АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ АБСТРАКТНЫХ СВЕРТОЧНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Специальность: 1211.01 - Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Гумбат Казым оглы Мусаев**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание
ученой степени доктора наук

Баку-2022

Диссертационная работа выполнена в отделе «Обратные задачи и нелинейные уравнения» Научно-Исследовательского Института Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, проф.
Вели Биннет оглы Шахмуров

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Таир Сади оглы Гаджиев

доктор физико-математических наук, профессор
Аллаберен Оразмухаммед оглы Ашуралиев

доктор физико-математических наук, профессор
Нихан Алипанах оглы Алиев

доктор математических наук, профессор
Бахрам Али оглы Алиев

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
Мисир Джумаил оглы Марданов

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
Абдуррагим Фарман оглы Гулиев

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.–м.н., профессор
Юсиф Абульфат оглы Мамедов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Вопрос максимальной регулярности привлек внимание в последние годы, и был достигнут значительный прогресс в этой области. Одной из причин этого является важность оценок для нелинейных задач. Например, с помощью методов линеаризации это позволяет найти простой и изящный подход к квазилинейным задачам. Некоторые вопросы максимальной регулярности с аналогичными особенностями рассмотрены в работах Х. Аманна, Ф. Клемента, С. Ли, Ж. Прюсса, А. Лунарди, Шахмурова В.Б., и т.д.

Первый общий абстрактный результат для максимальный L_p-регулярности абстрактных уравнений в Гильбертовых пространствах был получен Л.Симоном в 1964 году. Он получил положительный ответ в этом случае без дополнительных ограничений на оператора коэффициента. Доказательство Де Симона использует теорему Планшереля, которая, как известно, действительна только в случае Гильбертова пространства.

Одной из существенный результат о максимальной L_p −регулярности дан в работе О.Ладыженская, В.Солонников и Н.Уральцева. Их доказательство опеpается на потенциальную теорию и не может быть легко обобщено.

В конце XX века Н. Калтон показал, что результат Л. Симона не верен в пространствах $L_p(G)$, где $G \subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей. Действительно, если рассмотренная задача обладает свойством максимальной L_p-регулярности то Банахово пространство должно быть изоморфно Гильбертовому пространству. Особый интерес представляет пример, когда оператор есть дифференциальный оператор.

Первый общий результат был получен Л. Вейсом только в 2001 году. Л.Вейс установил теорему Михлина для оператор-функций (без ограничений), заменив ограниченность более сильным условием R-ограниченности. Он получил характеристику максимальной L_p-регулярности в случае, когда пространство является Банаховым пространством класса UMD в терминах R −ограниченности. Использованная теорема об операторнозначных мультипликаторах Фурье является теоремой типа Михлина и ранее известна только для Гильбертовых пространств.

По теореме Планшереля каждое Гильбертово пространство является UMD-пространством и, кроме того, если E является UMD-пространством, то также замкнутые подпространства являются UMD-пространствами, и $L_p(\mu, E)$ является UMD-пространством для всех $\sigma-$ конечномерных пространств с мерой (Ω, μ) и $p \in (1, +\infty)$.

Именно Ж. Бургейн ввел понятие R-ограниченности. В работе Ж.Бургейна это называется Рисс свойством и "R" был интерпретирован как "Случайно ограниченным".

В работе Р.Денка, М. Хибера, Ж.Прюсса разрабатываются эти результаты, и понятия секториальности и R −ограниченности объединяются для определения класса R −секториальных операторов. Доказываются их свойства и характеристики максимальной L_p −регулярности в терминах R −секториальности введённых Л.Вейсом.

После работы Л. Вейса теория дифференциально операторных уравнений нашла широкое применение с использованием понятий R −ограниченности, R −секториальных операторов, операторнозначных мультипликаторов Фурье. Имеются соответствующие результаты для эллиптических дифференциально-операторных уравнений в Гильбертовых пространствах. В некоторых работах рассматриваются локальные краевые задачи для полных эллиптических дифференциально-операторных уравнений в Банаховых пространствах.

Теория максимальной регулярности также применяется к решению уравнений в частных производных, таким как полулинейное уравнение теплопроводности, несжимаемое уравнение Навьер-Стокса и так далее.

Метод решения краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений в абстрактных пространствах исходит из абстрактных соображений в известной книге С.Г. Крейна и из идеи, приведенной в классических работах С. Агмона, А.Дуглиса и Л.Ниренберга. Затем этот метод был разработан и представлен в его окончательной форме в книге С.Якубова, Я.Якубова в рамках Гильбертовых пространств.

Понятие R −ограниченности семейств операторов и его связь с максимальной регулярностью для линейных задач Коши перетерпела существенное развитие в последние годы. Целью этой серии работ является обобщение некоторых важных результатов в этом направлении и демонстрация их силы в приложениях к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа. Далее показывается, как эти результаты могут быть применены к линейным и нелинейным параболическим дифференциалным уравнениям в частных производных. (например; уравнение Навьер-Стокса, задача типа Стефана и т.д.)

Максимальная регулярность типа L_p также является важным инструментом при работе с квазилинейными и неавтономными уравнениями параболического типа.

Для абстрактных эллиптических краевых задач в этом направлении существуют лишь несколько работ. Более того, этот метод можно применить очень широким классам дифференциальных уравнений в частных производных.

Одной из наших целей в этой работе является расширение методов решения абстрактных эллиптических краевых задач в рамках весовых Банаховых пространств. Для этого мы использовали, понятия R −ограниченности и R −секториальных операторов, теорему Л. Вейса об операторнозначных мультипликаторах Фурье и теорему изоморфизма В. Арендта и М.Дуэлли. Кроме того, нами получены максимальная L_p-регулярность для эллиптических сверточно дифференциально-операторных уравнений в Банаховых пространствах UMD. Затем мы приводим соответствующии применения полученных абстрактных результатов к краевым задачам для эллиптических уравнений высокого порядка(с параметром или без него).

Настоящая диссертация посвящена исследованию максимальной регулярности сверточно дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в Банаховозначных весовых пространствах.

Наше основное условие в теоремах даётся в терминах R −ограниченности некоторого множества, которое является прямым обобщением понятие нормированной ограниченности множества в рамках Банаховых пространств. В Гильбертовых пространствах эти два понятия совпадают. Из определения R −ограниченности следует, что каждое R −ограниченное семейство операторов ограничено. С другой стороны, в Гильбертовом пространстве каждое ограниченное множества R −ограничено. Поэтому в Гильбертовом пространстве понятие R −ограниченности эквивалентно ограниченности семейство операторов. Доказательство мультипликативности Фурье соответствующих оператор-функций в весовых пространствах является решающим моментом доказательства основных теорем.

В данной работе мы часто будем использовать операторнозначную версию теоремы мультипликатора Михлина в UMD-пространствах, которая в версии на вещественной прямой принадлежит Л. Вейсу. Мы также будем использовать версии этой теоремы в пространстве R^n.

В этой работе мы рассмотрим также задачу, которая состоит из вырожденного интегро-дифференциального уравнения в весовом Банаховом пространстве.

Такие уравнения появляются в различных прикладных задачах. Монография А.Фавини, А. Яги посвящена этим проблемам и содержит обширные приложения к конкретным проблемам. Книга И. Мельникова и А.Филинкова также рассматривает абстрактные вырожденные уравнения. Эволюционные интегро-дифференциальные уравнения обычно возникают в математической физике в виде законов, относящихся к материалам, для которых важны эффекты памяти, в сочетании с обычными законами сохранения, такими как баланс энергии или баланс импульса.

В случае Гильбертовых пространств решение задач такого типа является достаточным. Это связано с тем, что теорема Планшереля доступна в Гильбертовом пространстве. Когда пространства не является Гильбертовым пространством, для выполнения теоремы Планшереля для Банаховозначных функций требуется, чтобы базовое пространство было изоморфно Гильбертовому пространству.

Для невырожденных интегро-дифференциальных уравнений как в периодическом, так и в непериодическом случаях операторнозначные мультипликаторы Фурье использовались различными авторами для получения корректности в различных масштабах функциональных пространств. Результаты корректности или максимальной регулярности важны тем, что они позволяют решать нелинейные проблемы.

Обьект и предмет исследования. Сверточно дифференциально-операторные уравнения и их максимальная регулярность в весовом пространстве.

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы состоит в решении следующий основных задач:

- Исследование сверточно дифференциально-операторных уравнений (СДОУ) в весовых Lp пространствах;

- Исследование равномерной ограниченности и R-ограниченности оператор-функции создающихся при решении сверточных уравнений;

- Исследование максимальной регулярности вырожденных сверточно эллиптических уравнений;

- Исследование существование и единственность решение вырожденная сверточно дифференциально-операторного уравнения и получения коэрцитивной оценок;

- Исследование коэрцитивностью вырождающихся сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах Бесова;

- Исследование задача Коши для параболических дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах Бесова;

- Исследование квазилинейная сверточно эллиптическая уравнения и бесконечная система вырожденных интегро-дифференциальных уравнений;

- Исследование краевая задача типа Вентцель-Робина для эллиптических сверточно дифференциально-операторных уравнений и краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений;

- Исследование свойства равномерной сепарабельности сверточно дифференциальных уравнений зависящих от параметров.

Методы исследования. В работе использованы методы теории линейных дифференциально-операторных уравнений в Банаховым пространствах, теории функциональных пространств, теории интегральные представления функции и теоремы вложения, теория мультипликаторов Фурье, операторнозначную версию теоремы мультипликатора Михлина, теория позитивных и секториальных операторов, теория свертка в смысле распределений (обобщенной функций) и теории полугруппы операторов.

Основные положения, выносимые на защиту.

Исследование сепарабельные свойства сверточно дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами,

Изучение максимально-регулярные свойства сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах Бесова,

Доказательство коэрцитивность сверточно дифференциально - операторных уравнений в весовых пространствах и их применения,

Изучение некоторые свойства сверточно дифференциально-операторные уравнения с параметрами,

в том числе

- получения решения сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых Банаховых пространствах и доказательство существование и единственности решение;

- доказательства равномерная ограниченность и R - ограниченность оператор-функции полученных при исследовании разрешимости сверточных уравнений;

- нахождения достаточные условия, гарантирующее максимальной регулярности; вырождающихся сверточно дифференциально-операторных уравнений со смешанной производной в весовым пространстве и получено коэрцитивная оценка;

- доказать существование и единственность рещение вырожденную задачу Коши для сверточно параболического уравнение;

- доказать соответствующий оценок резольвента оператора порожденной рассматриваемой задачи;

- получения коэрцитивная оценка для решения квазилинейных эллиптических сверточных дифференциально-операторных уравнений;

- доказателства выполнение коэрцитивных оценок и верность соответствующий резольвентный оценок для бесконечных систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в весовым пространстве;

- нахождения условия для существование решение смешанной задачи с граничными условиями типа Вентцель-Робина для вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений и получения коэрцитивная оценка;

- исследовать максимальной регулярности вырожденных линейных сверточно дифференциально-операторных уравнений с параметрами и получения коэрцитивная оценка для решения сверточно дифференциально-операторного уравнения зависящего от параметра.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- получены представления решения сверточно дифференциально-операторного уравнения в весовым Банаховым пространстве;

- доказано равномерная ограниченность и R- ограниченность оператор-функции полученных при исследовании разрешимости сверточных уравнений;

- впервые доказано существование и единственности решение вырождающихся сверточно дифференциально-операторных уравнений со смешанной производной в весовым пространстве и получено коэрцитивная оценка;

- найдены достаточные условия, гарантирущее сеперабельности линейных задач в весовых Банаховых прстранствах;

- с помощью коэрцитивных оценок доказано существование и единственность рещение вырожденную задачу Коши для сверточно параболического уравнение;

- изучены существование резольвента оператора порожденной рассматриваемой задачи и справедливость соответствующий оценок;

- получена оценка для решения квазилинейных эллиптических сверточных дифференциально-операторных уравнений;

- изучена краевая задача для сверточно дифференциальных уравнений анизотропного типа и получена максимально регулярные свойства в весовых смешанных нормах;

- для бесконечных систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в весовым пространстве доказано выполнение коэрцитивных оценок и верность соответствующий резольвентный оценок;

- найдено условия для существование решение смешанной задачи с граничными условиями типа Вентцель-Робина для вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений и получено оценка;

- описаны максимальной регулярности вырожденных линейных сверточно дифференциально-операторных уравнений с параметрами;

- доказано коэрцитивная оценка для решения сверточно дифференциально-операторного уравнения зависящего от параметра.

