НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

САИД МУХАММЕДАЛИ оглы ФАРАХАНИ

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ИЗ ЭКСПОНЕНТ, КОСИНУСОВ И СИНУСОВ

1202.01- Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

SƏİD MƏHƏMMƏDƏLİ OĞLU FƏRAHANİ

KƏSİLƏN FAZALI EKSPONENT, KOSİNUS VƏ SİNUS SİSTEMLƏRİNİN BAZİSLİK XASSƏLƏRİ

1202.01- Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Qeyri-harmonik analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Bilal T.Bilalov**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hidayət M.Hüseynov**

(Bakı Dövlət Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Telman B.Qasımov**

(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

«Riyazi analzi» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 07 iyun 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika

İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq ücün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 17 aprel 2013-ci il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi dosent Tamilla Həsənova

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Билал Т.Билалов**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Идаят М.Гусейнов**

(Бакинский Государственный Университет);

кандидат физико-математических наук, доц. **Тельман Б.Касумов**

(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 07 июня 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д

01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 17 апреля 2013 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА доцент Тамилла Гасанова

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Öz-özünə qoşma operatorların spektral nəzəriyyəsi kifayət qədər yaxşı öyrənilib. Bundan fərqli olaraq öz-özünə qoşma olmayan operatorların spektral xassələrinin öyrənilməsi bir çox çətinliklərlə bağlıdır. Bu istiqamətdə əsas araşdırmalar M.V. Keldışın məlum fundamental işindən sonra başlanmışdır və bir sinif operator dəstələrinin spektral xassələri lazımi dərəcədə yaxşı öyrənilmişdir. Öz-özünə qoşma olmayan diferensial operatorların bir sinfini də kəsilən diferensial operatorlar təşkil edir. Kəsilən diferensial operator kimi aşağıdakı başa düşülür. Tutaq ki, $[a,b]$ hər hansı seqment və $a = a_0 < a_1 < ... < a_r = b$ onun bölgüsüdür. $L_k, k = \overline{1,r}$ – ilə $n_k \in N$ tərtibli adi diferensial ifadəni işarə edək

$$L_k u = u^{(n_k)}(t) + a_1(t)u^{(n_k-1)}(t) + ... + a_{n_k}(t)u(t).$$

Aşağıdakı diferensial ifadəyə baxaq

$$Lu(t) = L_k u(t),\ t \in (a_{k-1}, a_k),\ \ k = \overline{1,r}.$$

$W_p^{n_k}(a_{k-1}, a_k)$, $k = \overline{1,r}$ – ilə uyğun Sobolev fəzasını işarə edək. L operatorunun təyin oblastı kimi $D_L \equiv W_p^n(a_0, a_1) \times ... \times W_p^n(a_{r-1}, a_r)$ Dekart hasilini götürürük. Aydındır ki, D_L – ə daxil olan funksiyalar a_k, $k = \overline{1, r-1}$ – nöqtələrində kəsilməyə (I növ) malik ola bilərlər. Buna görə də L operatoru kimi kəsilən diferensial operator olaraq təyin oblastı D_L olan diferensial ifadə başa düşülür. Bu halda L – ə verilmiş diferensial ifadənin doğurduğu maksimal operator kimi də baxmaq olar. Bu cür operatorların spektral nəzəriyyəsi demək olar ki, çox az öyrənilmişdir. Bəzi hallara (hətta spektral parametrin sərhəd şərtlərinə daxil olan hallara) F.Atkinsonun monoqrafiyasında baxılmışdır. Daha ümumi hallara С.М. Пономарев, V.A. Ilin, I.S.Lomovun məqalələrində rast gəlinir. Qeyd etmək lazımdır ki, bir çox mexanika məsələlərinin Furye metodu ilə həlli bu cür operatorların spektral xassələrinin öyrənilməsinə gətirilir. Buna misal olaraq L.H.Larsenin, S.A.Qabovun, S.A.Qabov və P.A.Krutitskinin və s. işlərini göstərmək olar. Bu işlərdə əsasən uyğun mexanika məsələlərinin həllinin aşkar ifadəsini almaq üçün müəyyən sinifdən olan funksiyaların aşağıdakı

$$\vartheta_n(x) = \begin{cases} \sin nx\,, & 0 < x < x_0\,, \\ \cos nx, & x_0 < x < \pi\,, \end{cases}$$

kəsilən fazalı kosinus –sinus tipli sistemlər üzrə biortoqonal ayrılışlarına zərurət yaranır. Analoji sistemlər Y.İ.Moiseevin işlərində bir sinif qarışıq tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin Furye metodu ilə həlli zamanı meydana gəlir. Bu isə bu tip sistemlərin funksiyaların müəyyən banax fəzalarında bazislik xassələrinin öyrənilməsini tələb edir.

