НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

На правах рукописи

ВАГИФ МААРИФ ОГЛЫ АБДУЛЛАЕВ

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ СИСТЕМ

1203.01 – Компьютерные науки

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по математике

Баку-2015

Работа выполнена в Институте Систем Управления
Национальной Академии Наук Азербайджана

Научный консультант:
член-корр. НАН Азербайджана, доктор физико-математических наук, профессор **К.Р. АЙДА-ЗАДЕ**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор **А.Д. ИСКЕНДЕРОВ** (*Ленкоранский Государственный Университет*);

доктор физико-математических наук, профессор **Г.Ф. КУЛИЕВ** *(Бакинский Государственный Университет);*

доктор физико-математических наук, профессор **А.Я. АХУНДОВ** *(Институт Математики и Механики НАНА)*.

Ведущая организация:
Сумгаитский Государственный Университет, кафедра
«Дифференциальные уравнения и оптимизация»

Защита состоится 18 сентября 2015 года в 13^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.121 в Институте Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: Az1141, г. Баку, ул. Б.Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан 21 июля 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 01.121,
доктор философии по математике, доцент **А.Б.ПАШАЕВ**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последнее время возрос интерес к исследованию краевых задач с нелокальными условиями относительно систем дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными. Это связано с тем что, на практике в большинстве случаев невозможно измерять состояние процесса в отдельные моменты времени или в отдельных точках фазового пространства. Специфика измерительных приборов, технических средств заключается в том, что замеры, получаемые с помощью этих приборов, обладают определенной длительностью во времени и/или распределенностью в некоторой окрестности точки объекта. Это приводит к тому, что для описания состояния многомерного процесса вместо классических локальных условий необходимо использовать нелокальные, неразделенные условия, в частности, интегральные условия. Еще в 1896 году В.А.Стеклов исследовал математическую модель процесса остывания конечномерного объекта, описываемого уравнением теплопроводности с нелокальными условиями в форме линейной комбинации значений искомой функции и ее производной в различных точках границы. В развитии исследований в этом направлении большую роль сыграли труды Я.Д.Тамаркина для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также труды А.В.Бицадзе и А.А.Самарского для дифференциальных уравнений в частных производных. Несмотря на то, что исследования дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными при нелокальных начальных и краевых условиях были начаты еще в прошлом веке, все еще нет существенного продвижения в области численного решения этих задач. Основная часть исследований в этой области посвящена вопросам существования и единственности решения этих задач.

Краевая задача с неразделенными точечными и интегральными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений в общей постановке впервые были исследована Я.Д.Тамаркиным. Аналогичная задача для дифференциального уравнения 4-го порядка была изучена М.Пиконе в 1909 году. Затем эта задача была исследована Валле-Пуссеном. В частных случаях многоточечная задача была исследована А.Ю.Левиным, а задача с интегральными условиями Р.Беллманом, Ш.Г.Гамидовым, М.Грегушом, О.Николеттом, И.Т.Кигурадзем. В работах М.Н.Яковлева получены априорные оценки решения краевой задачи с неразделенными точечными и интегральными условиями.

Для дифференциальных уравнений с частными производными важную роль в развитии исследований нелокальных краевых задач сыграла нелокальная краевая задача, поставленная А.В.Бицадзе и А.А.Самарским для уравнения эллиптического типа. В этих работах исследованы вопросы существования и единственности решения задачи. Далее в работах Л.И.Камынина для схожих задач исследованы вопросы существования и единственности решения задачи на классе достаточно гладких функций. В работах В.А.Ильина и Е.И.Моисеева получены условия существования и устойчивости решения конечно-разностной аппроксимации задачи. В работах Н.И.Ионкина исследованы вопросы сходимости и устойчивости разностной схемы для уравнения теплопроводности с нелокальными условиями. В работах Н.И.Ионкина и Е.А.Валикова получены априорные оценки сходимости и устойчивости разностной схемы.

В последние годы внимание многих исследователей привлекают нелокальные задачи, описываемые нагруженными дифференциальными уравнениями. Адекватное описание многих технологических процессов возможно с помощью системы нагруженных дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными, а также с использованием нелокальных начально-краевых условий. В качестве примера можно привести экологические, биологические процессы, процессы подземной гидрогазодинамики и многие другие. При математическом моделировании этих процессов обычно предполагается, что состояние процесса измеряется точечно (локально) по временной и фазовой переменным, а также наличие точечного (локального) воздействия на процесс. Нелокальность некоторых процессов обусловлена тем, что состояния процесса в некоторые моменты времени или в некоторых точках фазового пространства или в их окрестностях как зависят, так и влияют на состояния всего процесса. Например, дебиты скважин нефтегазопромысла зависят от поля давления пласта в окрестности скважин и наоборот, добыча сырья из скважин влияет, вообще говоря, на изменение давления во всем пласте. Такие процессы описываются точечно и интегрально нагруженными дифференциальными уравнениями.

Впервые исследования этих задач были начаты в работах А. Кнезера, Н.М. Гюнтера, А.Ш.Габиб-заде, А.Д.Искендерова и А.М.Нахушева. В настоящее время подобные проблемы исследуются в работах М.Х.Шханукова-Лафишева, В.А.Нахушева, А.И.Кожанова, К.Б.Сабитов, Д.С.Джумабаева, А.А.Алиханова, а в нашей республике

– К.Р.Айда-заде, Н.А.Алиевым, С.А.Гашимовым, З.Ф.Ханкишиевым, И.Г.Мамедовым и другими учеными.

В настоящее время имеется много работ, посвященных разработке теории и методов решения задач оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами как с локальными, так и с нелокальными условиями. Среди этих работ можно выделить труды таких ученых; как Ф.П.Васильев, Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, Л.Т.Ащепков, В.В.Величенко, А.И.Егоров, Ж.Л.Лионс, Н.Н.Моисеев, Б.Т.Поляк, Ю.Г.Евтушенко, Р.П.Федоренко, А.Г.Бутковский, Ф.В.Лубышев, О.О.Васильева, К.Мизуками, К.Р.Айда-заде, А.Д.Искендеров, С.С.Ахиев, К.Г.Гасанов, М.А.Ягубов, Ф.А.Алиев, Г.Ф.Кулиев, М.Дж.Марданов, Т.К.Меликов, К.Б.Мансимов, Р.К.Тагиев, Г.Ю.Мехтиева, Ф.Г.Фейзиев, А.А.Нифтиев, Ф.Ш.Ахмедов, Я.А.Шарифов, М.М.Муталлимов, Е.Р.Ашрафова, Ф.Т.Ибиев и др. Исследованию задач оптимального управления для систем с нагруженными дифференциальными уравнениями посвящены работы таких ученых, как М.Т.Дженалиева, К.Р.Айда-заде, Ф.Ш.Ахмедова, С.А.Гашимова и др.

Существует тесная связь между некоторыми задачами с нелокальными условиями и коэффициентными обратными задачами. В последнее время большое количество работ посвящено исследованию краевых задач с нелокальными условиями посредством сведения их к обратным задачам. Среди этих работ можно выделить работы А.И.Кожанова, Л.С.Пулькиной, О.Ю.Данилкина. В то же время некоторые обратные задачи приводятся к нагруженным уравнениям. Такого рода задачи были исследованы в работах А.И.Кожанова и П.Н.Вабищевича.

Как известно, для восстановления неизвестных параметров в коэффициентно-обратных задачах задаются дополнительные условия в виде результатов определенных наблюдений за реальным процессом или специально проведенными экспериментами. В зависимости от возможностей измерительных систем эти условия могут носить точечный, суммарный или интегральный характер. Отметим, что такого рода обратные задачи встречаются на этапе параметрической идентификации математических моделей динамических процессов при проектировании соответствующих систем автоматического и автоматизированного управления.

Изучению различных аспектов коэффициентно-обратных задач было посвящены работы многих ученых. Здесь можно указать таких

ученых, как М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.И.Кабанихин, А.И.Кожанов, А.Л.Карчевский, К.Б.Сабитов, М.Отелбаев, В.Л.Камынин, Л.С.Пулькина, П.Н.Вабищевич, А.М.Денисов, J.R.Cannon, D.Lesnic, И.М.Иванчов, F.L.Yang и др., а в нашей республике – К.Р.Айда-заде, А.Д.Искендеров, А.Я.Ахундов, Р.К.Тагиев, А.Гасанов, Г.К.Намазов, Г.Я.Ягубов, Ш.М.Бахышев, Н.Ш.Искендеров, Ю.С.Гасымов, Я.Т.Мегралиев, А.Б.Рагимов, М.И.Исмаилов и др.

Разработке численных методов решения вышеуказанных краевых задач с нелокальными условиями и соответствующих им задач оптимального управления уделено недостаточно внимания. В данной диссертационной работе предложены численные методы решения краевых задач и задач оптимального управления для нагруженных систем с нелокальными начально-краевыми условиями. Это указывает на актуальность темы диссертации.