Теоремы о коэрцитивной разрешимости для вырождающихся СДОУ дают стимулирующие влияние к исследованию соответствующих конкретных уравнений и краевых задач. При решении конкретных задач используются методы полученные во вторых и третьех главах. Отметим что классические методы здесь не применимо.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Расширено методы решения абстрактных эллиптических краевых задач, в рамках весовых Банаховых пространств. Рассмотрены разные типы вырожденных интегро-дифференциальных и линейных сверточно дифференциально-операторных уравнений – в обоих случаях доказанные результаты представляет несомненный интерес в теории квазилинейных эллиптических сверточно дифференциально-операторных уравнений. Сначала формулируется достаточное условия, подразумевающие максимальную регулярность линейного оператора в абстрактном структуре.

Результаты второй главы могут быть применены к линейным и нелинейным параболическим дифференциальным уравнениям в частных производных (например: уравнение Навьер-Стокса, задача типа Стефана и т.д.). Кроме того полученные результаты применяется к краевым задачам для эллиптических уравнений высокого порядка с параметром или без него.

Равномерная R-ограниченность оператор- функции хорошо используется во время доказательства коэрцитивных оценок для решение сверточно дифференциально-операторных уравнений.

Хорошо известно, что дифференциальные уравнения с параметрами играют важную роль в моделировании физических процессов, поэтому сверточно дифференциально-операторных уравнений с малыми параметрами также имеют существенные применение в разработке теории к задачам математической физики.

Большое количества уравнений в частных производных, возникающих в физике и прикладных науках, таких как течение жидкости через трещиновые породы, термодинамика или в теории уравнения динамическими системами, может быть выражено моделью в виде вырожденного сверточно дифференциально-операторного уравнения. Наиболее типичным примером является случай, когда оператор A есть Лапласиан.

Максимальная регулярность является важным инструментом при работе с квазилинейными и неавтономными уравнения параболического типа. Задача, которая состоит из вырожденного интегро-дифференциального уравнения в весовым Банаховым пространстве обычно возникают в математической физике в виде законов, относящихся к материалом, для которых важны эффекты памяти, в сочетании с обычными законами сохранения, такими как баланс энергии или баланс импульса.

Известно, что многие классы дифференциальных и псевдодифференциальных операторов обладають свойством позитивности и секториальности (аналогично R –позитивности и R –секториальности). Поэтому выбирая конкретные пространства и конкретные операторы действующие в этом пространстве получим максимально регулярные свойства разного класса вырождающихся уравнений свертки в различных прорстранствах и задача Коши для параболических сверточно дифференциально-операторных уравнений или их систем соответственно.

Поскольку в рассмотренных задачах Банахово пространство E и линейный оператор A произвольны, значит выбрав пространство E и операторы A, мы можем получить различные результаты о свойствах регулярности сверточно-эллиптических операторов и свойствах сингулярных возмущений многочисленных классов эллиптических, квазиэллиптических уравнений и их системы, которые имеют место в широком применение разнообразных физических систем.

Апробация и применение. Основные положения и результаты полученные в диссертации докладывались и обсуждались на различных международных и республиканских конференциях и семинарах в том числе:

на конференции, посвященной 80-летию К.Т.Ахмедова (Баку – 1998), на 61 научной конференции молодых ученых (Баку-2000), на научной конференции по теме «Дифференциальные уравнение и их применение» (Баку-2002), на научной конференции, посвященной 70 - летию профессора Г.К.Намазова (Баку-2002), "X İnternational conference on mathematics and mechanics devoted to the 45th anniversary of İnstitute of Mathematics and Mechanics" (Baku-2004), "İnternational conference on mathematics and mechanics devoted to the 50-th anniversary from birthday of member of the correspondent of NASA, professor İ.T.Mamedov" (Baku- 2005), на научной конференции 100 - летию академика А.Гусейнова (Баку-2007), на Республиканской конференции, посвященной 85 - летию Обшенационального Лидера Азердбайжана Гейдара Алиева (Баку-2008), "The 2nd International conference on control and optimization with Industrial Applications" (Baku-2008), «The 3^{d} congress of the world mathematical society of Turkish countries» (Almaty- 2009), на международный конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Баку-2010), "İnternational conference devoted to the 80-

th anniversary of academician F.G.Magsudov" (Baku-2010), "The 4^d congress of the Turkish World Mathematical Society" (Baku-2011), "The international conference devoted to the 100-th anniversary of academician Z.İ.Khalilov" (Baku- 2011), "The international conference devoted to the 100-th anniversary of academician İ.İ.İbrahimov" (Baku-2012), на научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Баку-2012), на Республиканской конференции «Магистрантов, докторантов и молодых исследователей» (Баку-2012), на Республиканской конференции, посвященной 90 - летию Обшенационального Лидера Азердбайжана Гейдара Алиева, (Баку-2013), на международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Баку-2014), "The international conference devoted to the 55-th anniversary of the İnstitute of Mathematics and Mechanics" (Baku-2014), на Республиканской конференции посвященной 91- летию Обшенационального Лидера Азердбайжана Гейдара Алиева (Баку-2014), на научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Баку-2014), на Республиканской конференции «Магистрантов, докторантов и молодых исследователей» (Баку-2014), на Республиканской конференции, посвященной 94 - летию Обшенационального Лидера Азердбайжана Гейдара Алиева, (Баку-2017), на Республиканской научной конференции посвященной 100 - летию член-корр. НАНА проф. К.Т.Ахмедова (Баку-2017), на научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Баку-2018), «The 6^{th} International Conference on "Control and Optimization with industrial applications» (Baku-2018), "3^{rd} International Conference on "Operators in General Morry-type spaces and applications" (Kutahya-2019), на Республиканской конференции, посвященной 96 - летию Обшенационального Лидера Азердбайжана Гейдара Алиева, (Баку-2019), "The International conference devoted to the 60^{th} anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences (ANAS)", 2019, на научных семинарах НИИ Прикладной Математики БГУ (рук. - акад.Ф.А.Алиев), на общеинститутских семинарах (рук.-член-корр. НАНА, проф.

М.Дж.Марданов) Института Математики и Механики НАНА, на научных семинарах отдела «Математический анализ» (рук.-член-корр. НАНА, проф. В.С.Гулиев) Института Математики и Механики НАНА, на семинарах кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнения» БГУ (рук.-проф. Я.Т.Мегралиев), а также на семинарах кафедре «Теории функции» АГПУ, на семинарах кафедре «Высшая математика» Архитектурно Строительного Университета, на научных семинарах департамента естественных наук Станбульского Университета Окан.

Личный вклад автора. Все выводы и полученные результаты принадлежат лично автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президента Азербайджанской Республики -30, тезисы докладов- 26.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена в отделе «Обратные задачи и нелинейные уравнения» Научно-Исследовательского Институте Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета.

Общий обьем диссертации в знаках, с указанием обьема каждого структурного подразделения (в отдельности). Титульная страница состоит из 250 знаков, оглавление из 750 знаков, введение из 80000 знаков, выводы из 2000 знаков, основные содержание диссертации из 368000 знаков (I глава – 96000, II –глава 44000, III глава – 88000, IV глава – 60000, V глава – 80000). Общий объём диссертационной работы состоит из 451000 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор работ примыкающих к теме диссертации и приводится краткое содержание диссертации.

В диссертации глава 1 посвящена исследованию сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых L_p −пространствах. Более того, рассматривается равномерная ограниченность оператор-функции, возникающая при решении этих задач.

Пусть E − банахово пространство, а $\gamma = \gamma(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - положительно измеримая весовая функция на измеримом подмножестве $\Omega \in R^n$.
Пусть $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел и

$$S_\varphi = \{\lambda\,;\ \lambda \in \mathbb{C}\,, |arg\lambda| \leq \varphi\} \ \cup \{0\}, 0 \leq \varphi < \pi.$$

Замкнутая линейная операторная функция $A = A(x), x \in \mathbb{R}$ называется равномерно φ - позитивной в Банаховом пространстве E, если $D\,(A\,(x))$ плотно в E и не зависит от x и существует положительная постоянная M, такая что

$$\|(A(x) + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}$$

для любых $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in S_\varphi, \varphi \in [0,\pi)$, где I − тождественный оператор в E, а $\mathcal{L}(E)$ - пространство всех ограниченных линейных операторов в E.

Предположим, что E_1 и E_2 - два Банаховых пространства. Функция $\Psi \in L_\infty(R^n; \mathcal{L}(E_1, E_2))$ называется мультипликатором от $L_{p,\gamma}(R^n; E_1)$ на $L_{p,\gamma}(R^n; E_2)$, $p \in (1, \infty)$, если отображение $u \to Tu = F^{-1}\Psi(\xi)Fu\,, u \in S(R^n; E_1)$ плотно определено и продолжается до ограниченного линейного оператора

$$T: L_{p,\gamma}(R^n; E_1) \to L_{p,\gamma}(R^n; E_2).$$

Пространство мультипликаторов Фурье от $L_{p,\gamma}(R^n; E_1)$ на $L_{p,\gamma}(R^n; E_2)$ будет обозначаться через $M_{p,\gamma}^{p,\gamma}(E_1, E_2)$. Для $E_1 = E_2$

обозначим $M_{p,\gamma}^{p,\gamma}(E_1, E_2)$ через $M_{p,\gamma}^{p,\gamma}(E)$. Пусть *M(h)* обозначает множество некоторых параметров.

Пусть $T_h = \{\Psi_h \in M_{p,\gamma}^{p,\gamma}(E_1, E_2), h \in M(h)\}$ – мультипликаторы в $M_{p,\gamma}^{p,\gamma}(E_1, E_2)$. Мы говорим, что T_h - это набор равномерно ограниченных мультипликаторов (UBM), если существует положительная постоянная M, не зависящая от $h \in M(h)$, такая, что

$$\|F^{-1}\Psi_h F u\|_{L_{p,\gamma}(R^n;\, E_2)} \le M\|u\|_{L_{p,\gamma}(R^n;\, E_1)}$$

для всех $h \in M(h))$ и $u \in S(R^n, E_1)$.

Вес $\gamma(x)$ будем считать удовлетворяющим условию A_p, то есть $\gamma(x) \in A_p,\ 1 < p < \infty$, если существует положительная постоянная С такая, что

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \gamma(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \gamma^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} \le C$$

для всех компактов $Q \subset R^n$.

Банахово пространство E называется UMD-пространством, если оператор Гильберта

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}dy$$

ограничен в $L_p(\mathbb{R}, E), p \in (1, \infty)$. Пространства UMD включают, например, пространства L_p, l_p и пространства Лоренца $L_{pq}, p, q \in (1, \infty)$.

Множество $K \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ называется R –ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $T_1, T_2, \dots, T_m \in K$ и $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\int\limits_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j\,(y)T_j u_j\right\|_{E_2} dy \le C\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(y)u_j\right\|_{E_1} dy,$$

где $\{r_j\}$ - последовательность независимых симметричных $\{-1,\ 1\}$-значных случайных величин на [0, 1] , а $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел. Наименьшее C, для которого справедлива вышеуказанная оценка, называется R-границей набора K и обозначается через $R(K)$.

Банахово пространство E называется пространством, удовлетворяющим условию весового мультипликатора относительно p и весовой функцией γ, если для любого $\Psi \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ R −ограниченность множества

$$\{|\xi|^k D^k \Psi(\xi) : \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, k = 0,1\}$$

подразумевает, что Ψ является мультипликатором Фурье от $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E)$ на $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E)$, т. е. $\Psi \in M_{p,\gamma}^{p,\gamma}(E)$ для любого $p \in (1, \infty)$.

Отметим, что в Гильбертовых пространствах каждое ограниченное по норме множество R −ограничено. Следовательно, в Гильбертовых пространствах все позитивные операторы R-позитивны.

В первом разделе первой главы рассматриваются сверточно эллиптические дифференциально-операторные уравнения в весовых L_p − пространствах. Исследуются свойства сепарабельности сверточно дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в Банаховозначном весовом L_p −классе. Получается коэрцитивная оценка резольвенты соответствующего оператора.

В последние годы максимальная регулярность для дифференциально-операторных уравнений, особенно для параболического и эллиптического типа, широко изучалась. Более того, сверточно-дифференциальные уравнения были рассмотрены например в работах А.Бенедека, А.Калдерона, В.Б.Шахмурова и др. Уравнения свертки в векторных пространствах были изучены в работах Х.Аманна, М.Гирарди, Л.Вейса, Ч.Лизама, В.Б.Шахмурова, М.Варма, Ф.Зиммермана и т.д. Однако сверточно дифференциально-операторные уравнения относительно мало исследованы.