Spektrin diskretliyini təmin edən şərtlər daxilində adətən adi diferensial operatorların məxsusi və qoşma funksiyalar sistemlərinin spektrə görə asimptotikasının baş hissəsi eksponent, kosinus və sinus tip sistemlər və ya onların həyəcanlanması (və yaxud onlara müəyyən mənada yaxın) olur. Bu nöqteyi nəzərdən həyəcanlanmış $\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}$ ($Z-$tam ədədlərin nizamlanmış çoxluğudur) eksponent, $\left\{\sin\lambda_n(t)\right\}_{n\in N}$ sinus və $\left\{\cos\lambda_n(t)\right\}_{n\in N}$ kosinus sistemlərinin funksiyaların Lebeq fəzalarında bazislik xassələrinin öyrənilməsi vacibdir. Bunun üçün yaxın bazislər nəzəriyyəsinin metodlarından geniş istifadə olunur. Approksimasiya sahəsinin bu istiqaməti çox zəngindir və kifayət qədər yaxşı inkişaf etmişdir. Bazis nəzəriyyəsinin bu istiqaməti son zamanlar “Qeyri harmonik Furye sıraları ” və ya “Qeyri harmonik analiz” adı ilə məlumdur və bu adlar approksimasiya sahəsinə daha çox sirayət etməkdə davam edir. Yaxın bazislər nəzəriyyəsinə və ümumiyyətlə, bazis nəzəriyyəsinə İ.Singer, R.Young, A.M.Седлецкий , Ch. Heil, O.Christensen, Б.Т.Билалов, С.Г.Велиев monoqrafiyaları və В.Д. Мильман, Н.К.Бари , И.Ц. Гохберг, A.C. Маркус, A.M.Седлецкий və s. icmal məqalələri həsr olunub.

Bundan əlavə, qeyd etmək lazımdır ki, klassik $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ sisteminin çəkili $L_{p,\rho}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzalarında bazislik şərti məlumdur və bu, ρ çəkisi üçün Makenhoupt şərtidir. Amma bu şərt sinus $\{\sin nt\}_{n\in N}$ və kosinus $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ sistemlərinin çəkili $L_{p,\rho}(0,\pi)$ fəzalarında bazislik xassələri üçün zəruri deyil. Bu məsələlərin tam araşdırılması üçün Koşi nüvəli sinqulyar operatorun $L_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ fəzasının müəyyən alt fəzalarında məhdud təsirini öyrənmək lazımdır.

Yuxarıda sadalananlar dissertasiya mövzusunun aktuallığını göstərir.

İşin məqsədi. İşin məqsədi $[-\pi,\pi]$ $([0,\pi])$ seqmentinin müxtəlif alt aralıqlarında müxtəlif asimptotikalara malik ola bilən $\{\lambda_n(t)\}_{n\in Z}$ ardıcıllığı üçün $\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}$ eksponent, $\{\sin\lambda_n(t)\}_{n\in N}$ sinus və $\{\cos\lambda_n(t)\}_{n\in N}$ kosinus sistemlərinin $L_p(-\pi,\pi)$ ($L_p(0,\pi)$) Lebeq fəzalarında bazisliyini, Koşi nüvəli sinqulyar operatorun $L_{p,\rho}$ çəkili fəzasının müəyyən alt fəzalarında məhdud təsirini və klassik $\{\sin nt\}_{n\in N}$, $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ sistemlərinin uyğun çəkili fəzalarda bazislik xassələrini öyrənməkdən ibarətdir.

Elmi yenilik. İşdə aşağıdakı yeni nəticələr alınıb.

- asimptotikasının baş hissəsi bir parametrdən asılı fazaya malik həyəcanlanmış eksponent sisteminin $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında bazislik kriteriyası;
- iki parametrdən asılı fazaya malik həyəcanlanmış eksponent sisteminin $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında bazislik kriteriyası;
- asimptotikasının baş hissəsi hissə-hissə kəsilməz fazaya malik həyəcanlanmış eksponent sisteminin $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında bazislik kriteriyası;

- Koşi nüvəli sinqulyar operatorun çəkili $L_{p,\rho}$ fəzasının müəyyən alt fəzalarında məhdud təsiri;
- klassik sinus $\{\sin nt\}_{n\in N}$ və kosinus $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ sistemlərinin çəkili $L_{p,\rho}(0,\pi)$, $1 < p < +\infty$, fəzasında bazislik xassələri üçün kafi şərtlər.

Tədqiqat metodu. Qarşıya qoyulan məsələlərin həllində yaxın bazislər nəzəriyyəsinin, funksional analizin, funksiyalar və sinqulyar operatorlar nəzəriyyələrinin metodları tətbiq olunur.