Основная цель работы. В работе поставлены следующие основные цели:

1. Разработать численные методы решения краевых задач относительно систем с обычными и нагруженными обыкновенными дифференциальными уравнениями при неразделенных точечных и интегральных условиях.
2. Разработать численные методы решения коэффициентно-обратных задач и задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами при нелокальных условиях.
3. Разработать численные методы решения краевых задач относительно дифференциальных уравнений с частными производными при нелокальных условиях.
4. Разработать численные методы решения задач оптимального управления нагруженными системами с распределенными параметрами при нелокальных краевых условиях.
5. Разработать численные методы решения коэффициентно-обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Методы исследования. В работе используются современные информационные технологии, теории и численные методы решения дифференциальных уравнений, оптимального управления, конечномерной оптимизации, а также численные методы решения краевых задач дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предложен численный метод решения краевых задач относительно систем обычных и нагруженных дифференциальных уравнений при неразделенных точечных и интегральных условиях.
2. Для задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами при нелокальных условиях получены необходимые условия оптимальности, на основе которых предложен численный метод решения этих задач.
3. Для задач оптимального управления системами с нагруженными обыкновенными дифференциальными уравнениями при нелокальных условиях получены необходимые условия оптимальности, с их использованием предложен численный метод решения этих задач.
4. Предложен численный метод решения коэффициентно-обратных задач для систем с обычными и нагруженными обыкновенными дифференциальными уравнениями.
5. Предложен численный метод решения краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов при нелокальных условиях.
6. Предложен численный метод решения краевых задач для нагруженных параболических уравнений.
7. Для задач оптимального управления нагруженными системами с распределенными параметрами получены необходимые условия оптимальности, с их использованием предложен численный метод решения этих задач.
8. Для одного класса задач оптимального управления процессом нагрева стержня с обратной связью получены необходимые условия оптимальности, с их использованием предложен численный метод решения этих задач.
9. Предложен численный метод решения коэффициентно-обратных задач для параболического, гиперболического уравнений, а также нагруженного параболического уравнения.

Практическая ценность работы. Полученные научные результаты могут быть использованы при проектировании и разработке нефтегазовых месторождений, в системах управления трубопроводным транспортом углеводородного сырья и водных запасов, при проектировании систем управления и мониторинга экологического состояния

промышленных зон. Полученные результаты также могут быть использованы в системах автоматического управления технологическими процессами с сосредоточенными и распределенными параметрами с обратной связью. В таких системах наличие обратной связи приводит к появлению в математических постановках задач нагруженных дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными.

Полученные научные результаты были использованы при выполнении работ следующих практических проектов: проект 2005-го года по теме “Разработка математического и программного обеспечения для решения задач идентификации и оптимального управления в процессах подземной гидрогазодинамики” (Project № BBP-06 – руководитель проекта), спонсированного Азербайджанским Национальным Фондом Науки и Фондом Гражданских Исследований и Развития США; проект 2006-го года по теме “Разработка единого подхода и программного обеспечения для численного решения задач оптимизации и обратных задач в распределенных системах” (INTAS Project № 06-1000017-8909 – ответственный исполнитель проекта), спонсированного Европейским Союзом в рамках программы “INTAS – Сотрудничество с Южно-Кавказскими Республиками”; проект 2010-го года по теме “Математическое моделирование и оптимизация сложных систем, разработка программного обеспечения и численных методов решения этих задач, и их применение” (Грант № EIF-2010-1(1)-40/11 – руководитель проекта), спонсированного Фондом Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики.

Апробация работы. Основные результаты работы были доложены на следующих конференциях:

Intern. Conference "Control and Optimization with Industrial Applications" - COIA-2005, 2008, 2013 (Baku, Borovets(Bulgaria)); Науч. конференция “Теорет. и приклад. задачи операторных уравнений”, посвященная 75- летнему юбилею член-корр. НАНА, проф. Я.Д.Мамедова, (Баку, 2006); Межд. конференция «Проблемы Кибернетики и Информатики», PCI- 2006,2010,2012(Баку); Науч. Конференция, посвященная 90- летнему юбилею акад. М.Л. Расулова «Методы математической физики» (Баку, 2006); 6th İntern. İSAAC Congress (Ankara, Turkey, 2007); Респуб. науч. конференция "Прикладные математические задачи и новые информационные технологии" (Сумгаит, 2007); Межд. симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Россия, Нальчик, 2008; 2009; 2010; 2011;

2012; 2013); Межд. конференция «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений», АМАДЕ-2009 (Минск, 2009); Межд. конференция «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления» (Казахстан, Алматы, 2009); The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) (Baku, 2011); Межд. конференция «Актуальные проблемы современной Математики, Информатики и Механики-II» (Казахстан, Алматы, 2011); Intern. Conference "Optimation Methods and Applications", OPTIMA-2012 (Costa Da Caparica, Portugal, 2012), OPTIMA-2013 (Petrovac, Montenegro, 2013); Межд. конференция «Актуальные проблемы информатики и процессов управления» (Казахстан, Алматы, 2012); Межд. конференция «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященная 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева (Баку, 2013); Межд. конференция «Неньютоновские системы в нефтегазовой отрасли», посвященная 85-летнему юбилею акад. А.Х.Мирзаджанзаде (Баку, 2013).

Кроме этого, научные результаты работы были доложены на научных семинарах Института Систем Управления и Института Математики НАН Азербайджана, Научно-исследовательского Института Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, кафедры Прикладной Математики Азербайджанской Государственной Нефтяной Академии.

Опубликованные научные работы. По теме диссертационной работы опубликованы 61 научная работа. Список научных работ приводится в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, списка литературы из 234 наименований и приложения. Объем диссертации составляет 319 страниц машинописного текста, включая 61 таблицу.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность проводимых в диссертации исследований, сформулирована цель исследований, дан краткий обзор работ, связанных с темой диссертации, приводятся основные полученные результаты.

Первая глава, состоящая из 6 параграфов, посвящена разработке численных методов решения краевых задач, описываемых системами обычных дифференциальных уравнений и нагруженных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными с неразделенными точечными и краевыми условиями.

В §1.1 приведены постановки и проведен анализ как линейных, так и нелинейных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями.

В §1.2 предложен метод свертки для численного решения краевой задачи с интегральными условиями. Суть этого метода заключается в том, что интегральные условия заменяются точечными условиями без увеличения порядка системы. Замена условий осуществляется с помощью предложенной операции свертки. Постановка задачи приведена ниже.

Пусть состояние объекта описывается системой дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t), \quad t \in [t_0, T]\,. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in E^n$ – искомая n-мерная вектор-функция состояния объекта; $A(t)$ – заданная n-мерная непрерывная матричная функция, а $B(t)$ – n-мерная непрерывная вектор-функция; t_0, T – заданные времена соответственно начала и завершения процесса.

Для системы (1) заданы следующие краевые условия:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i} \overline{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau = C_0\,, \tag{2}$$

где $\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i$, $i = 1,2,...,l_1$ – заданы и упорядочены, причем $\bar{t}_i < \bar{t}_{i+1}$ и $\bar{t}_{l_1} + \Delta_{l_1} \le T$; Δ_i – заданные длины интервалов замеров состояния; $\overline{D}_i(\tau)$ – заданные матричные функции размерности ($n \times n$), C_0 – n-мерный заданный вектор.

Предполагаются выполненными все условия для существования и единственности решения задачи (1)-(2).

Введя функцию $D(t) = \sum_{i=1}^{l_1} \overline{\overline{D}}_i(t)$, $\overline{\overline{D}}_i(t) = \overline{D}_i(t)$, при $t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i]$ и $\overline{\overline{D}}_i(t) = 0$, если $t \notin [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i]$, можно заменить интегральные условия (2) эквивалентными им интегральными условиями.

$$\int_{t_0}^{T} D(\tau)x(\tau)d\tau = C_0\,. \tag{3}$$

Обозначим через $O_{n\times n}$ – матрицу с нулевыми элементами размерности $(n\times n)$, O_n – n-мерный вектор с нулевыми элементами.