Основная цель первого раздела установить свойства максимальной регулярности следующего сверточно дифференциально-операторного уравнения в E −значных весовых L_p −пространствах

$$\sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^k u}{dx^k} + A * u = f(x), \qquad (0.1)$$

где $A = A(x)$, вообще говоря, линейный неограниченный оператор в Банаховом пространстве E, $a_k = a_k(x)$ - комплекснозначные функции на $\mathbb{R} = (-\infty;\ +\infty)$.

Применяя преобразование Фурье и известное неравенство Хаусдорф-Юнга, используя резольвентные свойства позитивных операторов, доказывается следующая лемма.

Лемма 0.1. Пусть $a_k \in L_1(\mathbb{R})$, $k = 0,1,2,\dots,l$, и $\hat{A}(\xi)$ равномерно φ −позитивное в $E, \varphi \in [0,\pi)$. Кроме того, предположим, что $L(\xi) = \sum_{k=0}^{l} \hat{a}_k(\xi)(i\xi)^k \in S_{\varphi_1}$, $\varphi_1 < \pi - \varphi$ и существует положительная постоянная $C > 0$, такая что

$$|L(\xi)| \geq C|\xi|^l \sum_{k=0}^{l} |\hat{a}_k(\xi)|,\ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \qquad (0.2)$$

Тогда оператор-функции -

$$\lambda\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1},\ \hat{A}(\xi)\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1},$$

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \hat{a}_k(\xi)(i\xi)^k \left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1}$$

полученные при решении соответствующих задач равномерно ограничены.

Лемма 0.2. Пусть выполняется (0.2) и $\hat{A}(\xi)$ - равномерно $R -$ позитивен в E. Тогда следующие множества

$$\left\{\lambda\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1};\ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\},$$

$$\left\{\hat{A}(\xi)\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1};\ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\},$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \hat{a}_k(\xi)(i\xi)^k\, \hat{A}(\xi)\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1};\ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$$

равномерно R −ограничены.

Далее используя ограниченность оператор-функции, для каждой функции f принадлежащей весовым пространствам L_p, доказывается равномерная коэрцитивная оценка

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)} + \|A * u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)} + |\lambda| \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)} \leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)}$$

для $\lambda \in S_\varphi,\ \varphi \in [0, \pi)$.

Второй раздел первой главы посвящён изучению ограниченности операторнозначных функций (оператор-функции).

Пусть $\hat{a}_k \in C^{(m)}(\mathbb{R}),\ \hat{A}^{(m)}(\xi)\hat{A}^{-1}(\xi) \in C^{(m)}\big(\mathbb{R}; \mathcal{L}(E)\big)$,

$$\xi_0 \in \mathbb{R}$$

$$\left|\hat{a}_k^{(m)}(\xi)\right| < M_1, \qquad |\xi^m \hat{a}_k(\xi)| \leq M_2, \qquad \left\|\hat{A}^{(m)}(\xi)\hat{A}^{-1}(\xi)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M_3,\ \left\|\xi^m \hat{A}^{(m)}(\xi)\hat{A}^{-1}(\xi)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M_4, \tag{0.3}$$

где $m = 1,2, \dots$ и $M_i, i = 1,2,3,4$ положительные постоянные.

Для простоты обозначим $H(\xi, \lambda) = \left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1}$, аналогично имеем

$$G_1(\xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \hat{a}_k(\xi)(i\xi)^k H(\xi, \lambda),\ \ G_2(\xi, \lambda) = \hat{A}(\xi, \lambda)H(\xi, \lambda),$$

$$G_3(\xi, \lambda) = \lambda H(\xi, \lambda).$$

При данных условиях доказывается, что оператор-функции $G_i{}'(\xi, \lambda) = \frac{d}{d\xi} G_i(\xi, \lambda)$ равномерно ограничены, $i = 1,2,3$.

Обобщая полученные результаты доказываем следующее предложение:

Предложение. Если выполняются выше данные условия, тогда оператор-функции $G_i^{(m)}(\xi,\lambda)$ где, $i=1,2,3,\ m=0,1,2,$ равномерно ограничены и выполняется неравенство

$$|\xi|^m \left\| G_i^{(m)}(\xi,\lambda) \right\|_{\mathcal{L}(E)} \le C.$$

В третьем разделе первой главы доказывается $R-$ограниченность оператор-функции, полученная при исследовании разрешимости, и сепарабельные свойства сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых $L_p -$ пространствах.

Лемма 0.3. Пусть выполняется (0.2) и (0.3). Допустим $\hat{A}(\xi)$ равномерно $R-$позитивен в E и существуют положительные константы C_1и C_2 такие, что

$$R\left(\left\{\xi\ \frac{d}{d\xi}\hat{A}(\xi)\big(\hat{A}(\xi)+\xi\big)^{-1};\ \xi\in S_\varphi\right\}\right)\le C_1$$

$$\left|\xi\ \frac{d}{d\xi}\hat{a}_k(\xi)\right|\le C_2.$$

Если Банаховые пространства $E-$удовлетворяют условию весовых мультипликаторов, тогда при $\lambda\in S_\varphi, \varphi\in[0,\pi)$ доказывается, что следующие множества

$$\left\{\xi\ \frac{d}{d\xi}G_i(\xi,\lambda);\ \xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$$

равномерно $R-$ограничены т.е.,

$$\sup_\lambda R\left(\xi\{{G_i}'(\xi,\lambda)\}\right)\le C_i,\qquad i=1,2,3.$$

Отсюда получается, что оператор-функции $G_i(\xi,\lambda)$ являются равномерно ограниченным набором (семейства) мультипликаторов в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)$. Наконец, имеем, что, если $\hat{A}(\xi)$ равномерно позитивен для $\varphi\in[0,\pi)$, то оператор L является генератором аналитической полугруппы в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)$.

В третьем разделе главы 1 исследуются равномерно $R-$позитивность и $R-$секториальность операторов порожденной задачи

$$D(L) = W_{p,\gamma}^{l}(R^n; E(A), E),$$

$$Lu = \sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^k u}{dx^k} + A * u = f. \tag{0.4}$$

В этом разделе также доказано, что для всех $\lambda \in S_\varphi, |\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ существует резольвента оператора L и имеет место следующая оценка

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \left[\frac{d^k}{dx^k}(L+\lambda)^{-1}\right] \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \|A * (L+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$+ \|\lambda(L+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C.$$

Это означает, что оператор L позитивен в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E)$. Для того, чтобы показать R −позитивность оператора L, мы должны доказать R −ограниченность множества $\{\lambda(L+\lambda)^{-1};\ \lambda \in S_\varphi\}$.

Известно, что

$$\lambda(L+\lambda)^{-1} = F^{-1}\lambda\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1}\hat{f}, \qquad f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E).$$

Аналогичным образом доказывается, что оператор функция $\lambda\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1}$, зависит от переменной λ, параметра ξ и равномерно ограниченный мультипликатор в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E)$.Тогда по определению R −ограниченности имеем

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(y)\, \lambda_j (L+\lambda_j)^{-1} f_j \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)} dy$$
$$\leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(y)\, f_j \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R};E)} dy,$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in S_\varphi,\ f_1, f_2, \dots, f_m \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E)$.

Таким же образом доказывается R −секториальность операторов порожденной задачи (0.4), если оператор L секториален в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}; E)$.

$R-$секториальность и $R-$позитивность операторов широко используется при исследовании максимально регулярных вопросов линейных и нелинейных сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах и для UMD пространств. Методом исследования этих вопросов является теория мультипликаторов Фурье, представления решения, теория позитивных и секториальных операторов и теория свертки в смысле распределений и так далее.

Заметим, что эти результаты применяются для получения максимально- регулярных свойств задачи Коши для параболического типа сверточно-дифференциально-операторных уравнений.

В четвертом разделе первой главы рассматриваются вырождающиеся сверточно дифференциально-операторные уравнения (СДОУ)

$$\sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^{[k]}u}{dx^{[k]}} + A * u + \lambda u = f(x), \tag{0.5}$$

где $\frac{d^{[k]}u}{dx^{[k]}} = \left(\gamma(x)\frac{d}{dx}\right)^k u(x), \gamma(x) -$положительная измеримая функция в $\mathbb{R}, A -$линейный оператор в Банаховом пространстве E. Свертки $a_k * \frac{d^{[k]}u}{dx^{[k]}}$ и $A * u$ определяются в смысле распределения.

Отметим, что в связи с исследованием краевых задач для вырождающихся уравнений эллиптического типа создавалась теория весовых пространств функции. Кстати, общая теория вложения весовых пространств была создана Л.Д.Кудрявцевым, дальнейшему развитию которой посвящены работы разных авторов.

В последнее время вырожденные уравнения привлекли внимание многих авторов. Были рассмотрены как уравнения первого, так и второго порядка. Вырожденное уравнение первого порядка вида

$$(Mu)'(t) = Au(t) + f(t), 0 \le t \le 2\pi$$

с периодическим граничным условием $Mu(0) = Mu(2\pi)$, было изучено С.Лизамой и Р.Понсе при подходящих предположениях. Они дали необходимые и достаточные условия для обеспечения корректности данной задачи в пространствах Лебега-Бохнера $L_p(0,2\pi; X)$, в пространствах Бесова $B_{p,q}^s(0,2\pi; X)$ и в пространствах Трибеля-Лизоркина $F_{p,q}^s(0,2\pi; X)$.

Недавно С.Бу изучил вырожденное уравнение второго порядка с периодическими граничными условиями и получил необходимые и достаточные условия для обеспечения корректности рассматриваемой задачи в соответствующих пространствах.

Максимальную регулярность решений для следующего дифференциального уравнения вырожденного (также называемого Соболевского) типа

$$D^\alpha\big(Mu(t)\big) = Au(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где A и $M -$два замкнутых линейных оператора, определенных на Банаховом пространстве X с областями $D(A)$ и $D(M)$ соответственно и $D(A) \cap D(M) \neq \{0\}$, функция $f: \mathbb{R} \to X$ принадлежит некоторому векторнозначному пространству функций $S(\mathbb{R}, X)$, детально изучено в монографиях А.Фавини и А.Яги.

Большое количество уравнений в частных производных, возникающих в физике и в прикладных науках, таких как течение жидкости через трещиноватые породы, в термодинамике или в теории управления динамическими системами, может быть выражено моделью в этом виде. Наиболее типичным примером является случай, когда $A =\triangle$ $-$это Лапласиан, а $M = m -$ оператор мултипликатор на функцию $m(x)$. Тогда вырожденное дифференциальное уравнение (в случае $\alpha = 1$) описывает инфильтрацию воды в ненасыщенных пористых средах, в которых может происходить насыщение.

Для того, чтобы показать, существование единственного решения уравнения (0.5) и имеет место равномерная коэрцитивная оценка

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \frac{d^{[k]}u}{dx^{[k]}} \right\|_{L_p(\mathbb{R};E)} + \|A * u\|_{L_p(\mathbb{R};E)} + |\lambda| \|u\|_{L_p(\mathbb{R};E)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R};E)},$$

используем замену $y = \int_0^x \gamma^{-1}(z)dz$. Тогда в силу равномерной коэрцитивной оценки получаем утверждение для невырожденной задачи.

Глава 2 посвящена исследованию сепарабельных свойств сверточно дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

В теории сверточно дифференциальных уравнений операторно-значные мультипликаторы Фурье представляют особый интерес. Дифференциальные, дифференциально-операторные и сверточно дифференциально-операторные уравнения исследованы в работах разных авторов. В работе Ж.Прюсса, В.Б.Шахмурова, Ж.Голдштейна были исследованы максимально-регулярные свойства сверточно дифференциально-операторных уравнений эллиптического типа с линейными операторными коэффициентами. Свойства регулярности вырожденных обычных сверточно дифференциально-операторных уравнений изучены, например, в работах А.Дезина, Ч.Лизама и др.

В первом разделе второй главы рассматривается существование и единственность решения сверточно дифференциально-операторных уравнений со смешанной производной и нахождение достаточных условий, гарантирующих сепарабельность линейных задач в весовых пространствах L_p.

Сначала исследуются вопросы коэрцитивной разрешимости сверточно дифференциально-операторных уравнений (СДОУ) следующего вида

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + (A+\lambda) * u = f(x), \tag{0.6}$$

где $A = A(x)$ есть линейный оператор в E, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ являются комплексными функциями, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\lambda -$ комплексный параметр.

Функция $u \in W_{p,\gamma}^l(R^n; E(A), E)$, удовлетворяющие уравнению (0.6) почти всюду на R^n называются решениями уравнения (0.6). СДОУ (0.6) называется равномерно сепарабельным в $L_{p,\gamma}(R^n; E)$, если уравнение (0.6) имеет единственное решение u для $f \in L_{p,\gamma}(R^n; E)$ и следующая коэрцитивная оценка справедлива

$$\sum_{|\alpha|\le l} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E)} + \|A * u\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E)} \le C\|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E)},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f.

