) dt + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon\left(z_i^j - \hat{z}_i^j\right) \right\} \rho_{\Theta}(\theta)\rho_{\Phi}(\varphi)\, d\theta\, d\varphi\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}(y)}{\partial \xi_\gamma^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ -\sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \int_0^T u_{x_\gamma}\left(\xi^j,t\right)\left(\psi(\eta^i,t) + 2\mathcal{R}_i g_i^+(t;y) \times \right.\right.$$

$$\times \operatorname{sgn}(g_i^0(t;y)))\,dt + 4\sum_{i=1}^{N_c} \mathcal{R}_{N_c+(i-1)N_o+j}\left(\eta_\gamma^i - \xi_\gamma^j\right) \times$$

$$\left. \times\, g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot\,,y) + 2\varepsilon\left(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j\right)\right\} \rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)\,d\theta\,d\varphi\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} = \int\limits_\Phi \int\limits_\Theta \left\{ -\sum_{j=1}^{N_o} \int_0^T \psi_{x_\gamma}(\eta^i, t) k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j\right] dt + \right.$$

$$+ 4\sum_{j=1}^{N_o} \mathcal{R}_{N_c+(i-1)N_o+j}\left(\xi_\gamma^j - \eta_\gamma^i\right) g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot, y) +$$

$$\left. + 2\varepsilon\left(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i\right)\right\} \rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)\,d\theta\,d\varphi,$$

$i = 1,2,\ldots,N_c,$ $j = 1,2,\ldots,N_o,$ $\gamma = 1,2.$ Burada $\psi(x,t) = \psi(x,t;y,\varphi,\theta)$ funksiyası aşağıdakı qoşma başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\psi_t(x,t) = -a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi(x,t)) + \lambda_0 \psi(x,t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \left(\psi(\eta^i,t) + 2\mathcal{R}_i g_i^+(t;y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t;y))\right) \delta(x - \xi^j)\,,$$

$$x \in \Omega,\;\; t \in [0,T),$$

$$\psi(x,T) = -2\mu(x)[u(x,T;y) - U(x)],\;\; x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial \mathrm{n}} = \lambda \psi(x,t),\;\; x \in \Gamma,\;\; [0,T).$$

Üçüncü fəsildə qeyri-lokal (ayrılmamış) aralıq şərtlərlə verilmiş qeyri-avtonom xətti adi diferensial tənliklər sisteminin ədədi həlli üçün yüksək tərtibdən aproksimasiya üsulları təklif edilmiş və həll düsturları alınmışdır. Dirakın ikiölçülü δ-funksiyası üçün hər yerdə hamar funksiya ilə aproksimasiya üsulu təklif edilmişdir.

3.1 paraqrafında sərhəd və aralıq vəziyyətləri $L-1$ sayda nöqtədən ibarət ayrılmamış şərtlərlə verilmiş xətti adi diferensial tənliklər sisteminə baxılır:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t), t \in [t_0, T], \tag{51}$$

$$\sum_{i=0}^{L} C^i x(\bar{t}_i) = d, \qquad (52)$$

burada, $x(t) \in \mathrm{R}^n$ axtarılan n ölçülü vektor-funksiya; $A(t)$ – kəsilməz n ölçülü kvadrat matris-funksiya, $A(t) \neq \text{const}$, $t \in [t_0, T]$, $B(t)$ – kəsilməz n ölçülü vektor-funksiya, C^i – verilmiş n ölçülü kvadrat matrislər, $i = 0,1, \dots ,L$; d – verilmiş n ölçülü vektordur; $\bar{t}_i \in [t_0, T]$ zaman anları və t_0, T – verilmişdir, harada ki, $t_0 = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_L = T$ şərti ödənilir.

Baxılan məsələdə (52) şərtlərində (51) sisteminin ədədi həllinin dəqiqliyinin yüksəldiməsi üçün əvvəlcədən müəyyən olunmuş şəbəkədə $\dot{x}(t)$ törəməsi üçün çoxnöqtəli aproksimasiya sxemlərindən istifadə olunması təklif olunur:

$$\omega = \left\{ \begin{matrix} \tau_j \in [t_0, T]: \ \ \tau_j = jh, \ \ j = 0,1, \dots ,N, \ \ \tau_0 = t_0, \ \ \tau_N = T, \\ h = (T - t_0)/N \end{matrix} \right\}.$$

Fərz edək ki, $\bar{t}_i$, $i = 0,1, \dots ,L$ nöqtələri verilmiş ω şəbəkə oblastına aiddir, yəni

$$\bar{t}_i = \tau_{s_i}, \qquad i = 0,1, \dots ,L,$$

burada, s_i indeksi i-ci $\bar{t}_i$ nöqtəsinin ω şəbəkəsində sıra nömrəsidir.