Введем n-мерную вектор-функцию

$$\overline{C}(t)=\int_t^T D(\tau)x(\tau)d\tau, \tag{4}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\overline{C}(t_0)=C_0,\quad \overline{C}(T)=O_n, \tag{5}$$

Определение 1. *Если для функций* $\overline{\alpha}(t)\in E^{n\times n}$ и $\overline{\beta}(t)\in E^n$, удовлетворяющих условиям

$$\overline{\alpha}(t_0)=O_{n\times n},\qquad \overline{\beta}(t_0)=C_0, \tag{6}$$

имеет место равенство

$$\int_t^T D(\tau)x(\tau)d\tau=\overline{\alpha}(t)x(t)+\overline{\beta}(t),\ t\in[t_0,T], \tag{7}$$

тогда мы будем говорить, что эти функции сворачивают слева-направо интегральные условия (2) в точечные относительно решения $x(t)$ *системы (1).*

Если учесть в соотношении (7) условия (5), то получим:

$$\overline{\alpha}(T)x(T)+\overline{\beta}(T)=\overline{C}(T)=O_n. \tag{8}$$

(8) представляют собой локальные разделенные условия. Для определения функций $\overline{\alpha}(t),\ \overline{\beta}(t)$, сворачивающих интегральные условия (3) в локальные точечные (8) слева-направо, доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Функции* $\overline{\alpha}(t),\overline{\beta}(t)$, *являющиеся решениями следующих задач Коши:*

$$\dot{\overline{\alpha}}(t)=-\overline{\alpha}(t)A(t)-D(t),\quad \overline{\alpha}(t_0)=O_{n\times n}, \tag{9}$$

$$\dot{\overline{\beta}}(t)=-\overline{\alpha}(t)B(t),\qquad \overline{\beta}(t_0)=C_0, \tag{10}$$

осуществляют свертку слева-направо интегральных условий (3) в точечные условия (8).

Таким образом, для решения задачи (1), (2) сначала мы решаем задачи Коши (9), (10), в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений (8) n-го порядка. Из этой системы находится вектор $x(T)$. Использовав $x(T)$ в качестве начальных условий, решаем задачу Коши относительно исходной системы (1).

В §1.3 вместо интегральных условий (2) рассмотрены следующие неразделенные точечные и интегральные условия:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int_{\bar t_i}^{\bar t_i+\Delta_i}\overline{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{l_2}\widetilde{D}_j\ x(\widetilde{t}_j)=C_0. \tag{11}$$

Здесь $\overline{D}_i(\tau),\widetilde{D}_j$ – $(n\times n)$-мерные матрицы; C_0 – n-мерный вектор; $\bar t_i,\widetilde{t}_j$ – моменты времени из отрезка $[t_0,T]$ и l_1,l_2 – заданные величины.

Предполагается, что $\min(\bar t_1,\ \widetilde{t}_1)=t_0$, $\max(\bar t_{l_1}+\Delta_{l_1},\ \widetilde{t}_{l_2})=T$, и для всех $i=1,2,..,l_1,\quad j=1,2,..,l_2$ выполняются условия $\widetilde{t}_j\ \overline{\in}\ [\bar t_i,\bar t_i+\Delta_i]$.

Для решения задачи (1), (11) предложен численный метод, состоящий из двух этапов и основанный на идее метода свертки, предложенном во втором параграфе. На первом этапе интегральные условия свертываются в точечные, в результате чего получаются неразделенные многоточечные условия. На втором этапе решается полученная задача с многоточечными условиями.

В §1.4 приведена постановка краевых задач как для линейных, так и для нелинейных систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями.

В §1.5 предложен метод решения краевой задачи, описываемой системой нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с точечными и интегральными условиями.

Рассмотрим неавтономную систему точечно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+\sum_{s=1}^{l_3}B^s(t)x(\breve{t}_s)+C(t),\ \ t\in[t_0,T], \tag{12}$$

где траектория $x(t)\in E^n$ – искомое решение; непрерывные матричные функции $A(t), B^s(t), s=1,2,...,l_3$ размерности $(n\times n)$, n-мерный вектор функция $C(t)$, моменты времени нагружения $\breve{t}_s\in[t_0,T]$, $s=1,2,...,l_3$ - заданы.

Имеются следующие неразделенные точечные и интегральные условия:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int_{\bar t_i}^{\bar t_i+\Delta_i}\overline{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{l_2}\widetilde{D}_jx(\widetilde{t}_j)+\sum_{j=1}^{l_3}\breve{D}_sx(\breve{t}_s)=L_0, \tag{13}$$

где $\overline{D}_i(\tau), \widetilde{D}_j, \breve{D}_s, i=1,2,...,l_1, j=1,2,...,l_2, s=1,2,...,l_3$ – матрицы размерности $(n \times n)$; L_0 – n-мерный вектор; $\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i, \widetilde{t}_j$ – заданные упорядоченные моменты времени из $[t_0, T]$; l_1, l_2 – заданные натуральные числа.

Предполагается, что $\min(\bar{t}_1, \widetilde{t}_1, \breve{t}_1) = t_0$, $\max(\bar{t}_{l_1} + \Delta_{l_1}, \widetilde{t}_{l_2}, \breve{t}_{l_3}) = T$ и для всех $i=1,2,...,l_1$, $j=1,2,...,l_2$, $s=1,2,...,l_3$ удовлетворяются условия $\widetilde{t}_j, \breve{t}_s \in [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i]$.

Для численного решения задачи (12), (13) предложен подход, основанный на применении идеи метода свертки из параграфа 1.2.

Для свертывания слева-направо ν-го интегрального условия из (13) в точечное используется следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\int_t^T D_\nu(\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \widetilde{D}_{\nu j} x(\widetilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_{\nu s} x(\breve{t}_s) = \\ = \overline{\alpha}_\nu^*(t)x(t) + \sum_{s=1}^{l_3} \overline{\beta}_\nu^{*s}(t)x(\breve{t}_s) + \overline{\gamma}_\nu(t),\ t \in [t_0, T].\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $\overline{D}_{\nu i}$, $\widetilde{D}_{\nu j}$, $\breve{D}_{\nu s}$ – ν-ые строки n-строчных матриц соответственно $\overline{D}_i, \widetilde{D}_j$, $\breve{D}_s$; $L_{0\nu}$ – ν-ый элемент вектора L_0, *-знак транспонирования.

Будим говорить, что вектор-функции $\overline{\alpha}_\nu(t)$, $\overline{\beta}_\nu^s(t)$, $s=1,2,...,l_3$, и функция $\overline{\gamma}_\nu(t)$ осуществляют свертку ν-го интегрального условия (13) в точечное слева-направо относительно решения $x(t)$ системы нагруженных дифференциальных уравнений (12). Эти функции удовлетворяют условиям

$$\overline{\alpha}_\nu(t_0) = 0_n, \quad \overline{\beta}_\nu(t_0) = 0_n, \quad s=1,2,...,l_3, \ \overline{\gamma}_\nu(t_0) = L_{0\nu}. \tag{15}$$

После операции свертки ν-ое интегральное условие из (13) сводится к следующему точечному условию:

$$\overline{\alpha}_\nu^*(T)x(T) - \sum_{j=1}^{l_2} \widetilde{D}_{\nu j} x(\widetilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \left(\overline{\beta}_\nu^{*s}(T) - \breve{D}_{\nu s}\right) x(\breve{t}_s) = -\overline{\gamma}_\nu(T). \tag{16}$$

Используя матричную запись, можно аналогично (14) сворачивать одновременно все условия (13). На втором этапе полученные точечные условия с помощью метода сдвига приводятся к условиям Коши, после чего задача решается с использованием известных методов.

Функции $\overline{\alpha}_\nu(t)$, $\overline{\beta}_\nu^s(t)$ и $\overline{\gamma}_\nu(t)$, осуществляющие свертку слева-направо ν-го интегрального условия из (13) в точечное (16), определяются решением задачи Коши, приведенной в следующей теореме.

Теорема 1.2. *n-мерные вектор-функции $\overline{\alpha}_\nu(t)$, $\overline{\beta}_\nu^s(t)$, $s=1,2,...,l_3$, и функции $\overline{\gamma}_\nu(t)$, $m_\nu(t)$, являющиеся решением следующей задачи Коши:*

$$\dot{\overline{\alpha}}_\nu(t) = S(t)\overline{\alpha}_\nu(t) - A^*(t)\overline{\alpha}_\nu(t) - m_\nu(t)D_\nu^*(t), \quad \overline{\alpha}_\nu(t_0) = 0_n, \tag{17}$$

$$\dot{\overline{\beta}}_\nu^s(t) = S(t)\overline{\beta}_\nu^s(t) - B^{*s}(t)\overline{\alpha}_\nu(t), \quad \overline{\beta}_\nu^s(t_0) = 0_n, \ s=1,2,...,l_3, \tag{18}$$

$$\dot{\overline{\gamma}}_\nu(t) = S(t)\overline{\gamma}_\nu(t) - C^*(t)\overline{\alpha}_\nu(t), \quad \overline{\gamma}_\nu(t_0) = L_{0\nu}, \tag{19}$$

$$\dot{m}_\nu(t) = S(t)m_\nu(t), \quad m_\nu(t_0) = 1, \tag{20}$$

$$S(t) = \frac{\overline{\alpha}_\nu^*(t)A(t)\overline{\alpha}_\nu(t) + m_\nu(t)D_\nu(t)\overline{\alpha}_\nu(t) + \overline{\alpha}_\nu^*(t)\sum_{S=1}^{l_3} B^s(t)\overline{\beta}_\nu^s(t) + \overline{\gamma}_\nu(t)\overline{\alpha}_\nu^*(t)C(t)}{\overline{\alpha}_\nu^*(t)\overline{\alpha}_\nu(t) + \sum_{s=1}^{l_3} \overline{\beta}_\nu^{*s}(t)\beta_\nu^s(t) + (\overline{\gamma}_\nu(t))^2}.$$

осуществляют слева-направо свертку ν-го интегрального условия из (13) в точечное (16). При этом выполняется следующее равенство

$$\overline{\alpha}_\nu^*(t)\overline{\alpha}_\nu(t) + \sum_{s=1}^{l_3} \overline{\beta}_\nu^{*s}(t)\overline{\beta}_\nu^s(t) + (\overline{\gamma}_\nu(t))^2 = const, \quad t \in [t_0, T], \tag{21}$$

которое обеспечивает устойчивость решения задачи Коши (17)-(20).