Для изложения этого подзаголовка введем некоторые обозначения и условия. Пусть

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|\le l} \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha,$$

$$|L(\xi)| \ge C\sum_{k=1}^{n} \left|\hat{a}_{\alpha(l,k)}\right| |\xi_k|^l, \alpha(l,k) = (0,0,\dots,l,0,0,\dots,0),$$

т. е. $\alpha_i = 0, i \ne k, \alpha_k = l$.

Сначала доказывается, что при этих условиях и при $\lambda \in S_{\varphi_2}, \varphi_2 \in [0,\pi),\ \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$ оператор-функции

$\sigma_0(\xi,\lambda) = \lambda D(\xi,\lambda)$, $\sigma_1(\xi,\lambda) = \hat{A}(\xi) D(\xi,\lambda)$ и

$$\sigma_2(\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha D(\xi,\lambda),$$

где $D(\xi,\lambda) = \left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1}$

равномерно ограничены , т.е.,

$$\|\sigma_i(\xi,\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C, \qquad i = 0,1,2.$$

Пусть далее

$$\hat{a}_\alpha \in C^{(n)}(R^n), \qquad \left[D^\beta \hat{A}(\xi)\right]\hat{A}^{-1}(\xi_0) \in C\left(R^n; \mathcal{L}(E)\right),$$

и $|\xi|^{|\beta|}\left|D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)\right| \leq C_1,\ \beta_k \in \{0,1\}, \xi, \xi_0 \in R^n \backslash \{0\}, 0 \leq |\beta| \leq n,$

$|\xi|^{|\beta|}\left\|\left[D^\beta \hat{A}(\xi)\right]\hat{A}^{-1}(\xi_0)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C_2.$ Доказывается, что оператор функции $|\xi|^{|\beta|}D_\xi^\beta \sigma_i(\xi,\lambda),\ i = 0,1,2$ равномерно ограничены.

Теорема 0.1. Пусть $E -$ Банахово пространство, удовлетворяющее условиям равномерного мультипликатора относительно весовой функции $\gamma \in A_p$ и $p \in (1,\infty), \hat{A}$ - равномерно R –секториальный оператор в $E, \varphi \in [0,\pi), \lambda \in S_{\varphi_2}, 0 \leq \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$. Тогда задача (0.6) имеет единственное решение u и имеет место равномерная коэрцитивная оценка

$$\sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X + \|A * u\|_X + |\lambda|\|u\|_X \leq C\|f\|_X,$$

для всех $f \in X = L_{p,\gamma}(R^n; E)$.

Основной целью второго раздела является изучение следующих вырождающихся эллиптических сверточно дифференциально-операторных уравнений (СДОУ)

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^{[\alpha]}u + (A + \lambda) * u = f(x) \qquad (0.7)$$

в E –значном весовом пространстве $L_{p,\gamma}$, где E –Банахово пространство, $A = A(x)$ есть линейный оператор в $E, a_k = a_k(x)$ - комплексные функции $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, a_k - неотрицательные целые числа λ - является комплексным параметром, $\gamma = \gamma(x)$ положительная измеримая функция на $\Omega \subset R^n$,

$$D^{[\alpha]} = D_{x_1}^{[\alpha_1]} D_{x_2}^{[\alpha_2]} \dots D_{x_n}^{[\alpha_n]},\ D_{x_i}^{[\alpha_i]} = \left(\gamma(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}.$$

Одной из главных особенностей настоящей работы является то, что уравнения в свертках вырождаются в некоторых точках $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.Так как такие уравнение возникают в приложениях и очень важно доказать существование и единственность решения.

С использованием формулы представления для решения и операторнозначных мультипликаторов Фурье в пространствах $L_{p,\gamma}(R^n; E)$ доказывается, что существует единственное решение данной задачи. Для решения вырождающихся СДОУ используем замену

$$y_k = \int_0^{x_k} \gamma^{-1}(z)dz, \quad k = \overline{1,n}.$$

Известно, что с помощью этой замены пространства $L_p(R^n; E)$ и $W_p^{[l]}(R^n; E(A), E)$ отображаются изоморфно в весовых пространствах $L_{p,\tilde{\gamma}}(R^n; E)$ и $W_{p,\tilde{\gamma}}^{[l]}(R^n; E(A), E)$ соответственно, где

$$\tilde{\gamma}(y) = \gamma(x(y)) = \gamma(x_1(y_1), x_2(y), \ldots, x_n(y_n)).$$

Аналогично при этой подстановке $D^{[\alpha]}u$ переходит в $D^{\alpha}u$. Кроме того, при этой замене вырожденная задача преобразуется в невырожденную задачу, рассматриваемую в весовом пространстве $L_{p,\tilde{\gamma}}(R^n; E)$, где $a_\alpha = a_\alpha\big(\tilde{\gamma}(y)\big)$, $u = u\big(\tilde{\gamma}(y)\big), A = A\big(\tilde{\gamma}(y)\big)$, $f = f(\tilde{\gamma}(y))$.

Тогда в силу Теоремы 0.1, доказанной в первом подзаголовке второй главы, получаем утверждение.
В третьем разделе главы 2 рассмотрены вырожденные сверточно параболические уравнения. Аналогично доказывается соответствующая коэрцитивная оценка.

С этой целью исследуется вырожденная задача Коши для СДОУ. Сначала рассмотрим невырожденную задачу Коши для сверточно параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \le l} a_\alpha * D^\alpha u + A * u + du = f(t, x),$$

$$u(0, x) = 0, t \in \mathbb{R}_+, x \in R^n \qquad (0.8)$$

где $d > 0$, a_α −комплекснозначные функции, A − линейный оператор в Банаховом пространстве E. Для $R_+^{n+1} = R^n \times \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{p} = (p, p_1), Z = L_{p,\gamma}(R_+^{n+1}; E)$ будет обозначать пространство всех $\mathbf{p}$ −суммируемых E −значных функции со смешанный нормой т.е., пространство всех измеримых E −значных функции f определенных на R_+^{n+1}, для которых

$$\|f\|_Z = \left(\int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} \|f(x,t)\|_E^p \gamma(x) dx \right)^{\frac{p_1}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Пусть E_0 и E два Банаховых пространства, E_0непрерывно и плотно вложено в E. $Z_0 = W_{\boldsymbol{p},\gamma}^{1,l}(R_+^{n+1}; E_0, E)$ обозначает пространство всех функций $u \in Z$ с нормой

$$\|u\|_{Z_0} = \|u\|_{Z(E_0)} + \|D_t u\|_Z + \sum_{k=1}^{n} \left\|D_k^l u\right\|_Z ,$$

где l − целое число, $D_t u, D_k^l u \in Z$ и $Z(E_0) = L_{\boldsymbol{p},\gamma}(R_+^{n+1}; E_0,)$

Теорема 0.2. Предположим, что для $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ выполнены все условия теоремы 0.1. Тогда уравнение (0.8) имеет единственное решение $u \in W_{\mathbf{p},\gamma}^{1,[l]}(R_+^{n+1}; E(A), E)$ и при достаточно большом d справедлива следующая равномерная коэрцитивная оценка

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_Z + \sum_{|\alpha|\le l} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_Z + \|A * u\|_Z \le C\|f\|_Z.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^{[\alpha]} u + A * u = f(t,x),$$

$$u(0,x) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+, x \in R^n \tag{0.9}$$

в E − значных смешанных пространствах $L_{\boldsymbol{p}}$. Известно, что с помощью замены

$$y_k = \int_0^{x_k} \gamma^{-1}(z)dz, \quad k = \overline{1,n}. \tag{0.10}$$

вырожденная задача (0.9), рассматриваемая в $L_p(R^n;E)$ преобразуется в невырожденную задачу (0.8) в $L_{\boldsymbol{p},\gamma}(R^n;E)$. Тогда в силу предыдущих результатов и из теоремы 0.1, получаем следующий результат.

Теорема 0.3. Предположим, что выполнены все условия теоремы 0.2. и замена (0.10), тогда задача (0.9) имеет единственное решение $u(t,x)$ для всех $u \in L_{\boldsymbol{p}}(R_+^{n+1};E)$ и справедлива равномерная коэрцитивная оценка

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(R_+^{n+1};E)} + \sum_{|\alpha|\le l} \left\|a_\alpha * D^{[\alpha]}u\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(R_+^{n+1};E)} + \|A*u\|_{L_{\boldsymbol{p}}(R_+^{n+1};E)} \le C\|f\|_{L_{\boldsymbol{p}}(R_+^{n+1};E)}$$

Глава 3 посвящена исследованию максимально регулярных свойств сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах Бесова.

В серии недавних публикаций были изучены теоремы операторнозначных мультипликаторов Фурье о различных векторнозначных функциональных пространствах. Они необходимы для установления существования и единственности, а также регулярности для дифференциальных уравнений в Банаховых пространствах и, следовательно, для дифференциальных уравнений в частных производных.

Пространства Бесова образуют один класс функциональных пространств, которые представляют особый интерес. Их можно определить в виде $B_{p,q}^s$ с помощью трёх индексов $s \in \mathbb{R}, 1 \le p,q \le \infty$. Относительно сложное определение оправдано очень полезными приложениями к дифференциальным уравнениям. Отметим также, что пространство $B^s_{\infty,\infty}$ есть не что иное, как знакомое пространство всех непрерывных по Гельдеру функций индекса s, если $s \in (0,1)$.

Именно Х.Аманн открыл еще одно благоприятное свойство векторнозначных пространств Бесова на вещественной прямой: определенная форма (наиболее эффективно) теоремы о мультипликаторах Михлина справедлива для произвольных Банаховых пространств.

Фактически Х.Аманн обнаружил, что если m удовлетворяет условию

$$(m \in C^k(\mathbb{R}\backslash\{0\};\ \mathcal{L}(X)),\ \sup_{t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}} \left\| t^l m^{(l)}(t) \right\| < \infty, 0 \leq l \leq k$$

с $k = 2$, то m является мультипликатором для пространств Бесова и, в частности, для пространства $C^\theta(\mathbb{R}; X), 0 < \theta < 1$.

Для пространств Бохнера $L_p(R^n, X)$ необходимы дополнительные гипотезы, в частности, расширение возможно только тогда, когда базовое Банахово пространство X обладает свойством UMD, $1 < p < \infty$, а множество в $\left\{\left(1 + |t|\right)^{|\alpha|} D^\alpha m(t); t \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq l\right)\right\} R -$ ограничено.

В резком контрасте с этими результатами для $L_p(R^n, X)$, Х. Аманн и Л. Вейс независимо друг от друга обнаружили, что для пространств Бесова $B^s_{p,q}(R^n, X)$ дополнительные ограничения на X и m не нужны и все индексы $s \in \mathbb{R}$ и $p, q \in [1, \infty]$ допускаются.

В первом разделе третьей главы рассматриваются весовые векторно-значные пространства Бесова и B −сепарабельность рассмотренных уравнений. Сначала вводятся три эквивалентные определения пространства Бесова.

Векторно-значные пространства Бесова изучены многими авторами. В классическом случае пространство Бесова и его свойства в широком смысле исследованы в книгах Х.Трибелья. С помощью интерполяционных технологий пространства Бесова изучены в статьях Х.Аманна, Й.Берга и И.Лёвстрема.

Известно, что максимально-регулярные свойства дифференциально-операторных уравнений были изучены в разных работах. Основной целью настоящего подзаголовка является установление максимальной регулярности вырожденного сверточно дифференциально -операторного уравнения (СДОУ)

$$Lu = \sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^{[k]}u}{dx^{[k]}} + A * u + \lambda u = f(x) \qquad (0.11)$$

в E −значных весовых пространствах Бесова. $A = A(x)$ есть линейный оператор в E, $a_k = a_k(x)$ являются комплексными функциями, λ есть комплексный параметр,

$$u^{[k]} = \left(\gamma(x)\frac{d}{dx}\right)^k u$$

где $\gamma(x)$ является измеримой положительной функцией в $(-\infty;\ +\infty\ )$.

Сначала определяются мультипликаторы Фурье от пространства Бесова $B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}; X)$ в пространство Бесова $B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}; Y)$.

Используя соответствующие условия, как в предыдущих главах доказываем равномерную ограниченность оператор-функции, полученную во время решения данного невырожденного уравнения. Аналогично получается, что полученные оператор-функции являются равномерно-ограниченными мультипликаторами в пространствах Бесова$-B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}; E)$.