Aydındır ki, $\dot{x}(t)$ üçün məlum k addımlı aproksimasiya düsturlarından istifadə etmək olar:

$$\dot{x}(t)|_{t=\tau_j} = \sum_{\gamma=k_1}^{k_2} \alpha_\gamma x^{j+\gamma} + O(h^m). \qquad (53)$$

Burada $k_1 + k_2 = k$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, $x^j = x(\tau_j) \in \mathrm{R}^n$, (53) aproksimayasiya sxemi ilə təyin olunan m tərtibdən aproksimasiya dəqiqliyidir.

$\dot{x}(t)$ törəməsi üçün $O(h^m)$ tərtibdən dəqiqliklə hər hansı bir k addımlı:

$$x^j = \sum_{\gamma=k_1^j}^{k_2^j} \alpha_\nu^j x^{j+\gamma} + \beta^j, \qquad (54)$$

aproksimaya sxemini istifadə etsək onda aşağıdakı şəkildə ayrılmamış qeyri-lokal aralıq şərtləri ilə müəyyən k addımlı diskret xətti tənliklər sistemini almış olarıq:

$$\sum_{i=0}^{L} C^i x^{s_i} = d. \qquad (55)$$

(54) münasibətlərində α_γ^j əmsalları (51) diferensial tənliklərinin və (53) fərq sxemi aproksimasiyasının əmsalları ilə müəyyən olunur. k_1^j və k_2^j qiymətləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$k_1^j + k_2^j = k,\ \ j = 0,1,\dots,N,$$

$j = N - k + 1, N - k + 2, \dots, N$ üçün k_1^j və k_2^j müxtəlif qiymətlər alır ((54) aproksimasiya sxemi), amma $j = 0,1,\dots,N-k$ üçün yəni, ω şəbəkə oblastının daxili düyün nöqtələri üçün k_1^j və k_2^j eyni qiymətlər alır və bir qayda olaraq sxem dəyişilmir və aşağıdakı formada tənliklərlə müəyyən olunur:

$$x^j = \sum_{\gamma=1}^{k} \alpha_\gamma^j x^{j+\gamma} + \beta^j,\ \ j = 0,1,\dots,N-k. \qquad (56)$$

Teorem 6. Aşağıdakı

$$\tilde{C}_\gamma^1 = C^i \alpha_\gamma^0,\ \ \gamma = 1,2,\dots,k,$$

$$\tilde{C}_\gamma^{j+1} = \tilde{C}_1^j \alpha_\gamma^j + \tilde{C}_{\gamma+1}^j,\ \ \gamma = 1,2,\dots,k-1,\ \ \tilde{C}_k^{j+1} = \tilde{C}_1^j \alpha_k^j,$$

$$j = s_0 + 1,\dots,s_1 - k - 1,$$

$$\tilde{C}_k^{j+1} = \tilde{C}_1^j \alpha_k^j + C^2,\ \ \ j = s_1 - k,$$

$$\tilde{d}^1 = d - C^0 \beta^0,\ \ \tilde{d}^{j+1} = \tilde{d}^j - \tilde{C}_1^j \beta^j,\ \ \ j = s_0 + 1,\dots,s_1 - k,$$

rekkurent münasibətlərdən alınan $\tilde{C}_\gamma^j$, $\gamma = 1,\dots,k$, $j = s_0,\dots,s_1 - k$ matrisləri və $\tilde{d}^j$, $j = s_0,\dots,s_1 - k$ vektorları (56) diskret sisteminə nəzərən (55) şərtlərinin əmsallarıdır.

3.2 paraqrafında toplanmış parametrli sistemlərdə impuls təsirlərinin, **3.3 paraqrafında** isə paylanmış parametrli sistemlərdə toplanmış (nöqtəvi) mənbələrin aproksimasiyası üsullarının analizi və təhlilinə baxılmışdır.