В §1.6 приведены результаты и проведен анализ вычислительных экспериментов на примере решения тестовых задач.

Вторая глава состоит из 5 параграфов и посвящена разработке численных методов решения задач оптимального управления и параметрической идентификации для систем с сосредоточенными параметрами.

В §2.1 рассматривается задача оптимального управления процессом, описываемого линейной по фазовой переменной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t,u)x(t) + B(t,u), \ t \in [t_0, T], \tag{22}$$

где $x(t) \in E^n$ - фазовая переменная; $u(t) \in U \subset E^r$ - управляющая вектор-функция из класса кусочно-непрерывных функций, допустимые значения которой принадлежат заданному выпуклому замкнутому множеству U, проекция на которое не представляет вычислительных сложностей (например, U-параллелепипед, шар и т.д.); матричная функция $A(t,u) \neq const$ размерности $n \times n$ и n-мерная вектор-функция $B(t,u)$ непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы по u.

Заданы следующие неразделенные точечные и интегральные условия

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}} \overline{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \widetilde{D}_j x(\widetilde{t}_j) = C_0 . \qquad (23)$$

Здесь $\overline{D}_i(\tau) \in E^{(n\times n)}$ - непрерывная матричная функция и $\widetilde{D}_j \in E^{(n\times n)}$ - матрица; $C_0 - n$-мерный вектор; $\bar{t}_i, \widetilde{t}_j \in [t_0, T]$ – моменты времени из $[t_0, T]$: $\bar{t}_{i+1} > \bar{t}_i$, $\widetilde{t}_{j+1} > \widetilde{t}_j$, $i = 1,2,...,2l_1 - 1$, $j = 1,2,...,l_2 - 1$; l_1, l_2-заданы.

Предполагаем, что $\min(\bar{t}_1, \widetilde{t}_1) = t_0$, $\max(\bar{t}_{2l_1}, \widetilde{t}_{l_2}) = T$, и для всех $i = 1,2,...,2l_1$, $j = 1,2,...,l_2$ выполнены условия $\widetilde{t}_j \overline{\in} [\bar{t}_{2i-1}, \bar{t}_{2i}]$.

Требуется минимизировать следующий целевой функционал:

$$J(u) = \Phi(x(\hat{t})) + \int_{t_0}^{T} f^0(x,u,t)dt \to \min_{u(t)\in U} , \qquad (24)$$

где функция $\Phi -$ непрерывна по своим аргументам вместе с частными производными, а $f^0(x,u,t)$ непрерывно дифференцируема по (x,u) и непрерывна по t; $\hat{t} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, ..., \hat{t}_{2l_1+l_2})$ - упорядоченное объединение точек множеств $\widetilde{t} = (\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2, ..., \widetilde{t}_{l_2})$ и $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, ..., \bar{t}_{2l_1})$, т.е. $\hat{t}_j < \hat{t}_{j+1}, j = 1,2,...,2l_1 + l_2 - 1$; $x(\hat{t}) = (x(\hat{t}_1), x(\hat{t}_2), ..., x(\hat{t}_{2l_1+l_2}))^*$.

Для задачи (22)-(24) получены необходимые условия оптимальности, выведены аналитические формулы градиента и дан численный метод решения задачи.

Пусть $\psi(t)$-почти всюду непрерывно-дифференцируемая функция удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t,u)\psi(t) + \sum_{i=1}^{l_1} [\chi(\bar{t}_{2i}) - \chi(\bar{t}_{2i-1})] \overline{D}^*(t)\lambda + f_x^0(x,u,t) , \qquad (25)$$

краевым условиям

$$\psi(t_0) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\widetilde{t}_1)} \right)^* + \widetilde{D}_1^* \lambda, & \textit{если} \quad t_0 = \widetilde{t}_1, \\ \left(\dfrac{\partial \Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\bar{t}_1)} \right)^*, & \textit{если} \quad t_0 = \bar{t}_1, \end{cases} \qquad (26)$$

$$\psi(T) = \begin{cases} -\left(\dfrac{\partial \Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\widetilde{t}_{l_2})} \right)^* - \widetilde{D}_{l_2}^* \lambda, & \textit{если} \quad T = \widetilde{t}_{l_2}, \\ -\left(\dfrac{\partial \Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\bar{t}_{2l_1})} \right)^*, & \textit{если} \quad T = \bar{t}_{2l_1}, \end{cases} \qquad (27)$$

условиям скачка в промежуточных точках $\widetilde{t}_j$, $t_0 < \widetilde{t}_j < T$,

$$\psi^+(\widetilde{t}_j) - \psi^-(\widetilde{t}_j) = \left(\frac{\partial \Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\widetilde{t}_j)} \right)^* + \widetilde{D}_j^* \lambda, \quad j = 1,.2,..,2l_2, \qquad (28)$$

а также в точках $\bar{t}_i$, $i = 1,2,...,2l_1$, $t_0 < \bar{t}_i < T$

$$\psi^+(\bar{t}_i) - \psi^-(\bar{t}_i) = \left(\frac{\partial \Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\bar{t}_i)} \right)^*, \quad i = 1,2,...,2l_1, \qquad (29)$$

Здесь $\lambda \in R^n$ –неизвестный вектор множителей Лагранжа и использовано обозначение:

$$\psi^+(\bar{t}) = \psi(\bar{t} + 0), \ \psi^-(\bar{t}) = \psi(\bar{t} - 0) .$$

Выражение градиента целевого функционала в задаче (22)-(24) для каждого допустимого управления $u(t) \in U$ имеет следующий вид:

$$(grad\, J(u))^* = f_u^0(x,u,t) - \psi^*(t)[A_u^*(t,u)x(t) + B_u(t,u)], \qquad (30)$$

где $x(t)$ и $\psi(t)$ являются решениями соответственно основной (22),(23) и сопряженной (25)-(29) систем.

Теорема 2.1. *Предположим, что U-выпуклое, замкнутое множество и для управления $u_* = u_*(t) \in U$ вектор-функции $x_* = x_*(t)$, $\psi_* = \psi_*(t)$ являются соответственно решениями задач (22),(23) и (25)-(29). Тогда для оптимальности управления u_* необходимо выполнение следующего неравенства*

$$\int_{t_0}^{T}\Big(f_u^0(x_*,u_*,t)-\psi^*(t)\big(A_u^*(t,u_*)x_*(t)+B_u(t,u_*)\big)\Big)\Delta u_*(t)dt\ge 0,$$

$$\forall u(t)\in U,\ \Delta u_*(t)=u(t)-u_*(t).$$

Для численного решения задачи предлагается использовать итерационные методы оптимизации первого порядка. При применении этих методов на каждой их итерации необходимо вычислять градиент целевого функционала. Для этого при текущем управлении надо сначала решить краевую задачу (22), (23), а затем – сопряженную задачу (25)-(29). Для решения краевой задачи (22),(23) используются предложенные в §1.3 методы. Для решения сопряженной задачи (25)-(29), включающей определение вектора λ, предложен численный метод, для обоснования которого доказана теорема, выведены аналитические формулы. В конце параграфа приведен алгоритм применения методов оптимизации первого порядка к численному решению рассматриваемой задачи оптимального управления.

В §2.2 рассмотрена задача оптимального управления, описываемая системой нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t)=A(t,u)x(t)+\sum_{s=1}^{l_3}B^s(t)x(\breve{t}_s)+C(t,u)\ ,\ t\in[t_0,T]\ , \qquad (31)$$

где $x(t)\in E^n$ – фазовая переменная; $u(t)$ – управление из класса кусочно-непрерывных функций, возможные значения которой принадлежат выпуклому замкнутому множеству $U\in E^r$; матричные функции $A(t,u)\in E^{(n\times n)}$, $B^s(t)\in E^{(n\times n)}$, $s=1,2,...,l_3$, и n-мерная вектор-функция $C(t,u)$ являются непрерывными по t и непрерывно-дифференцируемыми по u, $A(t,u)\ne const$.