Легко доказывается, что для невырожденного уравнения

$$\sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^k u}{dx^k} + A * u + \lambda u = f(x) \qquad (0.12)$$

имеет единственное решение $u \in B_{p,q,\gamma}^{l,s}(\mathbb{R}; E(A), E)$ и следующая равномерная коэрцитивная оценка верно для $f \in B_{p,q,\gamma}^{l,s}(\mathbb{R}; E)$, $p, q \in [1; \infty)$,

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_X + \|A * u\|_X + |\lambda| \|u\|_X \leq C \|f\|_X. \quad (0.13)$$

Если Q оператор порожденной задачи

$$D(Q) = B^{l,s}_{p,q,\gamma}(\mathbb{R}; E(A), E),$$

$$Qu = \sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^k u}{dx^k} + A * u = f \quad (0.14)$$

тогда для всех $\lambda \in S_\varphi$ существует резольвента оператора Q и справедлива следующая оценка

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \left[\frac{d^k}{dx^k} (Q + \lambda)^{-1} \right] \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \|A * (Q + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$+ \|\lambda (Q + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad \text{где } X = B^s_{p,q,\gamma}(\mathbb{R}; E).$$

В частности показывается, что сверточно дифференциальный-оператор $Q + a, a > 0,$ порожденный уравнением (0.14) является генератором аналитической полугруппы .

Для решения вырожденного уравнения (0.11) рассмотрим замену (0.10).

Ясно видно, что при этой замене пространства $B^s_{p,q}(\mathbb{R}; E)$, $B^{[l],s}_{p,q}(\mathbb{R}; E(A), E)$ изоморфно отображается на весовые пространства $B^s_{p,q,\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}; E)$ и $B^{l,s}_{p,q,\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}; E(A), E)$, соответственно, где $\tilde{\gamma}(y) = \gamma(x(y))$. Кроме того при этой замене вырожденная задача (0.11) рассмотренная в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}; E)$ преобразуется в невырожденную задачу (0.12) рассматриваемому в весовом пространстве $B^s_{p,q,\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}; E)$.

Аналогично доказывается соответствующая коэрцитивная оценка для вырожденного уравнения (0.11) и оценка для резольвенты оператора вырожденного случая.

В этом разделе рассматривается, также, задача Коши для соответствующего параболического дифференциально-операторного уравнения свертки в $E -$ значном пространстве Бесова. Используя свойства регулярности уровнения (0.11), получаем корректность задачи Коши. В этом разделе рассматриваются также конкретные примеры, т.е., конкретные вырожденные СДОУ с весовыми функциями разного типа.

Во втором разделе третьей главы рассматриваются задачи более общего типа, т.е., СДОУ с смешанной производной в весовых пространствах Бесова.

В работах В.Б.Шахмурова была исследована регулярность невырожденных СДОУ в L_p пространствах. В отличие от них, основной целью настоящего раздела является получение сепарабельных свойств следующего эллиптического вырожденного СДОУ

$$\sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha * D^{[\alpha]}u + A * u + \lambda u = f, \qquad (0.15)$$

и максимально-регулярные свойства задачи Коши для следующего параболического СДОУ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha * D^{[\alpha]}u + A * u = f(t,x), \ \ u(0,x) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in R^n \qquad (0.16)$$

в E −значном весовом пространстве Бесова .

Сначала рассмотрим невырожденное эллиптическое СДОУ

$$\sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha * D^{a}u + A * u + \lambda u = f. \qquad (0.17)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (0.17), получаем

$$u(x) = F^{-1}\left[\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)\right]^{-1}\hat{f}\,, \ \text{где}\, L(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq l} \hat{a}_\alpha\,(\xi)(i\xi)^\alpha.$$

Для того чтобы доказать основную коэрцитивную оценку в невырожденном случае, достаточно показать, что оператор-функции, полученные во время решения данных задач равномерно ограниченные мультипликаторы в пространстве $B^s_{p,q,\gamma}(R^n;E)$.

Ясно, что при подстановке $z_k = \int_0^{x_k} \tilde{\gamma}_k{}^{-1}(y)dy$ пространства $B_{p,q}^{s}(R^n; E)$ и $B_{p,q}^{[l],s}(R^n; E(A), E)$ изоморфно отображаются на весовые пространства $B_{p,q,\tilde{\gamma}}^{s}(R^n; E)$ и $B_{p,q,\tilde{\gamma}}^{l,s}(R^n; E(A), E)$ соответственно, где $\gamma = \prod_{k=1}^{n} \tilde{\gamma}_k\big(x_k(z_k)\big)$. Кроме того, при этой подстановке задача (0.15) преобразуется к задаче (0.17).

С помощью теоремы мультипликаторов Фурье в весовых Банахово значных пространствах Бесова получаем, что для всех $f \in B_{p,q,\gamma}^{s}(R^n; E)$ существует единственное решение $u \in B_{p,q}^{[l],s}(R^n; E(A), E)$ задачи (0.15) и справедлива равномерная оценка

$$\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left\| \, a_\alpha * D^{[\alpha]} u \right\|_X + \|A * u\|_X + |\lambda| \|u\|_X \le c\|f\|_X$$

при достаточно больших $\lambda \in S_\varphi$ где $X = B_{p,q,\gamma}^{s}(R^n; E)$.

Пусть H оператор, порожденный задачей (0.15),

$$D(H) = B_{p,q,}^{[l],s}(R^n; E(A), E), \;\; Hu = \sum_{|\alpha|\le l} \, a_\alpha * D^{[\alpha]} u + A * u.$$

В этом случае, показывается, что для всех $\lambda \in S_\varphi$ существуют резольвенты оператора H и имеет оценка

$$\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left\| \, a_\alpha * D^{[\alpha]}(H+\lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \|A * (H+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$+ \|\lambda (H+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C.$$

В третьем разделе третьей главы рассматривается задача Коши вырожденного параболического СДОУ (0.16) в весовом пространстве Бесова.

Ясно, что $B_{\boldsymbol{p},q,\gamma}^{l,1,s}(R_+^{n+1}; E(A), E) = B_{p,q}^{1,s}(\mathbb{R}_+; D(H), X)$ где $R_+^{n+1} = R^n \times \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{p} = (p, p_1), X = B_{p,q,\gamma}^{s}(R^n; E)$ означает пространство всех $\boldsymbol{p}$ −суммируемых E −значных функций со смешанной нормой.

Легко видно, что задачу невырожденного случая, т.е. задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha * D^\alpha u + A * u = f(t,x)\,, \quad u(0,x) = 0 \qquad (0.18)$$

можно представить в виде

$$\frac{du(t)}{dt} + Hu(t) = f(t)\,, u(0) = 0, t \in \mathbb{R}_+.$$

Ввиду резольвентных свойств, позитивности оператора H и предыдущих результатов получаем, что последнее уравнение имеет единственное решение $u \in B^{1,s}_{p,q}(\mathbb{R}_+; D(H), X)$ удовлетворяющее

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_X + \|Hu\|_X \leq \mathrm{c}\|f\|_X.$$

Отсюда имеем, для всех $f \in B^s_{p,q,\gamma}(\mathbb{R}_+, X)$ существует единственное решение $u(t,x)$ задачи (0.15), удовлетворяющее следующей коэрцитивной оценке

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_Y + \sum_{|\alpha|\leq l} \left\|a_\alpha * D^{[\alpha]} u\right\|_Y + \|A * u\|_Y \leq C\|f\|_Y,$$

где $Y = B^s_{p,q,\gamma}(\mathbb{R}_+, X)$.

В четвертом разделе третьей главы изучается система вырожденных интегро-дифференциальных уравнений. Рассматривается следующая система

$$\sum_{k=0}^{l} a_k * \frac{d^{[k]} u_m}{dx^{[k]}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_j + \lambda\right) * u_j(x) = f_m(x),$$

$$x \in \mathbb{R}, \qquad (0.19)$$

и доказывается равномерная коэрцитивная оценка для (0.19). С этой целью допустим $\left\{d_j(x)\right\}_1^\infty \in l_q$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и некоторых $x_0 \in \mathbb{R}$ существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие что $C_1\left|d_j(x_0)\right| \leq \left|d_j(x)\right| \leq C_2\left|d_j(x_0)\right|$.

Предположим, что $\hat{a}_k, \hat{d}_j \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ и существуют такие постоянные $M_i > 0, i = 1,2,$ что

$$\left|\xi^j \frac{d^j}{d\xi^j} \hat{a}_k(\xi)\right| \leq M_1, \ \ |\xi|^j \left|d_m^j(\xi) d_m^{-1}(\xi)\right| \leq M_2.$$

Обозначим $D(x) = \{d_m(x)\}$ и $D * u = \{d_m * u_m\}$.

Тогда при выполнении вышесказанных условий и для $|L(\xi)| \geq C \max\limits_{\mathrm{k}} |\hat{a}_k(\xi)|\, |\xi|^l$ задача (0.19) имеет единственное решение $u(x) = \{u_m(x)\}_1^\infty$, принадлежащее пространству $B_{p,q,}^{[l],s}\big(\mathbb{R}; l_q(D), l_q\big)$, и имеет место следующая коэрцитивная оценка:

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \frac{d^{[k]}u}{dx^{[k]}} \right\|_B + \|D * u\|_B + |\lambda| \|u\|_B \leq C \|f\|_B.$$

Кроме того доказывается что при достаточно больших $|\lambda| > 0$, существует резольвента $(Q + \lambda)^{-1}$ и

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{1-\frac{k}{l}} \left\| a_k * \frac{d^{[k]}}{dx^{[k]}} (Q + \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(B)} + \|D * (Q + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}$$
$$+ \|\lambda (Q + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)} \leq C \quad \text{где } B = B_{p,q}^{s}\big(\mathbb{R}; l_q\big).$$

Далее в четвертом разделе рассматривается задача Коши для этих систем и доказывается выполнение аналогичной коэрцитивной оценки.

Таким образом, в третьей главе рассмотрены разные типы вырожденных сверточно дифференциально-операторных и вырожденных интегро-дифференциальных уравнений - в обоих случаях доказывается существование и единственность решения этих задач и выполнение соответствующей коэрцитивной оценки.

Легко видно, что из коэрцитивной разрешимости и равномерной позитивности, доказанной в главе 3, следует, что операторы порожденные рассмотренной задачей является генератором аналитической полугруппы. При доказательстве теорем третьей главы используются теории полугруппы операторов, теоремы вложения, теории мультипликаторов Фурье, методы позитивных операторов и теории свертка.

Результаты, доказанные в этой главе, представляют несомненный интерес в теории квазилинейных эллиптических СДОУ.

Известно, что существуют многие классы дифференциальных и псевдо дифференциальных операторов обладающих свойством позитивности и секториальности. Поэтому, выбирая конкретные пространства и конкретные операторы, действующие в этом пространстве, получим максимально регулярные свойства разного класса вырождающихся уравнений свертки в различных пространствах и задачу Коши для параболических СДОУ или их систем соответственно.

Глава 4 посвящена исследованию коэрцитивности вырождающихся сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах и их применение.

Свойства сеперабельности или максимальной регулярности для вырождающихся СДОУ, тем более с операторными коэффициентами исследованы сравнительно мало.

Сепарабельные свойства невырожденных СДОУ в невесовых пространствах исследованы довольно широко. Теоремы о коэрцитивной разрешимости для вырождающихся СДОУ дают стимулирующее влияние к исследованию соответствующих конкретных уравнений и краевых задач.

В этой главе рассматриваются конкретные задачи, в которых при решении используются методы, полученные в предыдущих главах. Отметим, что классические методы здесь не применимы.

В первом разделе четвертой главы рассматриваются квазилинейные эллиптические СДОУ

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + G(x, D^\sigma u)u = F(x, D^\sigma u) + f(x),$$

$$x \in R^n, \tag{0.20}$$

где G и F нелинейные операторы в Банаховом пространстве E, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ - комплекснозначные, $f-$ $E-$значные функции, $D^\sigma -$дифференциальне операторы, такие что $|\sigma| \leq l-1$.

Используя теоремы вложения и теорему следа в пространстве Соболева имеем,

$$\prod_{|\sigma|\leq l_0-1} \|D^\sigma u\|_{C(R^n;E_\sigma)} = \prod_{|\sigma|\leq l_0-1} \sup_{x\in R^n} \|D^\sigma u(x)\|_{E_\sigma} \leq \|u\|_Y,$$

где

$$X = L_{p,\gamma}(R^n;E),\ \ Y = W^l_{p,\gamma}(R^n;E(A),E), \gamma(x) = \prod_{k=1}^n |x_k|^\gamma,$$

$$0 \leq \gamma \leq \frac{p-1}{n}, E_\sigma = (E(A),E)_{x_{\sigma,p}},$$

$$x_\sigma = \frac{p|\sigma| + \gamma + n}{\rho l}, E_0 = \prod_{|\alpha|\leq l_0-1} E_\sigma$$

$l_0 = \left[l - \frac{\gamma+n}{p}\right]$ здесь $[s]$ $-$обозначет целую часть $s > 0$.