Nəzəri və praktik əhəmiyyəti. İşdə alınan nəticələr nəzəri əhəmiyyət kəsb edir. Onlardan öz-özünə qoşma olmayan diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, yaxın bazislər nəzəriyyəsində, mexanika və riyazi fizikanın müəyyən məsələlərinin Furye metodu ilə həllinin əsaslandırılmasında istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işinin əsas nəticələri: AMEA RMİ-nın "Riyazi analiz" (rəhbər f.-r.e.d., prof. R.M.Rzayev), "Funksional analiz" (rəhbər f.-r.e.d., prof. N.Ş.İsgəndərov) və "Qeyri-harmonik analiz" (rəhbər f.-r.e.d., prof. B.T.Bilalov) şöbələrinin seminarlarında, Z.İ.Xəlilovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransda (Bakı ş., 2011), I.I.Ibrahimovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransda (Bakı ş., 2012) məruzə edilmişdir.

Nəşrləri. Dissertasiyada alınan əsas nəticələr müəllifin 8 çap olunmuş işində öz əksini tapmışdır.

İşin strukturu və həcmi. Dissertasiya işi girişdən, iki fəsil və 72 adda olan ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin həcmi 124 səhifədir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

İş giriş və iki fəsildən ibarətdir. Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış, işin məzmunu ilə bağlı nəticələrin qısa xülasəsi verilmiş və əsas nəticələr şərh olunmuşdur.

Birinci fəsildə hissə-hissə kəsilməz və müəyyən parametrlərdən asılı ikiqat həyəcanlanmış eksponent sistemlərinə baxılır. Parametrlər üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla funksiyaların Lebeq fəzalarında onun bazisliyi isbat olunur . Oxşar sistemlər kəsilən diferensial operatorlar üçün spektral məsələyə baxarkən meydana gəlir.

1.1-də zəruri anlayış və faktlar, eləcə də bazislər və yaxın bazislər nəzəriyyələrindən dissertasiyada istifadə olunacaq əsas anlayışlar verilmişdir.

Tərif 1. *Əgər* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$, $\forall n \in N$ *,olarsa,* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *sisteminə* X B*-fəzasında* ω*-xətti asılı olmayan sistem deyilir.*

1.2-də əsas nəticələrin alınmasında istifadə olunan bəzi lemmalar və faktlar göstərilir. Əsas nəticənin alınmasında aşağıdakı asanlıqla isbat olunan lemmadan istifadə edilir.

Lemma 2. *Tutaq ki,* X *fəzası* $\{x_n\}_{n\in N}$ *bazisinə malik* B*-fəza,* $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ *isə* $\{x_n\}_{n\in N}$ *sisteminə biortoqonal sistemdir. Fərz edək ki,* $\{y_n\}_{n\in N} \subset X$ *sistemi* $\{x_n\}_{n\in N}$ *sistemindən sonlu sayda elementlə fərqlənir, daha doğrusu,* $y_n = x_n, \forall n \ge n_0 + 1$. *Onda əgər*

$$\Delta_{n_0} = \det\left(x_n^*(y_k)\right)_{n,k=\overline{1,n_0}} = \begin{vmatrix} x_1^*(y_1) & \dots & \dots & x_1^*(y_{n_0}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n_0}^*(y_1) & \dots & \dots & x_{n_0}^*(y_{n_0}) \end{vmatrix} = 0,$$

olarsa, $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi* X *fəzasında minimal deyil.*

1.3 bir parametrli həyəcanlanmış eksponent sisteminin bazisliyinə həsr olunmuşdur. Aşağıdakı eksponent sisteminə baxaq

$$\left\{e^{i\lambda_n(t)t}\right\}_{n\in Z}, \tag{1}$$

burada $\lambda_n(t)$ funksiyaları

$$\lambda_n(t) = (n + \alpha \, sign\, n \; sign\, t)t + O\left(\frac{1}{|n|^{\gamma}}\right), \qquad n \to \infty, \tag{2}$$

asimptotikasına malikdir, $\alpha, \gamma \in R$. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3. *Tutaq ki, (2) asimptotikası doğrudur və* $\gamma > \max\left\{\frac{1}{p}; \frac{1}{q}\right\}$ *münasibəti ödənilir. Onda* $L_p, 1 < p < +\infty$, *fəzasında (1) sisteminin aşağıdakı xassələri ekvivalentdir.*

1) *(1) sistemi* L_p *fəzasında tamdır;*

2) *(1) sistemi* L_p *fəzasında minimaldır;*

3) *(1) sistemi* L_p *fəzasında* $\left\{e^{in(t)}\right\}_{n\in Z}$ *klassik eksponent sisteminə izomorfdur.*

İndi isə başqa hala baxaq, yəni

$$\left\{e^{i\nu_n(t)}\right\}_{n\in Z}, \tag{3}$$

sisteminə baxaq, harada ki, $\nu_n(t)$ üçün

$$\nu_n(t) = (n + \alpha \, sign \; n\,)\, t + O\left(\frac{1}{|n|^{\gamma}}\right), \qquad n \to \infty,$$

asimptotikası doğrudur, burada $\alpha, \gamma \in R -$parametrlərdir.