Заданы следующие неразделенные точечные и интегральные условия:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}}\overline{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{l_2}\widetilde{D}_jx(\widetilde{t}_j)+\sum_{j=1}^{l_3}\breve{D}_sx(\breve{t}_s)=L_0. \qquad (32)$$

Здесь $\overline{D}_i(\tau)\in E^{(n\times n)}$- непрерывная матричная функция и $\widetilde{D}_j,\breve{D}_s\in E^{(n\times n)}$- числовые матрицы; L_0 – n-мерный вектор; $\bar{t}_i,\widetilde{t}_j\in[t_0,T]$ – моменты времени, $\breve{t}_s$ – времена нагружения такие, что $\bar{t}_{i+1}>\bar{t}_i$, $\widetilde{t}_{j+1}>\widetilde{t}_j$, $i=1,2,...,2l_1-1$, $j=1,2,...,l_2-1$, $s=1,2,...,l_3$ и l_1,l_2,l_3 - заданные натуральные числа.

Предполагаем, что $\min(\bar{t}_1,\ \widetilde{t}_1,\breve{t}_1)=t_0$, $\max(\bar{t}_{2l_1},\ \widetilde{t}_{l_2},\breve{t}_{l_3})=T$ и для всех $i=1,2,..,2l_1$, $j=1,2,...,l_2$, $s=1,2,...,l_3$ выполнены условия $\widetilde{t}_j,\breve{t}_s\,\overline{\in}\,[\bar{t}_{2i-1},\bar{t}_{2i}]$ и для каждого допустимого управления $u(t)\in U$ существует решение краевой задачи (31), (32) и оно единственное.

Требуется минимизировать следующий функционал:

$$J(u)=\Phi(x(\hat{t}))+\int_{t_0}^{T}f^0(x,u,t)dt\to\min_{u(t)\in U}. \qquad (33)$$

Здесь Φ – непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам вместе со своими частными производными, а $f^0(x,u,t)$ непрерывна дифференцируема по аргументам (x,u) и непрерывна по t; $\hat{t}=(\hat{t}_1,\hat{t}_2,...,\hat{t}_{2l_1+l_2})$ является последовательным объединением множества точек $\widetilde{t}=(\widetilde{t}_1,\widetilde{t}_2,...,\widetilde{t}_{l_2})$, $\bar{t}=(\bar{t}_1,\bar{t}_2,...,\bar{t}_{2l_1})$ и $\breve{t}=(\breve{t}_1,\breve{t}_2,...,\breve{t}_s)$, причём $\hat{t}_j<\hat{t}_{j+1}, j=1,...,2l_1+l_2+l_3-1$; $x(\hat{t})=(x(\hat{t}_1),...,x(\hat{t}_{2l_1+l_2+l_3}))$.

Для рассматриваемой задачи оптимального управления получены необходимые условия оптимальности и выражение градиента целевого функционала.

Сопряженная задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t)=&-A^*(t,u)\psi(t)-\sum_{s=1}^{l_3}\delta(t-\breve{t}_s)\int_{t_0}^{T}B^{s*}(t)\psi(t)dt+\\&+\sum_{i=1}^{l_1}[\chi(\bar{t}_{2i})-\chi(\bar{t}_{2i-1})]\overline{D}^*(t)\lambda+\frac{\partial f^0(x,u,t)}{\partial x(t)},\end{aligned} \qquad (34)$$

для которой имеются краевые условия:

$$\psi(t_0)=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\widetilde{t}_1)}\right)^*+\widetilde{D}_1^*\lambda, & если\ \ t_0=\widetilde{t}_1,\\ \left(\dfrac{\partial\Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\bar{t}_1)}\right)^*, & если\ \ t_0=\bar{t}_1,\\ \left(\dfrac{\partial\Phi(x(\hat{t}))}{\partial x(\breve{t}_1)}\right)^*+\breve{D}_1^*\lambda, & если\ \ t_0=\breve{t}_1,\end{cases} \qquad (35)$$

$$\psi(T)=\begin{cases}-\left(\dfrac{\partial\Phi(x(\hat t))}{\partial x(\tilde t_{l_2})}\right)^* - \tilde D_{l_2}^*\lambda, \quad \text{если } T=\tilde t_{l_2},\\ -\left(\dfrac{\partial\Phi(x(\hat t))}{\partial x(\bar t_{2l_1})}\right)^*, \quad \text{если } T=\bar t_{2l_1},\\ -\left(\dfrac{\partial\Phi(x(\hat t))}{\partial x(\breve t_{l_3})}\right)^* - \breve D_{l_3}^*\lambda, \quad \text{если } T=\breve t_{l_3},\end{cases} \tag{36}$$

условия скачка в промежуточных точках $\tilde t_j$, $t_0<\tilde t_j<T$:

$$\psi^+(\tilde t_j)-\psi^-(\tilde t_j)=\left(\frac{\partial\Phi(x(\hat t))}{\partial x(\tilde t_j)}\right)^* + \tilde D_j^*\lambda, \quad j=1,2,...l_2, \tag{37}$$

условия скачка в точках нагружения $\breve t_s$, $s=1,2,...l_3$, $t_0<\breve t_s<T$:

$$\psi^+(\breve t_s)-\psi^-(\breve t_s)=\left(\frac{\partial\Phi(x(\hat t))}{\partial x(\breve t_s)}\right)^* + \breve D_s^*\lambda, \quad s=1,2,...l_3, \tag{38}$$

и условия скачка в граничных точках $\bar t_i, i=1,2,...,2l_1$, $t_0<\bar t_i<T$, интервалов $(\bar t_{2i-1},\bar t_{2i})$:

$$\psi^+(\bar t_i)-\psi^-(\bar t_i)=\left(\frac{\partial\Phi(x(\hat t))}{\partial x(\bar t_i)}\right)^*, \quad i=1,2,...2l_1. \tag{39}$$

Формула градиента целевого функционала в задаче (31)-(33) имеет следующий вид:

$$(grad\,J(u))^*=\frac{\partial f^0(x,u,t)}{\partial u(t)}-\psi^*(t)\left[\frac{\partial A^*(t,u)}{\partial u(t)}x(t)+\frac{\partial C(t,u)}{\partial u(t)}\right]. \tag{40}$$

Формула (40) для численного решения задачи (31)-(33) позволяет применять итерационные методы минимизации первого порядка. Для вычисления градиента функционала при заданном текущем управлении сначала необходимо решить краевую задачу (31), (32) с точечными и интегральными условиями, а далее сопряженную задачу (34)-(39) относительно системы интегро-дифференциальных уравнений. Каждая из этих двух краевых задач обладает специфическими особенностями и для их решения требуется применение специальных подходов. Для заданного управления исходная задача решалась с использованием предложенного в параграфе 1.4 метода, а присутствие неизвестного n-мерного вектора параметров λ в сопряженной задаче потребовало использования подхода, предложенного в §2.1. Приведен алгоритм численного решения задачи с применением методов оптимизации первого порядка.

В §2.3 рассматривается коэффициентно-обратная задача, описываемая нагруженной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложены не итерационные численные методы восстановления неизвестных параметров, для определения коэффициентов не требуется проведение каких-либо итераций.

Пусть поведение динамического объекта описывается следующей задачей:

$$\dot x(t)=A(t)x(t)+\sum_{s=1}^{l_3}B^s(t)x(\breve t_s)+C(t)\lambda+K(t),\ t\in[t_0,T], \tag{41}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int_{\bar t_i}^{\bar t_i+\Delta_i}\overline{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde D_j x(\tilde t_j)+\sum_{s=1}^{l_3}\breve D_s x(\breve t_s)+\hat D\lambda=L_0. \tag{42}$$

Здесь $A(t)$, $B^s(t)\in E^{n\times n}$, $s=1,2,...,l_3$, $C(t)\in E^{n\times m}$, $K(t)\in E^n$, $\overline{D}_i(\tau)\in E^{(n+m)\times n}$ – заданные непрерывные функции, $x(t)\in E^n$ – искомое фазовое состояние; $\bar t_i, \tilde t_j, \breve t_s$ – заданные моменты времени из $[t_0,T]$, такие, что $t_0\le\bar t_i<\bar t_i+\Delta_i<\bar t_{i+1}\le T$, $t_0\le\tilde t_j<\tilde t_{j+1}\le T$, $t_0\le\breve t_s<\breve t_{s+1}\le T$, $i=1,2,...,l_1$, $j=1,2,...,l_2$, $s=1,2,...,l_3$; Δ_i – заданные длины интервалов замера состояния; $\tilde D_j, \breve D_s\in E^{(n+m)\times n}$, $\hat D\in E^{(n+m)\times m}$, $L_0\in E^{n+m}$ - заданные матрицы, l_1,l_2,l_3 – заданные натуральные числа.

В задаче требуется определить неизвестный m-мерный вектор постоянных параметров $\lambda\in E^m$ и n-мерную вектор-функцию $x(t)\in E^n$.

На первом этапе каждая ν – ая строка интегрального условия (42) приводится к следующему многоточечному условию:

$$\hat\theta_\nu^0 x(T)+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde D_{\nu j}x(\tilde t_j)+\sum_{s=1}^{l_3}\hat\eta_\nu^s x(\breve t_s)+\hat\delta_\nu\,\lambda=\hat\mu_\nu,\ \nu=1,2,...,n+m. \tag{43}$$

На втором этапе для сведения многоточечных неразделенных условий (43) к условиям Коши применяется метод сдвига. Функции, осуществляющие сдвиг условий, согласно следующей теореме определяются из решения задач Коши.