Dirakın birölçülü δ-funksiyasının aproksimasiyası üçün "sinusabənzər" funksiya təklif edilmişdir:

$$\tilde{\delta}_\varepsilon(x;\xi) = \begin{cases} 0, & |x-\xi| > \varepsilon, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left[1 + \sin\left(\dfrac{2x - 2\xi + \varepsilon}{2\varepsilon}\pi\right)\right], & |x-\xi| \le \varepsilon. \end{cases}$$

və təklif edilən aproksimasiya sxemi təhlil edilmişdir.

3.3 paraqrafında Dirakın ikiölçülü δ-funksiyası hər yerdə hamar olan aşağıdakı "sinusabənzər" $\tilde{\delta}_\varepsilon(x;\eta)$, $\eta \in R^2$ funksiyası təklif edilmişdir:

$$\tilde{\delta}_\varepsilon(x;\eta) = \\ = \begin{cases} 0, & |x_1-\eta_1| \geq \varepsilon_1 \text{ və ya } |x_2-\eta_2| \geq \varepsilon_2, \\ \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{2\varepsilon_i}\left[1+\sin\left(\frac{2x_i-2\eta_i+\varepsilon_i}{2\varepsilon_i}\pi\right)\right], & |x_1-\eta_1| < \varepsilon_1 \text{ və } |x_2-\eta_2| \leq \varepsilon_2. \end{cases}$$

Dördüncü fəsildə kompüter eksperimentlərinin yerinə yetirilməsi üçün hazırlanmış təklif olunmuş alqoritmlər haqqında məlumat verilir. Alqoritmlərin iş prinsiplərini təsvir edən blok sxemlər göstərilmişdir. C/C++ proqramlaşma dilində proqram təminatı hazırlanmışdır. Proqram təminatına müxtəlif həm birölçülü minimallaşdırma üsullarını, həm də qradiyent üsullarını təsvir edən, həmçinin xüsusi törəməli yüklənmiş diferensial tənliklərin həll edilməsi üçün modullar daxildir ki, onların vasitəsi ilə fəza dəyişəninə görə birölçülü və ya ikiölçülü diferensial tənlikləri şəbəkə, dəyişən istiqamətlər üsullarının köməyi ilə yüksək dəqiqliklə və dayanıqlı şərtlərlə həll etmək mümkündür.

Əlavədə parabolik və hiperbolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklələ təsvir edilmiş başlanğıc-sərhəd məsələlərinin ədəd həlli, idarəetmə məsələlərinin optimal həllinın axtarılması üçün qradiyent üsullarının və s. müəllif tərəfindən hazırlanmış proqram təminatının modullarının mətni verilmişdir.

Sonda elmi rəhbərim, f-r.e.d., AMEA-nın müxbir üzvü, f.r.-e.d., professor K.R. Ayda-zadəyə tədqiqat aparılmış mövzunun qoyuluşunda və dissertasiya işinin yerinə yetirilməsində göstərdiyi dəyərli məsləhətlərinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

İŞİN ƏSAS NƏTİCƏLƏRİ

Dissertasiya işində aşağıda göstərilən nəticələr alınmışdır.

1) Membranın rəqslərinin əks əlaqəli sakitləşdirilməsi prosesində toplanmış idarəetmə təsirlərinin yerləşmə nöqtələrinin və güclərinin, həmçinin müşahidə nöqtələrinin yerlərinin sintezi məsələsinə baxılmış və bu parametrlər üçün məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır.
2) Paylanmış parametrli sistemlərdə sərhəd idarəetmənin optimal əks əlaqə parametrlərinin sintezi məsələsi tədqiq edilmiş və onlar üçün məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır.
3) Lövhənin nöqtəvi istilik mənbələri ilə qızdırılması prosesində idarəetmənin sintezi, idarə və nəzarət nöqtələrinin optimal yerləşdirilməsi, əks əlaqə parametrlərinin optimallaşdırılması məsələsi tədqiq edilmiş və onlar üçün məqsəd funksionalının qradiyentləri alınmışdır.
4) Baxılan məsələlərdə əks əlaqə parametrlərinə, ölçmə nöqtələrinin və idarəetmə təsirlərinin yerləşmə nöqtələrinin koordinatlarına görə məqsəd funksionalının qradiyent düsturları alınmışdır ki, onlardan istifadə etməklə birinci tərtib optimallaşdırma üsullarının tətbiqi ilə məsələlər ədədi həll olunmuşdur.
5) Qeyri-lokal aralıq şərtlərlə verilmiş qeyri-avtonom xətti adi diferensial tənliklər sistemlərinin ədədi həlli üçün yüksək dəqiqlikli aproksimasiya üsullarının istifadə edilməsi sxemləri təklif olunmuşdur.
6) Baxılan məsələlər üçün təklif olunmuş üsul və alqoritmlər əsasında hesablama eksperimentlərin aparılması üçün proqram təminatı hazırlanmışdır. Proqram təminatından istifadə etməklə test məsələlər üzərində ədədi eksperimentlər aparılmış, onların nəticələri verilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə öz əksini tapmışdır:

1. Гашимов В.А. Оптимизация размещения и управления точечными гасителями колебаний пластины // Прикладная математика и фундаментальная информатика. Омск, 2016, № 3. с. 81–87.
2. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. On a statement of problem of control synthesis theprocess of heating the bar // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 8th International Conference on Optimization and Applications, OPTIMA–2017. Petrovac, Montenegro, 2017. p. 31–38.
3. Həşimov V.A. Çubuğun qızdırılma prosesində sərhəd idarənin sintezinin bir məsələsi haqqında // Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, 2017, No.6. – s. 13–22.
4. Айда-заде, К.Р., Гашимов, В.А. Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // Автоматика и телемеханика, – 2018. №9, – с. 122–142.
5. Aida-zade, K.R, Hashimov, V.A. Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // Automation and Remote Control, – 2018. 79 (1), – p. 1643–1660.
6. Айда-заде, К.Р., Гашимов, В.А. Оптимизация размещения сосредоточенных источников и точек контроля за процессом нагрева пластины // Кибернетика и системный анализ, – 2019. Т. 55, №4, – с.81–96.
7. Aida-zade, K.R., Hashimov, V.A. Optimizing the Arrangement of Lumped Sources and Measurement Points of Plate Heating. // Cybernetics and Systems Analysis – 2019. 55(4), – p. 605–615.
8. Айда-заде, К.Р., Гашимов, В.А. Управление с обратной связью процессом нагрева пластины с оптимизацией мест расположения источников и контроля // Автоматика и телемеханика, – 2020. №4, – с. 120–139.
9. Aida-zade, K.R, Hashimov V.A. Feedback Control of the Plate Heating Process with Optimization of the Locations of Sources and Control // Automation and Remote Control, – 2020. 81 (4), – p. 670–685.
10. Айда-заде, К.Р., Гашимов, В.А. Синтез локально сосредоточенных управлений стабилизацией мембраны с оптимизацией размещения точек контроля и гасителей колебаний // Журнал вычислительной математики и математической физики, – 2020. Т.60, №7, – с. 126–1142.
11. Aida-zade, K.R, Hashimov V.A. Synthesis of Locally Lumped Controls for Membrane Stabilization with Optimization of Sensor and Vibration Suppressor Locations // Computational Mathematics and Mathematical Physics, – 2020, 60(7), – p. 1092–1107.
12. Aida-zade, K.R, Hashimov V.A. Feedback Control of Locally Lumped Stabilizers for Dampıng Membrane Oscillations with Optimization of Poınts of

Stabilizers Placement and Points of Measuring // Journal of Modern Technology and Engineering, – 2020, 5(2), – p. 111–128.
13. Hashimov V.A. Optimization of capacities and placement of locally distributed sources in feedback control of the heating of the rod haqqında // Informatics and Control Problems, – 2020. 40(2), – p. 73–82.
14. Həşimov V.A. Çubuqların qızdırılma prosesində sərhəd idarənin sintezinin bir məsələsi haqqında / "Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri" respublika elmi konfransının materialları. Şəki, 2016. s. 128–131.
15. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Решение линейных систем дискретных уравнений с неразделенными промежуточными условиями / Материалы VII Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы "Прикладная математика и фундаментальная информатика". Омск, 2017. Т.1, № 1. с. 84–85.
16. Гашимов В.А. Численный метод высокого порядка точности для решения краевых задач относительно уравнений параболического типа / Материалы VII Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы "Прикладная математика и фундаментальная информатика". Омск, 2017. Т.1, № 1. с. 86–87.
17. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Методы высокого порядка точности для численного решения систем дифференциальных уравнений с нелокальными промежуточными условиями / Материалы Международной научной конференции "Актуальние проблемы прикладной математики и физики". Нальчик, 2017. с. 27–28.
18. Гашимов В.А. Оптимизация размешения точек контроля в задаче синтеза краевого управления нагрева стержня / Материалы Международной научной конференции "Актуальние проблемы прикладной математики и физики". Нальчик, 2017. с. 65.
19. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Методы высокого порядка точности для численного решения систем дифференциальных уравнений с нелокальными условиями / Труды XI Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление". Т.4. Секция 4. Казань, 2017. с. 21–25.
20. Гашимов В.А. Об одной задаче оптимизации успокоения колебаний пластины / Труды XI Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление". Т.1. Секция 1. Казань, 2017. С. 93–98.
21. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Анализ численных методов высокого порядка решения систем ОДУ с нелокальными условиями / Материалы VI Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17)". Россия, г. Улан-Удэ, Байкал, 2017. с. 18–21.
22. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Optimization of placing of control points in the problem of boundary control synthesis of heating the bar / VIII International