Сначала рассмотрим соответствующее линейное уравнение. С помощью теорем главы 3 получаем коэрцитивную оценку в пространстве X.

Затем с помощью максимальной регулярности полученной линейной задачи, с помощью теоремы сжатия и по теореме Банаха о неподвижной точке получаем, что существует единственное решение $u \in Y$ уравнения (0.20) и $\|u\|_Y \leq r, r > 0$.

Во втором разделе главы 4 изучается краевая задача для сверточно дифференциальных уравнений анизотропного типа и получены максимально-регулярные свойства в весовых смешанных нормах.

Пусть $\widetilde{\Omega} = R^n \times \Omega$,где $\Omega \subset R^n$ открытое связное множество с компактным $C^{2m}-$границей $\partial\Omega, \boldsymbol{p} = (p_1, p)$, весовая функция на Ω. $L_{p,\gamma}(\widetilde{\Omega})$ будет обозначать пространство всех $\boldsymbol{p}-$суммируемых скалярнозначных функций со смешанной нормой т.е., пространство всех измеримых функций f, определенных на $\widetilde{\Omega}$, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\gamma}(\widetilde{\Omega})} = \left(\int_{R^n} \left(\int_{\Omega} |f(x,y)|^{p_1} \gamma(x) dx \right)^{\frac{p}{p_1}} dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Далее в этом разделе рассматривается задача

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + \sum_{|\alpha|\le 2m} \left(b_\alpha c_\alpha D_y^\alpha + \lambda \right) * u = f(x,y)\,, x \in R^n,$$

$$y \in \Omega, \qquad (0.21)$$

$$B_j u = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(y) D_y^\beta u(x,y) = 0,$$

$$y \in \partial\Omega, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad (0.22)$$

где

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial y_j},\ \ y = \left(y_1, y_2, \dots, y_\mu\right), a_\alpha = a_\alpha(x),\ b_\alpha = b_\alpha(x),$$

$$c_\alpha = c_\alpha(y),$$

и доказывается, что при определенных условиях для $f \in L_{\mathbf{p},\gamma}\left(\widetilde{\Omega}\right)$ и $\lambda \in S_\varphi$ задача (0.21) - (0.22) имеет единственное решение $u \in W_{\mathbf{p},\gamma}^{l,2m}\left(\widetilde{\Omega}\right)$ и справедлива соответствующая коэрцитивная оценка.

Эта задача аналогично решается в весовом пространстве Бесова. Пусть $B_{\mathbf{p},q,\gamma}^s\left(\widetilde{\Omega}\right)$ обозначает пространство Бесова с соответствующей весовой смешанной нормой, тогда

$$B_{\mathbf{p},q,\gamma}^s\left(\widetilde{\Omega}\right) = B_{p,q,\gamma}\left(R^n;\ B_{p_1,q,\gamma}^s(\Omega)\right)$$

$$B_{\mathbf{p},q,\gamma}^{l,2m,s}\left(\widetilde{\Omega}\right) = B_{p,q,\gamma}^{l,s}\left(R^n;\ B_{p_1,q,\gamma}^{2m,s}(\Omega), B_{p_1,q,\gamma}^s(\Omega)\right)$$

Кстати, заметим, что при $l \ne 2m$ уравнения (0.21) является анизотропным, для $l = 2m$ изотропным.

Рассмотрим оператор A, определенный следующими равенствами

$$D(A) = B_{p_1,q}^{2m,s}\left(\Omega,\ \ B_j u = 0\right),$$

$$A(x)u = \sum_{|\alpha|\le 2m} b_\alpha(x) C_\alpha(y) D^\alpha u(y).$$

Доказывается аналогичная теорема для задач (0.21)-(0.22) в пространстве Бесова-$B_{\boldsymbol{p},q,\gamma}^{s}\left(\widetilde{\Omega}\right)$.

В третьем разделе главы 4 исследуется бесконечная система вырожденных интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующую бесконечную систему вырожденных уравнений свертки в пространстве $L_{p,\gamma}\left(R^n; l_q\right)$,

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^{[\alpha]} u_m + \sum_{j=1}^{\infty} d_j * u_j = f_m, \qquad (0.23)$$

где

$$u_j = u_j(x), \qquad d_j = d_j(x), \qquad a_\alpha = a_\alpha(x),$$

$$\gamma(x) = \prod_{k=1}^{n} |x_k|^\gamma, -\frac{1}{n} < \gamma < \frac{p-1}{n}.$$

Для $1 < q < \infty$ положим

$$l_q = \left\{ \xi;\ \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty};\ \|\xi\|_{l_q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,\ \xi_i - \text{комплексные числа.} \right\}$$

Тогда

$$L_{p,\gamma}\left(l_q\right) = L_{p,\gamma}\left(R^n; l_q\right) =$$

$$= \left\{ f; f = \{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty},\ \ \|f\|_{L_{p,\gamma}(l_q)} = \left(\int_{R^n} \|\{f_i(x)\}\|_{l_q}^p \gamma(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Пусть

$$D(x) = \{d_m(x)\}, \qquad d_m > 0, \qquad u = \{u_m\}, D * u = \{d_m * u_m\},$$

$$l_q(D) = \left\{ u \in l_q, \qquad \|u\|_{l_q(D)} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |d_m(x) * u_m|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

$$1 < q < \infty.$$

При конкретных условиях доказывается, что для всех $f(x) = \{f_m(x)\}_1^\infty \in L_{p,\gamma}\big(R^n; l_q(D)\big)$ и для $\lambda \in S_\varphi, \varphi \in [0, \pi)$ задача (0.23) имеет единственное решение $u = \{u_m(x)\}_1^\infty$, принадлежащее Y и выполняется следующая коэрцитивная оценка

$$\sum_{|\alpha| \le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left\| a_\alpha * D^{[\alpha]} u \right\|_X + \|D * u\|_X \le C \|f\|_X,$$

где

$$X = L_p\big(R^n; l_q\big), Y = W_{p,\gamma}^{[l]}\big(R^n; l_q(D), l_q\big).$$

Обозначим через Q дифференциальный оператор в $L_p\big(R^n; l_q\big)$, порожденный (0.23).

Аналогично доказывается для $\lambda \in S_\varphi$ существует резольвента $(Q + \lambda)^{-1} u$ и верно соответствующая резольвентная оценка.

В четвертом разделе главы 4 рассматривается краевая задача типа Вентцель-Робина для сверточно дифференциально-операторных уравнений. Для параболической задачи, с граничными условиями Вентцель-Робина на некоторых L_p −пространствах $(1 < p < \infty)$ А.Фавини, Г.Гольдштейн и С.Романелли провели хорошие исследования (порождение C_0 полугруппы и голоморфность) и получили некоторые прекрасные результаты.

Проблема второго порядка была исследована в работах К.Энгела и А.Фавини, где авторы использовали теорию косинус-функций для доказательства корректности. В статьях В.Кеянтуо и М.Варма исследован случай $L_p -$ пространства. Для доказательства. корректности рассматриваемой задачи на подходящих $L_p -$ пространствах на отрезке [0,1] также используется теорию косинус-функций. Наконец в конце XX века А.Вентцель рассмотрел эти вопросы в многомерном случае, т.е. для регулярных ограниченных областей $\Omega \subset R^n$.

В этом разделе возьмем $E = L_2(0,1)$ и $A = A(x)$ как дифференциальный оператор с обобщенным граничным условием типа Вентцель-Робина, определяемый формулой

$$D(A) = \left\{u \in W_2^2(0,1), B_j u = Au(j) = 0, j = 0,1\right\},$$

$$A(x)u = a(x,y)u^{(2)} + b(x,y)u^{(1)} \text{для всех } \ x \in R^n, y \in (0,1),$$

где $a(x,\cdot)$ и $b(x,\cdot)$ комплекснозначные функции на $(0,1)$ для всех $x \in R^n$.

Рассмотрим смешанные задачи с граничными условиями типа Вентцель-Робина для вырождающегося интегро-дифференциального уравнения

$$\sum_{|\alpha| \le l} a_\alpha * D^{[\alpha]} u + \left(a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \lambda\right) * u = f(x,y) \qquad (0,24)$$

$$B_j u = \left[a(x,j)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x,j)\frac{\partial}{\partial y}\right] u(x,j) = 0, \qquad j = 0,1, x \in R^n, y \in (0,1),$$

где $a_\alpha = a_\alpha(x)$ комплекснозначные функции, $\lambda -$ комплексный параметр.

Пусть $\widetilde{\Omega} = R^n \times (0,1), \boldsymbol{p} = (2,p), L_p\left(\widetilde{\Omega}\right)$ обозначает пространство всех $\boldsymbol{p}$ −суммируемых весовых скалярнозначных функции со смешанной нормой, т.е. пространство всех измеримых функции f, определенных на $\widetilde{\Omega}$, для которых

$$\|f\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} = \left(\int_{R^n}\left(\int_0^1 |f(x,y)|^2\, dy\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Аналогично $W_{\boldsymbol{p},\gamma}^{[l],2}(\widetilde{\Omega})$ обозначает анизотропное пространство Соболева с соответствующей смешанной нормой, т.е. $W_p^{[l],2}(\widetilde{\Omega})$ обозначает пространство всех функций $u \in L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})$, имеющих производную $D_x^{[\alpha]}u \in L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})$ относительно x для $|\alpha| \leq m$ и производной $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})$ с нормой

$$\|u\|_{W_{\boldsymbol{p},\gamma}(\widetilde{\Omega})}^{[l],2} = \|u\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=l} \left\|D_x^{[\alpha]}u\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} < \infty$$

В этом разделе представляется следующий результат:

Теорема 0.4. Предположим, что выполнены все условия теоремы 0.1 и имеет место -

$a(x,\cdot) \in W_\infty^1(0,1), a(x,\cdot) \geq \delta > 0, b(x,\cdot) \in L_\infty(0,1)$ для всех $x \in R^n$. Тогда для $f \in L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})$ и $\lambda \in S_\varphi$задача (0.24) имеет единственное решение $u \in W_{\boldsymbol{p},\gamma}^{[l],2}(\widetilde{\Omega})$ и справедлива следующая коэрцитивная равномерная оценка

$$\sum_{|\alpha|\leq l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left\|a_\alpha * D^{[\alpha]}u\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} + |\lambda|\|u\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} + \left\|\left(a\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) * u\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})} \leq C\|f\|_{L_{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\Omega})}.$$

Для резольвенты $(Q+\lambda)^{-1}$дифференциального оператора Q порожденного задачей (0.24) существует соответствующая коэрцитивная оценка.

В этом подзаголовке также рассматриваются некоторые примеры, например, в трехмерном пространстве R_+^3 и показывается максимальная-регулярность задачи Коши для параболических СДОУ.

Глава 5 посвящена исследованию вопросов линейных и нелинейных вырожденных сверточно-эллиптических операторов и их приложения. Исследуются свойства регулярности вырожденных или невырожденных абстрактных сверточно-эллиптических уравнений с параметрами. Находятся достаточные условия, гарантирующие сепарабельность линейных задач в весовых $L_{\boldsymbol{p}} -$ пространствах.

Доказывается, что соответствующий сверточно-эллиптический оператор является секториальным и также является генератором аналитической полугруппы.

Используя эти результаты, получается существование и единственность максимально регулярного решения для нелинейного уравнения свертки с параметрами в весовых $L_{\boldsymbol{p}}-$ пространствах. В приложении доказываются свойства максимально-регулярности задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения в смешанных нормах $L_{\boldsymbol{p}}$, краевая задача для анизотропного сверточно эллиптического уравнения, краевая задача для вырождающегося интегро-дифференциального уравнения и их бесконечных систем.

В первом разделе главы 5 изучаются свойства максимально-регулярности вырожденных линейных сверточно дифференциально-операторных уравнений с параметрами. Рассмотрим следующий вырожденный СДОУ

$$\sum_{|\alpha|\le l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^{[\alpha]}u + (A+\lambda) * u = f, \tag{0.25}$$

в E –значных пространствах L_p, где l натуральное число $a_\alpha = a_\alpha(x)$ являются комплекснозначными функциями $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \alpha_k$ –неотрицательные целые число, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_\alpha = \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{\frac{\alpha_k}{l}}, \varepsilon_k$ – положительный, λ –комплексный параметр, $A = A(x)$ линейный оператор в Банаховом пространстве E для $x \in R^n$.