Теорема 2.2. Пусть n-мерные функции $\overline{\theta}_\nu^0(t)$, $\overline{\eta}_\nu^s(t)$, $s=1,2,...,l_3$, m-мерные вектор-функции $\overline{\delta}_\nu(t)$ и функция $\overline{\mu}_\nu(t)$ являются решениями следующих задач Коши

$$\dot{\overline{\theta}}_\nu^0(t)=S^1(t)\overline{\theta}_\nu^0(t)-\overline{\theta}_\nu^0(t)A(t), \quad \overline{\theta}_\nu^0(T)=\widehat{\theta}_\nu^0, \tag{44}$$

$$\dot{\overline{\eta}}_\nu^s(t)=S^1(t)\overline{\eta}_\nu^s(t)-\overline{\theta}_\nu^0(t)B^s(t), \quad \overline{\eta}_\nu^s(T)=\widehat{\eta}_\nu^s, \quad s=1,2,...,l_3, \tag{45}$$

$$\dot{\overline{\delta}}_\nu(t)=S^1(t)\overline{\delta}_\nu(t)-\overline{\theta}_\nu^0(t)C(t), \quad \overline{\delta}_\nu(T)=\widehat{\delta}_\nu, \tag{46}$$

$$\dot{\overline{\mu}}_\nu(t)=S^1(t)\overline{\mu}_\nu(t)+\overline{\theta}_\nu^0(t)K(t), \quad \overline{\mu}_\nu(T)=\widehat{\mu}_\nu, \tag{47}$$

$$\dot{M}(t)=S^1(t)M(t), \quad M(T)=1, \tag{48}$$

$$S^1(t)=\left[\overline{\theta}_\nu^0(t)A(t)\overline{\theta}_\nu^{0*}(t)+\overline{\theta}_\nu^0(t)\sum_{s=1}^{l_3}B^s(t)\overline{\eta}_\nu^{s*}(t)-\overline{\mu}_\nu(t)\overline{\theta}_\nu^{0*}(t)K(t)\right]/R(t),$$

$$R(t)=\overline{\theta}_\nu^0(t)\overline{\theta}_\nu^{0*}(t)+\sum_{s=1}^{l_3}\overline{\eta}_\nu^s(t)\overline{\eta}_\nu^{s*}(t)+\overline{\mu}_\nu^2(t).$$

Тогда эти функции осуществляют сдвиг условий (43) на отрезке $t\in[\widetilde{t}_{l_2},T]$ справа-налево и верно соотношение $R(t)=const=R(T)$, $t\in[\widetilde{t}_{l_2},T]$.

Во время последовательного сдвига многоточечных неразделенных условий необходимо запоминать значения вектор-функций и матриц $\theta^0(t)$, $\eta^s(t)$, $s=1,2,...,l_3$, $\delta(t)$, $\mu(t)$ в моменты нагружения $\breve{t}_1,\breve{t}_2,....,\breve{t}_{l_3}$ и в моменты времени $\widetilde{t}_1,\widetilde{t}_2,....,\widetilde{t}_{l_2}$. После l_2 шагов сдвига условий влево мы получаем систему линейных алгебраических уравнений размерности $(n+m+n(l_3+l_2))$ относительно неизвестных $\left(x(\widetilde{t}_1),x(\widetilde{t}_2),...,x(\widetilde{t}_{l_2}),x(\breve{t}_1),x(\breve{t}_2),...,x(\breve{t}_{l_3}),\ x(t_0),\lambda\right)$. Решив ее и подставляя полученные значения $x(\breve{t}_1),x(\breve{t}_2),...,x(\breve{t}_{l_3}),\lambda$ в правую часть уравнения (41), получим задачу Коши с начальным условием $x(t_0)=x(\widetilde{t}_0)$, которая решается одним из известных методов.

В §2.4 предложен численный метод решения коэффициентно-обратной задачи относительно динамических процессов, описываемых

линейными неавтономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается задача идентификации параметров динамической системы

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)C+F(t), \quad t\in[t_0,T]. \tag{49}$$

Здесь: $x(t)\in E^n$-фазовое состояние системы; $C=(C_1,C_2,...,C_l)^*\in E^l$ – искомые параметры; $A(t)$, $B(t),F(t)$ –заданные матричные функции, непрерывные по t, $t\in(t_0,T]$, соответственно размерности $(n\times n)$, $(n\times l)$, $(n\times 1)$.

Будем предполагать, что $rang\,A(t)=n$ при $t\in[t_0,T]$, а n-мерные вектор-функции $B^i(t)$, $i=1,2,...,l$ - столбцы матрицы $B(t)$, удовлетворяют условию линейной независимости.

Заданы следующие нелокальные условия:

$$\sum_{k=1}^{m_0}R_k x(\breve{t}_k)=R_0, \tag{50}$$

где R_k – n-мерная квадратная матрица, R_0 – n-мерный вектор, $\breve{t}_k\in[t_0,T]$, $k=1,2,...,m_0$ –заданы.

Для идентификации параметров C заданы дополнительные условия по результатам наблюдений. Возможны следующие виды результатов измерения состояния при проведении наблюдений:

а) разделенные многоточечные условия вида:

$$x_\nu(\breve{t}_i)=x_{\nu i}, \quad \nu=1,2,...,n_i,\ i=1,2,...,m_0. \tag{51}$$

Здесь n_i – число наблюдаемых координат фазового состояния $x(t)$ в моменты времени $\breve{t}_1,...,\breve{t}_{m_0}$, $L=\sum_{i=1}^{m_0}n_i$ – общее число дополнительных наблюдений для определения вектора C.

б) неразделенные многоточечные нелокальные условия

$$\sum_{k=1}^{s_2}\widetilde{\alpha}_k x(t_k)=\widetilde{\beta}, \tag{52}$$

где матрицы $\widetilde{\alpha}_k$ размерности $(L\times n)$ и L – мерный вектор $\widetilde{\beta}$ заданы.

в) интегральные условия

$$\int_{t_0}^{T}\alpha(\tau)x(\tau)d\tau=\beta\,, \qquad (53)$$

где матрицы $\alpha(\tau)$ размерности $(L\times n)$ и L – мерный вектор β заданы.

г) условия смешанного вида с участием неизвестных параметров:

$$\sum_{i=1}^{s_1}\int_{\bar t_i}^{\bar t_{i+1}}\alpha_i^1(\tau)x(\tau)d\tau+\sum_{k=1}^{s_2}\alpha_k^2x(\breve t_k)+\alpha^3C=\beta\,, \qquad (54)$$

где $\bar t_i,\ \breve t_k\in[t_0,T]$, $i=1,2,...,s_1$, $k=1,2,...,s_2$ -заданы, $\alpha_i^1(t),\ \alpha_k^2-$ матрицы размерности $(L\times n)$, α^3-матрица размера $(L\times l)$, $\beta-L$-мерный вектор.

Для всех видов измерения будем предполагать, что проводимые эксперименты независимы, причем выполнено условие $L\geq l$.

Решение задачи (49), (50) $x(t)$ будем искать в виде:

$$x(t)=x^0(t)+\sum_{i=1}^{l}x^i(t)C_i\,,\quad t\in[t_0,T]\,, \qquad (55)$$

где пока произвольные вектор-функция $x^0(t)$ и $x^i(t)$ должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^{m_0}R_kx^0(\breve t_k)=R_0\,,\quad \sum_{k=1}^{m_0}R_kx^i(\breve t_k)=0_n\,,\ i=1,2....,l\,. \qquad (56)$$

Определим функции $x^i(t)$, $i=0,1,...,l$, таким образом, чтобы при $t\in[t_0,T]$ вектор-функция $x(t)$, имеющая представление (55), удовлетворяла системе уравнений (29) для произвольного значения вектора C.

Теорема 2.3. *Пусть функции $x^i(t)$, $i=0,1,...,l$, при $t\in[t_0,T]$ являются решениями следующих задач:*

$$\dot x^0(t)=A(t)x^0(t)+F(t),\qquad \sum_{k=1}^{m_0}R_kx^0(\breve t_k)=R_0\,, \qquad (57)$$

$$\dot x^i(t)=A(t)x^i(t)+B^i(t),\qquad \sum_{k=1}^{m_0}R_kx^i(\breve t_k)=0_n\,,\ i=1,2....,l\,. \qquad (58)$$

Тогда функции $x(t)$, определяемые формулой (55), удовлетворяют условиям (49), (50) для произвольных значений вектора C.

Используя значения решения задач (57), (58) в моменты времени, которые участвуют в проводимых наблюдениях (51)-(54), получим систему из L линейных алгебраических уравнений относительно $C\in E^l$. Решая эту систему, мы определим неизвестные параметры C, которые, подставляя в (49), совместно с какими-либо n условиями из проведенных наблюдений позволят определить искомую вектор-функцию $x(t)$.