Teorem 4. *Tutaq ki,* α *parametri* $-\frac{1}{2q} < \alpha < \frac{1}{2p}$ *bərabərsizliyini ödəyir və* $\gamma > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right\}$ *şərti doğrudur. Onda* L_p,

$1 < p < +\infty$, *fəzasında (3) sisteminin aşağıdakı bazislik xassələri ekvivalentdir:*

1) (3) sistemi L_p fəzasında tamdır;

2) (3) sistemi L_p fəzasında minimaldır;

3) (3) sistemi L_p fəzasında ω-xətti asılı deyıl;

4) (3) sistemi L_p fəzasında $\left\{e^{in(t)}\right\}_{n\in Z}$ klassik eksponent sisteminə izomorfdur.

Alınmış nəticələrin tətbiqi kimi aşağıdakı xüsusi hala baxaq.

Misal. Xüsusi hal olaraq $\lambda_n(t) = nt,\ \forall n \neq 0$, və

$$\lambda_o(t) \equiv \begin{cases} \lambda t, & 0 < t < \pi, \\ -\mu t, & -\pi < t < 0, \end{cases}$$

götürək. Uyğun olaraq $\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}$, eksponent sisteminə baxaq.

Nəticə 5. *Tutaq ki*

$$\lambda_o(t) \equiv \begin{cases} \lambda t, & 0 < t < \pi, \\ -\mu t, & -\pi < t < 0, \end{cases}$$

və $\lambda_n(t) = nt,\ \forall n \neq 0$. *Onda* $\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}$, *sisteminin* $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, *fəzasında bazis (* $p = 2$ *halında Riss bazisi) olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\omega(\lambda) + \omega(\mu) \neq 0,$$

şərtinin ödənməsidir, harada ki, $\omega(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(e^{i\lambda\pi} - 1\right)$.

1.4 –də iki α və β parametrlərindən asılı eksponent sisteminə baxacağıq, belə ki

$$\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}, \qquad (4)$$

burada $\lambda_n(t)$ funksiyaları

$$\lambda_n(t)=(n+\alpha\, sign\, n\; sign\, t)t+\beta\, sign\, n\; sign t+O\left(\frac{1}{|n|^{\gamma}}\right),\; n\to\infty, \qquad (5)$$

asimptotikasına malikdir: $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 6. *Tutaq ki, (4) eksponent sistemi üçün (5) asimptotikası doğrudur və*

$$\gamma>\max\left\{\frac{1}{p};\frac{1}{q}\right\},\quad -\frac{\pi}{2q}<\beta<\frac{\pi}{2p},$$

münasibətləri ödənir. Onda bu sistemin $L_p,\ 1<p<+\infty$, *fəzasındakı bazislik xassələri üçün aşağıdakı hökmlər ekvivalentdir.*

1) *(4) sistemi tamdır;*
2) *(4) sistemi minimaldır;*
3) *(4) sistemi* ω *- xətti asılı deyil;*
4) *(4) sistemi* $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ *klassik eksponent sisteminə izomorf bazis təşkil edir.*

Dissertasiyanın II fəslində I fəsildə alınan nəticələr ümumi hala köçürülür. Əvvəlki hallardan fərqli olaraq bu fəsildə faza olaraq hissə-hissə kəsilməz funksiya və onun həyəcanlanması götürülür. Bundan əlavə Koşi nüvəli sinqulyar operatora baxılır. Bu operatorun $L_p(-\pi,\pi),\ 1<p<+\infty$, fəzasının müəyyən alt fəzalarında (tək və ya cüt funksiyaların alt fəzalarında) və onların çəkili variantlarında məhdud təsiri öyrənilir. Bu yanaşma klassik sinus və kosinus sistemlərinin uyğun çəkili Lebeq fəzalarında bazislik xassələrinin öyrənilməsinə tətbiq olunur. $\{\sin nt\}_{n\in N}$ sisteminin çəkili $L_{p,\rho}(0,\pi)$ fəzalarında tamlığı və minimallığı üçün yeni nəticələr alınır.