Найдутся достаточные условия, гарантирующие сепарабельность задачи (0.25).

Предположим, что выполнены следующие условия:

Условие 0.1.

$$1)\ \ L_\varepsilon(\xi) = \sum_{|\alpha|\le l} \varepsilon_\alpha \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha \in S_{\varphi_1}, \varphi_1 \in [0,\pi)$$

$$|L_\varepsilon(\xi)| \ge C \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left|\hat{a}_{\alpha(l,k)}\right| |\xi_k|^l, \qquad \alpha(l,k) = (0,0,\ldots,l,0,0,\ldots,0),$$

т. е., $\alpha_i = 0, i \neq k, \alpha_k = l$, для $\xi \in R^n$;

2) $\hat{a}_\alpha \in C^{(n)}(R^n), |\xi|^{|\beta|}\left|D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)\right| \leq C_1$,
$\beta_k \in \{0,1\}, 0 \leq |\beta| \leq n$;

3) $\left[D^\beta \hat{A}(\xi)\right]\hat{A}^{-1}(\xi_0) \in C\big(R^n; \mathcal{L}(E)\big)$,

$|\xi|^{|\beta|}\left\|\left[D^\beta \hat{A}(\xi)\right]\hat{A}^{-1}(\xi_0)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C_2$

для $0 \leq |\beta| \leq n, \xi, \xi_0 \in R^n \backslash \{0\}$.

В этом разделе доказывается следующий основной результат:

Теорема 0.5. Предположим, что Условие 0.1 выполнено и $E -$ Банахово пространство, удовлетворяющее условию мультипликатора относительно весовой функции $\gamma \in A_p$. Пусть $\hat{A}$ $-$равномерно R $-$секториальный оператор в E с $\varphi \in [0, \pi), \lambda \in S_{\varphi_2}, 0 \leq \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$. Тогда для всех $f \in \tilde{X}$ существует единственное решение задачи (0.25) и имеет место следующая коэрцитивная равномерная оценка

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left\|a_\alpha * D^{[\alpha]}\right\|_{\tilde{X}} + \|A * u\|_{\tilde{X}} + |\lambda|\|u\|_{\tilde{X}} \leq C\|f\|_{\tilde{X}},$$

где $\tilde{X} = L_{\mathrm{p}}(R^n; E), \tilde{Y} = W^{[l]}_{p,\gamma}(R^n; E(A), E)$

Теперь рассмотрим задачу Коши для вырожденного параболического уравнения свертки с параметрами

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^{[\alpha]} u + A * u + du = f(t, x)$$

$$u(0, x) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \qquad x \in R^n. \tag{0.26}$$

Воспользовавшись предыдущими замечаниями из теоремы 0.3 получаем следующий результат.

Теорема 0.6. Пусть выполняется Условие 0.1 для $a_\alpha(y)$ и A с $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Тогда задача (0.26) имеет единственное решение $u(t, x)$ для всех $L_{\boldsymbol{p}}(R_+^{n+1}; E)$ в смешанных нормах и при достаточно больших d справедлива следующая коэрцитивная равномерная оценка

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_p(R_+^{n+1};E)} + \sum_{|\alpha|\le l} \varepsilon_\alpha \left\|a_\alpha * D^{[\alpha]}u\right\|_{L_p(R_+^{n+1};E)} + \|A * u\|_{L_p(R_+^{n+1};E)} \le C\|f\|_{L_p(R_+^{n+1};E)}, \text{ где } R_+^{n+1} = R^n \times \mathbb{R}_+.$$

Результаты, доказанные в предыдущих главах, представляют несомненный интерес и дают стимулирующее влияние к исследованию вырожденных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами . Результаты, доказанные в третьей и четвертой главах получают широкое применение даже в случае $E = \mathbb{R}$ (т.е. в числовом случае) и $E = l_q$.

Во втором разделе пятой главы рассматриваются разные типы краевых задач для вырождающихся дифференциально операторных уравнений и доказывается коэрцитивная разрешимость этих задач.

Наши результаты о максимальной-регулярности задачи (0.25) хорошо используются для существования и единственности максимально-регулярного решения для конкретных СДОУ.

Сначала рассмотрим бесконечную систему вырожденных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\sum_{|\alpha|\le l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^{[\alpha]}u_m + \sum_{j=1}^{\infty} d_j * u_j(x) = f_m(x), \quad x \in R^n, m = 1,2,\dots, \tag{0.27}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_\alpha = \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{\frac{\alpha_k}{l}}$,

$$\gamma(x) = \prod_{k=1}^{n} |x_k|^\gamma, -\frac{1}{n} < \gamma < \frac{p-1}{n}.$$

При доказательстве теоремы о существовании и единственности решения задачи (0.27) используются методы, разработанные в предыдущих главах. Аналогично доказывается существование резольвенты оператора порожденной задачи (0.27) и показывается соответствующая оценка.

Далее в этом подзаголовке исследуются свойства максимально-регулярности задачи с граничными условиями типа Вентцель-Робина в смешанных нормах для вырождающегося интегро-дифференциального уравнения с параметрами. Рассмотрим оператор $A = A(x)$, определенный формулой

$$D(A) = \{u \in W_2^2(0,1), \qquad Au(j) = 0\}, j = 0,1,$$

$$A(x)u = a(x,y)\frac{d^2u}{dy^2} + b(x,y)\frac{du}{dy}, \qquad x \in R^n, \qquad y \in (0,1).$$

Используя R –секториальность оператора A в пространстве $L_2(0,1)$, из теоремы 0.5 получаем следующую равномерную коэрцитивную оценку

$$\sum_{|\alpha|\le l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left\| a_\alpha * D^{[\alpha]}u \right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} + |\lambda| \|u\|_{L_p(\tilde{\Omega})} \left\| \left(a\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b\frac{\partial}{\partial y} \right) * u \right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} \le C \|f\|_{L_p(\tilde{\Omega})}$$

Соответствующая оценка для резольвенты оператора, порожденного задачей (0.25) с граничными условиями типа Вентцель-Робина, получается из оценки резольвенты для задачи (0.25) при конкретных значениях оператора A в пространстве E.

В третьем разделе главы 5 исследуются свойства сепарабельности сверточно дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Хорошо известно, что дифференциальные уравнения с параметрами играют важную роль в моделировании физических процессов. Сверточно дифференциально-операторные уравнения с малыми параметрами также имеют существенное применение в разработке теории задача математической физики.

В этом разделе получено представление решения с участием полугруппы оператора A, позволяющее получить свойства максимальной регулярности ДОУ и точные коэрцитивные L_p оценки решения равномерно по малому и спектральному параметру.

Рассмотрим следующую краевую задачу для сверточно-дифференциального эллиптического уравнения с малыми параметрами

$$\begin{cases} Lu = -\varepsilon u''(t) + A_\lambda u(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(aA_1 * u')(t) + \\ \qquad +(A_0 * u)(t) = f(t), \ \ t \in (0;\infty), \\ \quad L_1 u = \varepsilon^{\frac{p+1}{2p}} \alpha u'(0) + \varepsilon^{\frac{1}{2p}} \beta u(0) = f_0 \end{cases} \tag{0.28}$$

где $u\,(t) = u\,(\varepsilon, t)$ - решение (0.28), $A, A_1 = A_1\,(t), A_0 = A_0\,(t)$ - линейные операторы в Банаховом пространстве E, $A_\lambda = A + \lambda I, a = a\,(t)$ скалярная функция на $(0;\, \infty), f_0 \in E_p = (E\,(A), E)_{\theta,p}$, здесь $(E\,(A), E)_{\theta,p}$ обозначает вещественное интерполяционного пространство между $E\,(A)$ и $E, p \in (1,\infty), \theta = \frac{1+p}{2p}$, α, β - комплексные числа, $\varepsilon -$ малый положительный, а $\lambda -$ комплексный параметр.

Для исследования основной проблемы прежде всего рассмотрим соответствующую однородную задачу главной части уравнения (0.28), т.е.,

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(t) + A_\lambda u(t) = 0 \\ \qquad L_1 u = f_0 \end{cases} \tag{0.29}$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема 0.7. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) E —Банахово пространство, удовлетворяющее условию равномерного мультипликатора для p∈ (1, ∞);

2) A является равномерно $R -$ позитивным оператором в E при $0 \leq \varphi < \pi$, и $-\beta\alpha^{-1} \in S_{\varphi_1}, 0 \leq \varphi_1 + \varphi < \pi$. Тогда задача (0.29) для $\forall f_0 \in E_p$ имеет единственное решение $u\,(t) \in W_p^2(\mathbb{R}_+;\, E\,(A), E)$ и верна коэрцитивная оценка

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \left\| u^{(i)}(t) \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+;E)} + \|Au(t)\|_{L_p(\mathbb{R}_+;E)} \leq C\left[|\lambda|^{1-\theta} \|f_0\|_E + \|f_0\|_{E_p} \right]$$

выполняется равномерно по ε и $\lambda \in S_\varphi$ при достаточно больших $|\lambda|$.

Далее рассматривается соответствующая неоднородная задача т.е., главная часть уравнения (0.28). Доказывается, что существует единственное решение и имеет место следующая равномерная коэрцитивная оценка

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \left\|u^{(i)}(t)\right\|_{L_p(\mathbb{R}_+;E)} + \|Au(t)\|_{L_p(\mathbb{R}_+;E)}$$
$$\leq C\left[\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+;E)} + |\lambda|^{1-\theta}\|f_0\|_E + \|f_0\|_{E_p}\right].$$

Наконец рассмотрим задачу (0.28).

Теорема 0.8. Предположим, что все условия теоремы 0.7 выполнены,

и $a\ (t) \in L_1\ (\mathbb{R}_+), A_1(t)A^{-\left(\frac{1}{2}-\mu_1\right)} \ \in L_\infty\left(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(E)\right)$,

$A_0(t)A^{-(1-\mu_2)} \in L_\infty\left(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(E)\right)$ для $0 < \mu_1 < 1/2$, $0 < \mu_2 < 1$.

Тогда для всех $f \in L_p(\mathbb{R}_+, E)$ и достаточно больших $|\lambda| > \lambda_0 > 0$ существует единственное решение $u \in W_p^2\ (\mathbb{R}_+;\ E\ (A), E)$ задачи (0.28) и имеет место следующая коэрцитивная равномерная оценка

$$\sum_{i=0}^{2} \varepsilon^{\frac{i}{2}} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\|u^{(i)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}_+,E)} + \|Au\|_{L_p(\mathbb{R}_+,E)} \leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+,E)}.$$

Полученные результаты могут использоваться для сингулярного возмущения интегро-дифференциального параболического уравнения. Кроме того свойства равномерной сепарабельности задачи (0.28) позволяют исследовать спектральные свойства эллиптической задачи, зависящей от параметра.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 56 работах.

Я выражаю искренную благодарность моему научному консультанту профессору Вели Биннет оглы Шахмурову за своим интересом к исследуемым задачам, за ценные советы и обсуждения полученных результатов.

ВЫВОДЫ

Диссертация посвящена исследованию максимальной регулярности сверточно дифференциально-операторных уравнений в весовых пространствах. Эта проблема связана с исследованием свойств сепарабельности линейных и нелинейных задач с неограниченными операторными коэффициентами в Банаховозначных весовых пространствах.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- получены представления решения сверточно дифференциально-операторного уравнения в весовым Банаховым пространстве;

- доказано равномерная ограниченность и R-ограниченность оператор-функции полученных при исследовании разрешимости сверточных уравнений;

- доказано существование и единственности решение вырождающихся сверточно дифференциально-операторных уравнений со смешанной производной в весовым пространстве и получено коэрцитивная оценка;

- найдены достаточные условия, гарантирущее сеперабельности линейных задач в весовых Банаховых прстранствах;

- с помощью коэрцитивных оценок доказано существование и единственность решение вырожденную задачу Коши для сверточно параболического уравнение;

- изучены существование резольвента оператора порожденной рассматриваемой задачи и справедливость соответствующий оценок;

- получена оценка для решения квазилинейных эллиптических сверточных дифференциально-операторных уравнений;

- изучена краевая задача для сверточно дифференциальных уравнений анизотропного типа и получена максимально регулярные свойства в весовых смешанных нормах;

- для бесконечных систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в весовым пространстве доказано выполнение коэрцитивных оценок и верность соответствующий резольвентный оценок;

- найдено условия для существование решение смешанной задачи с граничными условиями типа Вентцель-Робина для вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений и получено оценка;

- описаны максимальной регулярности вырожденных линейных сверточно дифференциально-операторных уравнений с параметрами;

- доказано коэрцитивная оценка для решения сверточно дифференциально-операторного уравнения зависящего от параметра.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах.