В §2.5 построены тестовые примеры для рассматриваемых задач оптимального управления и коэффициентно-обратных задач, проведены численные эксперименты и сделан анализ полученных результатов решения задач.

Третья глава посвящена разработке численных методов решения различных краевых задач для обычных и нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными.

В §3.1 даны постановки краевых задач, описываемых уравнениями параболического типа с нелокальными условиями. Здесь даны комментарии, связанные с имеющими известными результатами исследований этих задач.

В §3.2 предложен численный метод решения краевой задачи относительно уравнения параболического типа с нелокальными условиями.

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<l,0<t\leq T\}$ рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\xi(x,t)\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+\xi_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\xi_2(x,t)u(x,t)+f(x,t)\,, \qquad (59)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ \ 0\leq x\leq l, \qquad (60)$$

$$\alpha_{11}(t)u(0,t)+\alpha_{12}(t)u_x(0,t)+\beta_{11}(t)u(l,t)+\beta_{12}(t)u_x(l,t)=\gamma_1(t)\,,\ 0\leq t\leq T\,, \qquad (61)$$

$$\alpha_{21}(t)u(0,t)+\alpha_{22}(t)u_x(0,t)+\beta_{21}(t)u(l,t)+\beta_{22}(t)u_x(l,t)=\gamma_2(t)\,,\ 0\leq t\leq T\,. \qquad (62)$$

Здесь $u(x,t)$ - искомая функция, определенная в области Ω; t и x являются соответственно временной и фазовой координатами; T и l - заданные положительные числа; $\alpha_{ij}(t),\beta_{ij}(t),\gamma_j(t)$, $i,j=1,2$, заданные непрерывно-дифференцируемые функции на отрезке $[0,T]$, а $\varphi(x)$ - заданная непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[0,l]$. Предполагаем, что следующие функции в (59) являются гладкими:

$\xi(x,t), \xi_1(x,t),\ \xi_2(x,t),\ \ f(x,t) \in C^{2,1}(\Omega)$; кроме того, удовлетворяются следующие условия:

$$0 < \xi(x,t) \le c_1,\ \ \xi_1(x,t) \le c_2, 0 < \xi_2(x,t) \le c_3,\ \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| \le c_4,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – заданные положительные константы.

Для решения этой краевой задачи предложены два численных метода. В первом пункте этого параграфа описан метод решения, основанный на методе сеток; во втором пункте этого параграфа описан подход, основанный на применении метода прямых.

В §3.3 приведены численные методы решения нелокальных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов с неразделенными точечными и интегральными условиями. Рассмотрены два варианта постановок задач. В первом случае начальные условия заданы в классической форме, а краевые условия – в форме неразделенных точечных и интегральных условий. Во втором случае начальные условия заданы в форме неразделенных точечных и интегральных условий, а краевые условия – в классической форме.

Используя метод прямых, исходная задача приводится к нелокальной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями. Для численного решения этих задач используется предложенный во второй главе метод свертки нелокальных условий.

§3.4 посвящен разработке численного метода решения краевой задачи относительно нагруженного дифференциального уравнения.

Рассматривается процесс, описываемый нагруженным уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Im(x,t)u(x,t) + N(x,t)u(x,t) + f(x,t)\,,\ (x,t)\in\Omega=(0,1)\times(0,T]. \quad (63)$$

Здесь $\Im(x,t)$ – линейный эллиптической оператор:

$$\Im(x,t)u(x,t) = \xi(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \xi_2(x,t)u(x,t)\,, \quad (64)$$

$N(x,t)$ – линейный оператор нагружения. Рассмотрены следующие его виды:

$$N(x,t)u(x,t) = \sum_{s=1}^{l} \hat{b}_s(x,t)u(\hat{x}_s,t)\,, \quad (65)$$

$$N(x,t)u(x,t) = \sum_{s=1}^{l} \breve{b}_s(x,t)u(x,\breve{t}_s)\,, \quad (66)$$

$$N(x,t)u(x,t) = \sum_{s=1}^{l_1} \hat{b}_s(x,t)u(\hat{x}_s,t) + \sum_{s=1}^{l_2} \breve{b}_s(x,t)u(x,\breve{t}_s)\,, \quad (67)$$

$$N(x,t)u(x,t) = \sum_{s=1}^{l} b_s(x,t)u(\hat{x}_s,\breve{t}_s)\,. \quad (68)$$

В выражениях (65)-(68) точки $\hat{x}_s \in (0,1)$ и моменты времени $\breve{t}_s \in (0,T),\ \ s = 1,2,...,l$, – заданы. Нагружение (65) называют точечным в пространстве, (66)-точечным нагружением во времени, (68) является точечным нагружением одновременно во времени и в пространстве. Заданы начальные и краевые условия, которые для конкретности определим следующим образом:

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ x \in [0,1]\,, \quad (69)$$

$$u(0,t) = \psi_0(t),\ \ u(1,t) = \psi_1(t),\ \ t \in [0,T]\,, \quad (70)$$

причем выполняются условия согласования:

$$\varphi(0) = \psi_0(0),\ \ \varphi(1) = \psi_1(0)\,,$$

где функции $\varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t)$ непрерывны по своим аргументам.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (63) являются гладкими и ограниченными функциями по своим переменным.

В зависимости от формы задания нагруженного линейного оператора $N(x,t)$ рассматриваются четыре краевые задачи относительно нагруженного дифференциального уравнения.

Для численного решения рассматриваемых задач использовались методы их конечно-разностной аппроксимации. В общем случае дифференциальный оператор и оператор нагружения в уравнении (63) вследствие взаимной независимости могут быть аппроксимированы разными способами: как явной, так и неявной схемами. Для аппроксимации дифференциального уравнения (63) используются различные варианты явной и неявной схем: 1) неявная схема аппроксимации обоих операторов – дифференциального и нагружения; 2) неявная схема аппроксимации дифференциального оператора и явная схема аппроксимации оператора нагружения; 3) явная схема аппроксимации дифференциального оператора и неявная схема аппроксимации оператора нагружения; 4) явная схема аппроксимации обоих операторов – дифференциального и нагружения. Таким образом, рассматриваются все четыре варианта схем аппроксимации каждой из четырех вариантов постановок нагруженной краевой задачи.

Численный метод решения краевых задач относительно рассматриваемых выше нагруженных дифференциальных уравнений, основанный на методе сеток, приводится к решению линейных систем уравнений большой размерности со специальной структурой. Используя принцип суперпозиции для линейных систем, предложена численная схема решения полученных систем алгебраический уравнений.

В §3.5 для численного решения краевой задачи относительно нагруженного уравнения параболического типа с нелокальными условиями (61)-(62) предложен новый подход, основанный на применении метода прямых.

В §3.6 предложены численные методы решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения параболического типа (63) с неразделенными точечными и интегральными условиями. Здесь рассмотрены краевые задачи в случае задания оператора нагружения в форме (65), (66). Для каждой краевой задачи рассмотрены два случая. В первом случае начальное условие задано в классической форме, а краевые условия – в форме неразделенных точечных и интегральных условий. Во втором случае начальное условие задано в форме неразделенных точечных и интегральных условий, а краевые условия – в классической форме. Применяя метод прямых, исходная задача приводится к нелокальной краевой задаче относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями. Для численного решения этих задач используется предложенный метод свертки нелокальных неразделенных условий.

В §3.7 приведены результаты численных экспериментов и проведен их анализ.

Четвертая глава посвящена разработке численных методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами с нелокальными условиями.

В §4.1 получены аналитические формулы градиента в задаче оптимального управления процессами, описываемыми нагруженными дифференциальными уравнениями параболического типа с нелокальными условиями. Получены также необходимые условия оптимальности.

В §4.2 приведен численный метод решения рассматриваемой задачи оптимального управления. При заданном значении управления для

численного решения нелокальной краевой задачи были использованы предложенные в параграфе 3.2 методы. Так как сопряженная задача обладает специфической особенностью, то для ее численного решения использованы два новых подхода.

В §4.3 исследованы постановки одного класса задач синтеза оптимального управления процессами нагрева стержня (мембраны) в печи. Информация о состоянии процесса $u(x,t)$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,T]$, определяется посредством замеренных значений температуры в отдельных точках нагреваемого стержня с использованием установленного в печи измерительного прибора. Процесс нагревания стержня осуществляется за счет управления внутренней температурой печи $\vartheta(t)$.