2.1-də ümumi halda, asimptotikasının baş hissəsində hissə-hissə kəsilməz fazaya malik eksponent sisteminin L_p Lebeq fəzalarında bazislik xassələrini öyrənəcəyik. Belə ki, daha ümumi şəkilli

$$\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}, \tag{6}$$

eksponent sisteminə baxılır, harada ki, $\{\lambda_n(t)\}_{n\in Z}$ funksiyalar ardıcıllığı aşağıdakı kimi

$$\lambda_n(t)=nt-\alpha(t)sign\,n+\beta_n(t),\ n\to\infty\ , \tag{7}$$

asimptotikaya malikdir.

Fərz edək ki, $[-\pi,\pi]$ parçasında təyin olunmuş $\alpha(t)$ və $\beta_n(t)$, $n\in Z$, funksiyaları üçün aşağıdakı şərtlər ödənir.

a) $\alpha(t)$ *funksiyası* $[-\pi,\pi]$ *parçasında hissə-hissə kəsilməz funksiyadır,* $\{t_k\}_1^r:-\pi=t_0<t_1<...<t_r<t_{r+1}=\pi-$ *isə onun birinci növ kəsilmə nöqtələridir.*

b) $\beta_n(t)$, $n\in Z$ *, funksiyaları üçün*

$$\beta_n(t)=O\left(\frac{1}{n^{\gamma_k}}\right),\ t\in(t_k,t_{k+1}),\ k=\overline{0,r}\ ,\ \{\gamma_k\}_1^r\subset(0,+\infty),$$

münasibəti doğrudur. $\alpha(t)$ *funksiyasının* $\{t_k\}_1^r$ *nöqtələrində sıçrayışlarını*

$$\{\alpha_k\}_1^r:\alpha_k=\alpha(t_k+0)-\alpha(t_k-0)\ ,\ k=\overline{1,r}\ ,$$

ilə işarə edək. Bundan əlavə

$$c)\ \ \frac{\alpha_k}{\pi}-\frac{1}{p}\notin Z,\ \forall k=\overline{1,r},$$

münasibətlərinin ödəndiyini fərz edəcəyik.

Beləliklə

$$\mu_n(t)=nt-\alpha(t)\,sign\,n\,,\ n\in Z\ ,$$

qəbul edək və

$$\left\{e^{i\mu_n(t)}\right\}_{n\in Z}, \tag{8}$$

eksponent sisteminə baxaq. Fərz edək ki, c) şərti ödənilir. Onda

$$-\frac{1}{q}<\frac{\alpha_i}{\pi}+n_{i-1}-n_i<\frac{1}{p},\ i=\overline{1,r},\ n_0=0\,,\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{9}$$

bərabərsizliklər silsiləsindən $\{n_i\}_1^r\subset Z$ tam ədədlərini birqiymətli olaraq tapırıq. Qəbul edək

$$\omega=\frac{\alpha(-\pi)-\alpha(\pi)}{\pi}+n_r\,. \tag{10}$$

Tutaq ki, $\left\{e^{i\mu_n(t)}\right\}_{n\in Z}$ sistemi $L_p(-\pi,\pi)$ fəzasında bazisdir. $\{\vartheta_n\}_{n\in Z}\subset L_q$ ilə ona biortoqonal sistemi işarə edək. $\vartheta=\sup\limits_n\|\vartheta_n\|_q$ olsun.

$$n_0=\min\left\{r:\sum_{|n|\ge n_0+1}\left\|e^{i\lambda_n(t)}-e^{i\mu_n(t)}\right\|_p<\vartheta^{-1}\right\},$$

qəbul edək. $\left\{\tilde{\vartheta}_n\right\}_{n\in Z} \subset L_q(-\pi,\pi)$ ilə $\left\{e^{i\tilde{\lambda}_n(t)}\right\}_{n\in Z} \subset L_p(-\pi,\pi)$ bazisinə biortoqonal sistemi işarə edək, harada ki

$$\tilde{\lambda}_n(t)=\begin{cases}\lambda_n(t), & |n|\ge n_0+1, \\ \mu_n(t), & |n|\le n_0 .\end{cases}$$

Tutaq ki

$$\Delta_{n_0}=\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{-n_0,n_0}}=\begin{vmatrix} a_{-n_0-n_0} & \dots & \dots & a_{-n_0n_0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n_0-n_0} & \dots & \dots & a_{n_0n_0}\end{vmatrix}, \tag{11}$$

harada ki, $a_{ij}=\tilde{\vartheta}_i\left(e^{i\lambda_j(t)}\right)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_j(t)}\overline{\tilde{\vartheta}_i(t)}dt$, $i,j\in Z$.