“Conferene on Optimization Methods and Applications: (OPTIMA-2017)”, Book of abstracts. Petrovac, Montenegro, 2017. p. 23.
23. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Оптимизация размещения точек контроля в задаче синтеза краевого управления нагревом стержня / Материалы международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”. Самара, 2017. с. 151–153.
24. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Оптимизация размещения контролируемых областей в задачах управления с обратной связью / Материалы IV Международной научной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики”. Нальчик, 2018. с. 32.
25. Гашимов В.А. Оптимизация размещения источников и точек контроля при нагреве пластины / Материалы IV Международной научной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики”, Нальчик, 2018. с. 83.
26. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. On one problem of synthesis of lumped controls on heating the plate / Proceedings of the 6th International Conference on “Control and Optimization with Industrial Applications”, Volume 2. Baku, 2018. p. 41.
27. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Optimization of placing of measurement points and membrane vibrations damper points on synthesis of control by its stabilization modes / IX International Conferene on “Optimization Methods and Applications: (OPTIMA-2018)”, Book of abstracts. Petrovac, Montenegro, 2018. p. 27.
28. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Об одной задаче синтеза управления процессом гашения колебания пластины / Материалы V Международной научной конференции “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики (B&Nak2018)”. Нальчик, 2018. с. 25.
29. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Повышение точности численного решения дифференциальных уравнений с нелокальными условиями / “Riyaziyyat elminin inkişafinin yeni mərhələsi” mövzusunda universitet elmi konfransının materialları. Lənkəran, 2018. s. 94–96.
30. Гашимов В.А. Численное решение задачи импульсного управления успокоением струны / Материалы IX Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы “Прикладная математика и фундаментальная информатика”. Омск, 2019. Т. 3, № 1. с. 70–73.
31. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. The numerical solution of a problem of extinguishing of vibrations of a membrane with pointed pulse influences with feedback / X International Conference on “Optimization Methods and Applications: (OPTIMA-2019)”, Book of abstracts. Petrova, Montenegro, 2019. p. 17.
32. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Об одной задаче синтеза управления процессом нагрева пластины / Сборник трудов Международной научной

конференции “Физика конденсированного состояния и смежные проблемы”. Стерлитамак, 2019. с. 25–30.
33. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. One feedback problem extinguishing of oscillations of a membrane with pointed pulse influences / International Conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. Baku, 2019. p. 64–68.
34. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. A problem of feedback control of the moving sources to heat the plate / Proceedings of the 7th International Conference on “Control and Optimization with Industrial Applications (COIA-2020)”, V.1. Baku, 2020. p. 47–49.
35. Hashimov V. On a problem of control of the stabilization of membrane vibration / Proceedings of the 7th International Conference on “Control and Optimization with Industrial Applications (COIA-2020)”, V.2. Baku, 2020. p. 167–169.

Müştərək müəlliflərlə yerinə yetirilən işlərdə müəllifin şəxsi rolu:

- [2,4-12,15,17,19,21-24,26-29,31-34] işlərində müəllif məsələnin qoyuluşunun müzakirəsində iştirak etmiş, optimallıq üçün zəruri şərtlər almış, məsələnin ədədi həll üsulunu təklif etmiş, proqram təminatı hazırlamış və ədədi eksperimentlər aparmışdır.

Dissertasiyanın müdafiyəsi 20.10.2021- il tarixində saat 15:00 -da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: Az1141, Bakı şəhəri, B. Vahabzadə küç. 68.

Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtorferat 16 09 2021 il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 30.06.2021

Kağızın formatı: A5

Həcm: 37000

Tiraj: 100