1. Мусаев Г.К., Коэрцитивная разрешимость для дифференциально-операторных уравнений. *//Труды конференции, посвященной 80-летию К.Т.Ахмедова, Баку.- 1999. -с.52-55.*

2. Musayev H.K., Orucov Q., Nəcəfova S., Abstrakt Sobolev fəzalarında çoxluğun kompaktlığı. // *TEC-nin 61-ci elmi konfransının materialları, Bakı.- 2000. -s.133-134.*

3. Мусаев Г.К., Оценки резольвенты некоторых дифференциальных операторов. //*"Diferensial tənliklər və onların tətbiqi" elmi konfransının tezisləri, Bakı.- 2002. - s.62-64.*

4. Мусаев Г.К., Анизотропные оценки резольвенты некоторых дифференциальных операторов, //*Материалы научной конференции, посвященной 70 летию профессора Г.К.Намазова, Баку. -2002. -s.103-105.*

5. Мусаев Г.К., О фредгольмовости дифференциально-операторных уравнений с переменными коэффициентами. //*Abstracts of X İnternational conference on mathematics and mechanics devoted to the 45th anniversary of İnstitute of Mathematics and Mechanics, Baku. - 2004. -p.118.*

6. Musaev H.K. Coercive properties of anisotropic differential-operator equations., //*Transactions of NAS of Azerbaijan, İssue mathematics and mechanics, XXIV, N.4, 2004, -p. 117-124.*

7. Musayev H.K., İsgəndərova G.M., Bəzi operator əmsallı anizotrop diferensial tənliklərin rezolventasının qiymətləndirilməsi, *//Abstracts of İnternational conference on mathematics and mechanics devoted to the 50-th anninversary from birthday of member of the correspondent of NASA, professor İ.T.Mamedov, Baku.- 2005, -p.146.*

8. Musaev H.K. Estimate of growth of mixed differentiation of resolvent of anisotropic differential operators., //*Proceedings of İMM of NAS of Azerbaijan, XXV (XXXIII), 2006, -p.85-91*.

9. Мусаев Г.К., Компактность операторов вложения в весовых абстрактных анизотропных пространствах. //*Akademik Ə.Hüseynovun 100 illiyinə həsr olunmuş konfransın materialları. Bakı.- 2007.-p.109.*

10. Musayev H.K., Hacıyeva N.F., Çəkili fəzalarda daxilolma teoremləri və onların bəzi tətbiqləri, //*Ümummilli lider H.Əliyevin 85 illiyinə həsr olunmuş konfransın materialları, Bakı.- 2008. -p.85.*
11. Musaev H.K., Compactness of the imbedding in the weight abstract anisotropic spaces, //*The 2nd International conferenc on control and optimization with Industrial Applications. Baku. - 2008. -p.133.*
12. Musaev H.K., Imbedding theorems in weight abstract anisotropic spaces, //*The 3d congress of the world mathematical society of Turkish countries. Almaty.- 2009. -p.260-262.*
13. Мусаев Г.К., Непрерывность вложения в классах абстрактных функций, определенных в области, //*"Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı beynəlxalq elmi konfransın materialları,. Bakı.- 2010. -p.29-30*
14. Musayev H.K., Paşayeva G.M., Müəyyən sinif çəkili fəzalarda daxilolma teoremləri, //*Abstracts of İnternational conference devoted to the 80-th anninversary of academician F.G.Magsudov, Baku.- 2010.- p. 279-280.*
15. Musaev H.K., //The theorem on compactness of the embedding operators in weight classes of the abstract functions defined in domain, *The 4d congress of the Turkish World Mathematical Society. Baku. -2011. -p.109.*
16. Мусаев Г.К., Теорема о компактности операторов вложения в некоторых интерполяционных пространствах, //*Proceedings of the international conference devoted to the 100-th anninversary of academician Z.İ.Khalilov, Baku.- 2011. -p.263-266.*
17. Мусаев Г.К., Мурсалова С.Т, Оценка резольвенты для некоторых дифференциальных операторов, //*Proceedings of the İnternational conference devoted to the 100-th anninversary of academician İ.İ.İbrahimov, Baku- 2012.-p.177-179.*
18. Мусаев Г.К., Ахмедов И.А., О разрешимости одной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвёртого порядка с интегральным условием первого рода, //*Tələbə, magistrant və gənc tədqiqatçıların "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı.- 2012.- p.130-131.*
19. Мусаев Г.К., Мурсалова С.Т., Оценка роста смешанного дифференцирования резольвенты в зависимости от параметра, //*Tələbə,*

magistrant və gənc tədqiqatçıların "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı- 2012. -p.131-134..

20. Musaev H.K., A priori estimation for coercive solvability of differential-operator equation with variable coefficients., //*Proceedings of İMM of NAS of Azerbaijan, XXXVİİ (XLV), 2012. –p.111-117.*

21.Мусаев Г.К., Ахмедов И.А., Об одной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвёртого порядка с интегральным условием первого рода, //*Azərbaycanın ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 90 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı. – 2013. –p.185.*

22. Мусаев Г.К., Ограниченность операторов вложения в абстрактных анизотропных пространствах, //*Proceedings of the İnternational conference devoted to the 55-th anninversary of the İnstitute of Mathematics and Mechanics , Baku.- 2014. - p. 255-257.*

23. Мусаев Г.К., Казымова Н.А., Компактность множества в абстрактных функциональных пространствах, //*Proceedings of the İnternational conference devoted to the 55-th anninversary of the İnstitute of Mathematics and Mechanics , Baku.- 2014.- p. 257-258.*

24. Мусаев Г.К., Бадиева А.Н., Теорема о компактности множества в абстрактных анизотропных пространствах, //*Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 91 illiyinə həsr olunmuş Respublika elmi konfransın materialları, Bakı.-2014. -c.114-116.*

25. Musayev H.K., Badiyeva A.İ., Abstrakt fəzalarda sabit əmsallı operator diferensial tənliklərin həllinin qiymətləndirilməsi, //*Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 91 illiyinə həsr olunmuş Respublika elmi konfransının materialları, Bakı.-2014. -s.112-114.*

26. Musayev H.K., Kazımova N.A., Abstrakt $L_2(a,b)$ fəzasında diferensial operatorların koersitivliyi, //*"Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Elmi Konfransının materialları. Bakı.-2014. -s.111-112.*

27. Мусаев Г.К., Казымова Н.А., Компактность множества в абстрактных функциональных пространствах, //*Magistrant, doktorant və gənc*

tədqiqatçıların "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransının materialları. Bakı.-2014. -p.111-112.
28. Shakhmurov, V.B., Musaev H.K., Separability properties of convolution-differential operator equations in weighted L_p spaces, // *Appl.and Comput. Math., V.14, N2, 2015.- p.221-233.*
29. Musaev, H.K., Shakhmurov V.B., Regularity properties of degenerate convolution-elliptic equations, // *Boundary Value Problems, (2016) 50, 2016. -p.1-19.*
30. Мусаев Г.К., Аскерова Л.В., Теорема вложения в пространствах Соболева и их применение к разрешимости некоторых дифференциально-операторных уравнений, //*Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 94 illiyinə həsr olunmuş «Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı.-2017. -p.202-207.*
31. Мусаев Г.К., Аскерова Л.В, Коэрцитивная разрешимость некоторых дифференциально-операторных уравнений, //«*Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı-2017. –p.233-234.*
32. Musaev H.K., Uniformly boundedness of the operator-valued functions arising in the solution of convolution differential-operator equations., //*Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 37(4), 2017. –p. 120-131.*
33. Musaev, H.K., Shakhmurov V.B., Maximal regular convolution-differential equations in weighted Besov spaces., // *Appl.and Comput. Math., V.,16, N.2, 2017, -p.190-200.*
34. Musaev, H.K., Shakhmurov V.B., B-Coercive convolution equations in weighted function spaces and applications., // *Ukr. Math. Journ. V.,69, N.10, 2017. -p. 1385-1405.*
35. Musaev H.K., Nonlinear elliptic convolution differential-operator equations., //*Journal of Baku Engineering University, Mathematics and Computer sciences, V.,1, N.2, 2017, -p.140-148.*
36. Мусаев Г.К., Шаммадли Н.М., Дифференциальные уравнения второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами, //*"Riyaziyyat*

və Mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika elmi konfransının materialları, Baku. -2018. –p.174-175.
37. Musaev H.K., Boundary value problem for the anisotropic type convolution equations, //*Proceedings of the 6th International Conference on “Control and Optimization with industrial applications”, Volume I, 2018,- p. 282-284.*
38. Musaev H.K., Coercive estimation of the solutions of infinite system of integro-differential equations in weighted spaces., //*Proceedings of IAM of BSU., V., 7. N.1, 2018, -p.75-85.*
39. Musaev H.K., Wentzell-Robin type boundary value problem for elliptic convolution –differential equation., //*“Bakı Universiteti xəbərləri” N.2, 2018, -p.* 81-89.
40. Musaev H.K., Boundary value porblem in the weighted spaces with mixed norm., //*“Bakı Universiteti xəbərləri”, N.3, 2018, -p.58-66.*
41. Musaev H.K., İnfinite system of degenerate integro-differential equations., //*Transactions of Pedagogical University, Series of mathematical and natural sciences, N.4,V.66., 2018. -p 14-24.*
42. Musaev H.K., Degenerate convolution equations in vector-valued weighted Besov spaces., //*Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics., V., 38, N.4, 2018. -p. 115-123.*
43. Musaev H.K., The Cauchy problem for an infinite systems of convolution operator-differential equations., //*Journal of Contemporary Applied Mathematics, V.,8, N.2, 2018, -p. 16-30.*
44. Musaev H.K., Linear degenerate convolution-elliptic equations with parameters.// *Proceedings of IAM of BSU., V.7. N.2, 2018, -p.165-177.*
45. Musaev H.K., The system of degenerate integro-differential equations with parameters., //*Journal of Baku Engineering University, Mathematics and Computer sciences, V2., N.1., 2018, -p.36-45.*
46. Musaev H.K., Boundary value problems for Convolution Differential Operator Equations on the half line, //*3rd İnternational conference on “Operators in General Morry-type spaces and applications (OMTSA 2019), Turkey. 2019.-p.60.*
47. Musaev H.K., The Cauchy problem for degenerate parabolic CDOE., // *TWMS, Journal of Pure and Applied Mathematics, V.,12, N.2., 2021, - p.278-288.*

48. Musaev H.K., Maximal regularity of parameter dependent differential-operator equations on the halfline., //*Journal of Contemporary Applied Mathematics, V.9, N.1., 2019, -p.10-22.*
49. Musaev H.K., R-boundedness of the operator-valued functions in weighted Lp-spaces., //*Transactions of NAS of Azerbaijan, İssue Mathematics, V.,39, N.1., 2019, -p.141-150.*
50. Musaev H.K., The system of convolution equations in concrete Banach space., //*Caspian journal of applied mathematics, ecology and economics, V.,7, N.1., 2019,- p. 65-75.*
51. Musaev H.K., Boundary value problems for convolution differential operator equations on the halif line., //*Proceedings Book, Operators in general Morrey-Type spaces and applications, Turkey. -2019. -p.57-60.*
52. Musayev H.K., Şəmmədli N.M., Banax fəzasında ikinci tərtib diferensial tənlik üçün abstrakt Koşi məsələsinin həlli haqqında., //*Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Respublika Elmi Konfransının materialları, Bakı.-2019. -s.134.*
53. Мусаев Г.К., Наджафалиева Т.Г., Полугруппы операторов и линейные абстрактные задачи Коши., //*Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Respublika Elmi Konfransının materialları, Bakı.- 2019. -c.135-136.*
54. Musaev H.K., Najafaliyeva T.G., Coercive estimate for abstract elliptic equations with parameters., //Proceedings of the International conference devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences (ANAS), Bakı. - 2019, -p.394-397.
55. Musaev H.K., The nonlocal BVP for the system of Boussinesq equation of infinite many order., //*Proceedings of the 7th International Conference on "Control and Optimization with industrial applications", Volume I, 2020,- p. 290-292.*
56. Shakhmurov V.B., Musaev H.K., Nonlocal problems for Boussinesq equations., //*Proceedings of the 7th International Conference on "Control and Optimization with industrial applications", Volume I, 2020,- p. 371-373.*

Защита диссертации состоится **25 февраля 2022 года в 14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **24 января 2022 года.**

Подписано в печать: 14.01.2022
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 78823
Тираж: 70