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 7. *Tutaq ki,* $\{\lambda_n(t)\}_{n\in Z}$ *ardıcıllığı üçün (7) asimptotikası doğrudur;* $\alpha(t)$ *və* $\beta_n(t)$ *funksiyaları a)-c) şərtlərini ödəyirlər.* ω *kəmiyyəti (9) və (10) münasibətlərindən təyin olunur. Tutaq ki,* $\gamma>\max\left\{\frac{1}{p};\frac{1}{q}\right\}$ *ödənilir. Onda* $\omega<-\frac{1}{q}$ *olduqda (6) eksponent sistemi* L_p *fəzasında minimal deyil;* $\omega>\frac{1}{p}$ *olduqda isə o,* L_p *fəzasında tam deyil .* $-\frac{1}{q}<\omega<\frac{1}{p}$ *olduqda (6) eksponent sisteminin aşağıdakı xassələri* L_p *fəzasında ekvivalentdir.*

1) L_p *fəzasında tamdır;*

2) L_p *fəzasında minimaldır;*

3) L_p *fəzasında* ω*-xətti asılı deyil;*

4) L_p *fəzasında* $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ *sisteminə izomorf bazis təşkil edir;*

5) $\Delta_{n_0} \neq 0$, *harada ki,* Δ_{n_0} *determinantı (11) ifadəsindən təyin olunur.*

Koşi nüvəli sinqulyar operatorun çəkili Lebeq fəzalarında təsiri kifayət qədər yaxşı öyrənilib. Bu təsirin məhdud olması üçün çəki üzərinə kriteriya da məlumdur. Bir ölçülü halda bu Makenhoupt şərtidir. Amma bu şərt sinqulyar operatorun müəyyən alt fəzalarda məhdud təsiri üçün zəruri deyil. Bu isə öz növbəsində sinus və kosinis sistemlərinin uyğun fəzalarda bazislik xassələrinə təsir edir. Koşi nüvəli sinqulyar operatorun funksiyaların müəyyən çəkili altfəzalarında məhdud təsirini öyrənmək məqsədi ilə bizə bəzi triqonometrik ifadələr lazımdır.

2.2 lazımi ifadələrin alınmasına həsr olunub. Koşi nüvəli aşağıdakı sinqulyar operatora baxaq

$$[Sf](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s)ds}{1-e^{-i(s-t)}}, \qquad (12)$$

burada $f \in L_{p,\rho}(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, uyğun sixliq, $\rho(t) -$ isə

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{r} |t-t_k|^{p\beta_k},$$

şəkilli çəki funksiyasıdır. $\{t_k\}_1^r \subset [-\pi,\pi]$ ($i \neq j$ olduqda $t_i \neq t_j$), $\{\beta_k\}_1^r \subset R -$ həqiqi ədədlərdir. $L_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ kimi

$$\|f\|_{p,\rho} \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

normalı çəkili Lebeq fəzasını başa düşəcəyik. Aşağıdakı teorem məlumdur.

Teorem 8. *S operatoru $L_{p,\rho}$, $1 < p < +\infty$, fəzasında yalnız və yalnız o zaman məhdud olur ki*

$$-\frac{1}{p} < \beta_k < \frac{1}{q}, \; k = \overline{1,r}, \tag{13}$$

bərabərsizlikləri ödənsin, harada ki, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bu faktla bağlı Qarnetin məlum monoqrafiyasına baxmaq olar. (13) bərabərsizlikləri $\rho(t)$ çəki funksiyasına nəzərən Makenhoupt şərtidir. Məlumdur ki, $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n \in Z}$ klassik eksponent sistemi $L_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ fəzasında yalnız və yalnız (13) bərabərsizliyi ödəndikdə bazis təşkil edir. Indi isə $L_{p,\omega}(0,\pi)$ çəkili fəzasına baxaq, harada ki, $\omega(t)$

$$\omega(t) \equiv \prod_{k=0}^{r} |t - \tau_k|^{p\alpha_k}, \tag{14}$$

şəklində çəki funksiyasıdır, burada $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_r = \pi$, $\{\alpha_k\}_0^r \subset R$. $L_{p,\omega}(-\pi,\pi)$ fəzasında cüt (tək) funksiyalar fəzasını uyğun olaraq $L^+_{p,\omega}$ ($L^-_{p,\omega}$) ilə işarə edək, daha doğrusu

$$L^{\pm}_{p,\omega} \equiv \{ f \in L_{p,\omega} : f(-t) = \pm f(t), \; t \in [-\pi,\pi] \}.$$

2.2 aşağıdakı əsas lemmaların isbatına həsr olunub.

Lemma 9. *Aşağıdakı eyniliklər doğrudur*

$$\frac{1}{1-e^{i(\theta-\varphi)}}-\frac{1}{1-e^{i(\theta+\varphi)}}=-\frac{i}{2}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}\right],$$

$$\frac{1}{1-e^{i(\theta-\varphi)}}-\frac{1}{1-e^{i(\theta+\varphi)}}=-\frac{i}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}\right].$$

Lemma 10. *Aşağıdakı eyniliklər doğrudur*

$$\frac{1}{1-e^{i(\theta-\varphi)}}+\frac{1}{1-e^{i(\theta+\varphi)}}=1-\frac{1}{2i}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\frac{1}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}\right],$$

$$\frac{1}{1-e^{i(\theta-\varphi)}}+\frac{1}{1-e^{i(\theta+\varphi)}}=1-\frac{1}{2i}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\frac{1}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}\right].$$

2.3-də 2.2-də alınan triqonometrik ifadələrdən istifadə edərək Koşi nüvəli sinqulyar operatorun funksiyaların çəkili Lebeq fəzalarının müəyyən alt fəzalarında məhdud təsiri öyrənilir.

Beləliklə, $\omega(t)$ çəkisini $(-\pi,0)$ intervalına cüt davam etdirək və onu μ ilə işarə edək

$$\mu(t)=\begin{cases}\omega(t), \; 0\le t\le\pi, \\ \omega(-t), \; -\pi\le t<0.\end{cases}$$

Aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 11. *Fərz edək ki, aşağıdakı bərabərsizliklər ödənir*

$$-\frac{1}{p}<\alpha_0<2-\frac{1}{p}\ ,\ -\frac{1}{p}<\alpha_r<2-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{p}<\alpha_k<\frac{1}{q}\ ,\ k=\overline{1,r-1}.$$

Onda

$$k(t;s)=\frac{1}{1-e^{-i(s-t)}}\ ,$$

Koşi nüvəli

$$Sf=\int_{-\pi}^{\pi}k(t;s)f(s)ds,$$

S *operatoru* $L^{-}_{p,\mu}$ *fəzasından* $L^{+}_{p,\mu}$ *fəzasına məhdud təsir edir.*

Teorem 12. *Fərz edək ki,* ω *çəki funksiyası (14) ifadəsi ilə təyin olunub və*

$$-1-\frac{1}{p}<\alpha_0<\frac{1}{q},-1-\frac{1}{p}<\alpha_r<\frac{1}{q},-\frac{1}{p}<\alpha_k<\frac{1}{q},\ k=\overline{1,r-1},$$

bərabərsizlikləri ödənir. Onda $K(s;t)=\dfrac{1}{1-e^{-i(s-t)}}-\dfrac{1}{2}$ *Koşi nüvəli* K *sinqulyar operatoru*

$$K\,f=\int_{-\pi}^{\pi}K(s;t)f(s)ds\,,$$

$L^{+}_{p,\mu}$ *fəzasından* $L^{-}_{p,\mu}$ *fəzasına məhdud təsir edir.*

2.4-də əvvəlki paraqraflarda alınan nəticələrdən istifadə edərək klassik $\{\sin nt\}_{n\in N}$ sinus və $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ kosinus sistemlərinin çəkili $L_{p,\omega}(0,\pi)$ fəzalarında bazislik xassələri öyrənilir. $L_{p,\omega}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$, çəkili fəzasına baxaq. Aşağıdakı teoremlər isbat olunur.

Teorem 13. *Fərz edək ki, ω çəki funksiyası (14) ifadəsi ilə təyin olunur. Əgər*

$$-1-\frac{1}{p}<\alpha_0,\alpha_r<2-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{p}<\alpha_k<\frac{1}{q}\ ,\ k=\overline{1,r-1},$$

bərabərsizlikləri ödənirsə, onda $\{\sin nt\}_{n\in N}$ sistemi $L_{p,\omega}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında minimaldır. Əgər

$$\alpha_0;\alpha_r>-1-\frac{1}{p};\alpha_k>-\frac{1}{p},\ k=\overline{1,r-1},$$

bərabərsizlikləri ödənərsə, onda $\{\sin nt\}_{n\in N}$ sistemi $L_{p,\omega}(0,\pi)$ fəzasında tamdır. Bundan əlavə, əgər

$$-\frac{1}{p}<\alpha_k<\frac{1}{q},\ k=\overline{0,r}, \tag{15}$$

bərabərsizlikləri ödənərsə, onda bu sistem $L_{p,\omega}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında bazis təşkil edir.

Teorem 14. *Fərz edək ki, ω çəki funksiyası (14) ifadəsi ilə təyin olunur. Əgər (15) bərabərsizlikləri ödənərsə, onda $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ kosinus sistemi $L_{p,\omega}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında bazis təşkil edir. Əgər $\alpha_k>-\frac{1}{p}$, $k=\overline{0,r}$ bərabərsizlikləri ödənirsə, onda bu sistem $L_{p,\omega}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$, fəzasında tamdır.*

Bundan əlavə, son zamanlar müəyyən məsələlərə tətbiqi ilə əlaqədar olaraq intutionistik Fuzzy strukturlu fəzalarda müxtəlif məsələlərin öyrənilməsinə olan maraq çox artmışdır. Əlavədə bu cür fəzalarda sistemlərin bazislik xassələri haqqında müəyyən nəticələr alınmışdır.

Sonda müəllif elmi rəhbəri f.-r.e.d., prof. B.T.Bilalova məsələlərin qoyuluşuna və işə olan daimi diqqətinə görə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Bilalov B.T., Guseynov Z.G., Farahani S.M. On basicity from exponents, sines and cosines in Lebesgue spaces with variable exponent. The Proceeding of The 40-th Annual Iranian Math. Conf., Tehran, Iran, 2009, pp.439-444.

2. Muradov T.R., Farahani S. On basicity of some perturbed system of exponents in L_p. Transaction of NAS of Az., vol. XXX, №4, 2010, pp. 129-134.
3. Shykhammedov A.M., Farahani S. On a basis from perturbed systems of exponents. Proceedings of IMM of NAS of Az., vol. XXXIII, Baku-2010, pp. 157-162.

4. Билалов Б.Т., Фарахани С.М. О возмущенных базисах из экспонент с комплексными коэффициентами. Межд. конф., посв. 100-летнему юбилею академика З.И. Халилова, Баку, 2011, с.78-80.
5. Bilalov B.T., Farahani S.M. On perturbed bases of exponential functions with complex coefficients. Transaction of IMM of NAS of Az., vol. XXXI, №4, 2011, pp. 45-50.
6. Najafov T.I., Farahani S. On Singular Integrals with Cauchy Kernel on Weight Subspaces: The basicity property of sines and cosines systems in weight spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, volume 2011 (2011), Article ID 717501, 13 pages.

7. Bilalov B.T., Farahani S.M. The intuitionistic fuzzy normed space of coefficients. Proceedings of the International conference devoted to the 100-th anniversary of academician I.I. Ibrahimov, Baku, 2012, pp.53-56.

8. Bilalov B.T., Guliyeva F.A., Farahani S.M. The intuitionistic fuzzy normed spaces of coefficients. Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 969313, 11 pages, doi:10.1155/2012/969313, IF= 1.318.

САИД МУХАММЕДАЛИ оглы ФАРАХАНИ

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ИЗ ЭКСПОНЕНТ, КОСИНУСОВ И СИНУСОВ

С РАЗРЫВНЫМИ ФАЗАМИ

АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа посвящена изучению базисности систем экспонент, косинусов и синусов, которые являются собственными функциями разрывных дифференциальных операторов и их возмущениям в пространствах Лебега или в весовых пространствах Лебега.

В работе получены следующие основные результаты:

- критерий базисности возмущенной системы экспонент в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, главная часть асимптотики которой зависит от одного параметра;
- критерий базисности возмущенной системы экспонент в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, фаза которой зависит от двух параметров;
- критерий базисности возмущенной системы экспонент в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, главная часть асимптотики которой имеет кусочно непрерывную фазу;
- ограниченное действие сингулярного оператора с ядром Коши в подпространствах $L_{p,\rho}$;

- достаточные условия для базисных свойств классических систем синусов $\{\sin nt\}_{n\in N}$ и косинусов $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ в пространствах $L_{p,\rho}(0,\pi)$, $1 < p < +\infty$.

SAEED MOHAMMADALI oglu FARAHANİ

ON BASICITY OF SYSTEM OF EXPONENTS, COSINES AND SINES WITH DISCONTINUOUS PHASES

SUMMARY

This thesis is dedicated to the study of the basicity of systems of exponents, cosines and sines which are eigenfunctions of discontinuous differential operators, and their perturbations in ordinary and weighted Lebesgue spaces.

The main results obtained are:

- basicity criterion for the perturbed system of exponents in $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, with a principal part of asymptotics depending on one parameter;
- basicity criterion for the perturbed system of exponents in $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, the phase of which depends on two parameters;
- basicity criterion for the perturbed system of exponentials in $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, with a principal part of asymptotics having a piecewise continuous phase;
- boundedness of a singular operator with Cauchy kernel in subspaces $L_{p,\rho}$;

- sufficient conditions for the basis properties of classical systems of sines $\{\sin nt\}_{n\in N}$ and cosines $1\bigcup\{\cos nt\}_{n\in N}$ in $L_{p,\rho}(0,\pi)$, $1 < p < +\infty$.