Математическая модель управляемого процесса описывается следующим дифференциальным уравнением параболического типа:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \alpha\left[\vartheta(t) - u(x,t)\right], \ (x,t) \in \Omega = (0,l)\times(0,T], \quad (71)$$

$$u_x(0,t) = \lambda\left[u(0,t) - \vartheta(t)\right], \quad t \in (0,T], \quad (72)$$

$$u_x(l,t) = -\lambda\left[u(l,t) - \vartheta(t)\right], \quad t \in (0,T] \ . \quad (73)$$

Здесь $a^2 = k/c\rho = const > 0$ - коэффициент температуропроводности; $\alpha = h/c\rho$ и $\lambda = h/k$ - приведенные коэффициенты теплообмена между средой и стержнем в печи, соответственно по длине и на концах стержня; $h-$ коэффициент теплообмена; $k-$коэффициент теплопроводности; $c-$ коэффициент удельной теплоемкости, $\rho-$плотность материала.

Начальную температуру стержня для простоты будем считать постоянной по ее длине, но различной для разных стержней. При этом задано некоторое допустимое множество (интервал) возможных начальных значений температуры $B = [\underline{B}, \overline{B}]$:

$$u(x,0) = b = const, \ b \in B, \ x \in [0,l] \ , \quad (74)$$

с заданной функцией плотности начальных температур $\rho_B(b)$ такой, что

$$\int_B \rho_B(b)db = 1, \quad \rho_B(b) \ge 0, \quad b \in B \ . \quad (75)$$

Синтез управления температурой в печи производится за счет того, что в заданных L точках $\bar{x}_i \in [0,l]$ стержня с помощью датчиков измеряется текущая температура $u(\bar{x}_i,t)$, $i=1,2,...,L$, в зависимости от значений которых назначается текущая температура $\vartheta(t)$ в печи.

Пусть $\gamma_i, i=1,2,...,L$ – весовые коэффициенты, характеризующие важность учета значения температуры в замеренных точках, причем

$$\sum_{i=1}^{L}\gamma_i = 1,\ 0 \le \gamma_i \le 1,\ i=1,2,...,L.$$

Обозначим через

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^{L}\gamma_i u(\bar{x}_i,t),\ t\in[0,T],$$

текущую “усредненную” температуру стержня по замеренным данным. Это значение используется для формирования синтезируемого управления температурой в печи:

$$\vartheta(t) = \vartheta(t;K,\bar{\gamma}) = K(t)\tilde{u}(t) = K(t)\sum_{i=1}^{L}\gamma_i u(\bar{x}_i,t), \quad t\in[0,T], \tag{76}$$

где $K(t)$-оптимизируемый параметр регулирования (коэффициент усиления), определяющий температуру печи. Неизвестный вектор $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_L)^*$ в общем случае может быть функцией времени, но для простоты будем считать его значение постоянным.

В практических приложениях на параметр регулирования $K(t)$ могут быть наложены ограничения, определенные технологическими требованиями:

$$\underline{K} \le K(t) \le \overline{K}, \qquad t\in[0,T], \tag{77}$$

где $\underline{K}$, $\overline{K}$ -заданные соответственно верхнее и нижнее допустимые значения коэффициента усиления.

Если подставить выражение управления (76) в постановку задачи (71)-(73), то получим нагруженную краевую задачу.

Введем следующий критерий качества процесса нагрева:

$$J(K,\bar{\gamma}) = \int_B I(K,\gamma;b)\rho_B(b)db + \varepsilon_1\|K(t)-K_0\|^2_{L_2[0,T]} + \varepsilon_2\|\gamma-\gamma_0\|^2_{E^L}, \tag{78}$$

где

$$I(K,\gamma;b) = \int_0^l \mu(x)[u(x,T;K,\gamma,b)-U(x)]^2 dx, \tag{79}$$

здесь $U(x)$ – заданная функция; $\mu(x)\ge 0$ -заданная весовая функция, определяющая степень важности нагрева какой-либо части стержня; $u(x,t;K,\gamma;b)$ – решение краевой задачи (71)-(73) при управляющих параметрах $K=K(t),\gamma$ и начальном условии $u(x,0)=b, x\in[0,l]$; $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0,\ K_0\in R^1, \gamma_0\in R^L$ -параметры регуляризации, удовлетворяющие (76),(77).

Сформулированная задача (71)-(79) относится к задачам параметрического оптимального управления системами с распределенными параметрами и имеет ряд специфических особенностей. Во-первых, процесс описывается нагруженным параболическим уравнением; во-вторых, краевые условия имеют нелокальный характер; в-третьих, начальные условия не заданы точно, а задано множество возможных их значений; в-четвертых, имеются наблюдения за состоянием процесса в отдельных точках стержня, количественные значения которых используются для регулирования процессом; в-пятых, на значения коэффициента усиления $K(t)$ имеются ограничения технологического характера; в-шестых, управляющее воздействие $\vartheta(t)$ зависит от времени и одинаково для всех пространственных точек стержня (эта специфика больше относится к технологической, а не к математической части постановки).

В §4.4 получено аналитическое выражение градиента рассматриваемой задачи, а также сформулированы необходимые условия оптимальности, которые позволяют использовать численные методы решения задач оптимизации первого порядка. Описан численный метод решения задачи.

Сопряженная система имеет следующий вид:

$$\psi_t(x,t) = -a^2\psi_{xx}(x,t) + \alpha\psi(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega, \tag{80}$$

$$\psi(x,T) = -2\mu(x)(u(x,T)-U(x)),\ x\in[0,l], \tag{81}$$

$$\psi_x(0,t) = \lambda\psi(0,t), \quad t\in(0,T], \tag{82}$$

$$\psi_x(l,t) = -\lambda\psi(l,t), \quad t\in(0,T], \tag{83}$$

где в точках $\bar{x}_i$, $i=1, 2,...,L$, при $t\in[0,T]$ удовлетворяются условия:

$$\psi^+(\bar{x}_i,t) = \psi^-(\bar{x}_i,t),\ i=1,2,...,L, \tag{84}$$

$$\psi_x^+(\bar{x}_i,t)-\psi_x^-(\bar{x}_i,t)=$$
$$=-K(t)\gamma_i\left[\lambda(\psi(l,t)+\psi(0,t))+\frac{\alpha}{a^2}\int_0^l\psi(x,t)dx\right],\ i=1,2,...,L. \quad (85)$$

Теорема 4.1. *В задаче (71)-(79) компоненты градиента функционала относительно управления $K=K(t)$ и параметров γ определяются формулами:*

$$grad_K J(K,\gamma)=\int_B\left[\alpha\int_0^l\psi(x,t)dx\sum_{i=1}^L\gamma_i u(\bar{x}_i,t)-\right.$$
$$\left.-a^2\lambda\sum_{i=1}^L\gamma_i u(\bar{x}_i,t)\big(\psi(0,t)+\psi(l,t)\big)\right]\rho_B(b)db+2\varepsilon_1(K(t)-K_0),\ t\in[0,T],$$

$$grad_\gamma J(K,\gamma)=\int_B\left[\int_0^T\left[K(t)u(\bar{x},t)\left(\alpha\int_0^l\psi(x,t)dx-\lambda a^2(\psi(0,t)+\psi(l,t))\right)\right]dt\right]\times$$
$$\times\rho_B(b)db+2\varepsilon_2(\gamma-\gamma_0).$$

Здесь $u(x,t)=u(x,t;K,\gamma;b), \psi(x,t)=\psi(x,t;K,\gamma;b)$ - являются решениями соответственно основной (71)-(74) и сопряженной (80)-(85) краевых задач при допустимом начальном условии $u(x,0)=b$. Через $u(\bar{x},t)=(u(\bar{x}_1,t),...,u(\bar{x}_L,t))^*$ обозначен $L-$мерный вектор.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если пара $(K^*(t),\gamma^*)$ является оптимальной в задаче (71)-(79), тогда в достаточно малой его окрестности для всех допустимых пар $(K(t),\gamma)$ выполняется неравенство*

$$\big(grad_K J(K,\gamma), grad_\gamma J(K,\gamma)\big)\begin{pmatrix}K(t)-K^*\\ \gamma-\gamma^*\end{pmatrix}\geq 0.$$

Для численного решения рассматриваемой задачи оптимального управления использованы методы оптимизации первого порядка. Для этого на каждой итерации необходимо решать основную краевую задачу (71)–(74) и сопряженную ей краевую задачу (80)–(85) относительно нагруженного уравнения с нелокальными условиями. Для численного решения краевой задачи применяется метод прямых. Далее для численного решения краевых задач относительно системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с получаемыми

нелокальными условиями используются методы, предложенные в главе 3. Для решения сопряженных краевых задач, после применения метода прямых, предлагается численный метод решения, основанный на последовательном сдвиге краевых условий, например, слева-направо, т.е. из точки $x=0$ в точку $x=l$.

В §4.5 приведены результаты проведенных численных экспериментов.

Пятая глава посвящена разработке численных методов решения некоторых коэффициентно-обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

В **§5.1 и §5.2** предложены численные методы решения коэффициентно-обратных задач относительно параболических и гиперболических уравнений. Подлежащие восстановлению коэффициенты зависят либо от временной, либо от пространственной переменной. Для идентификации этих коэффициентов имеются результаты проведенных наблюдений. Дополнительные условия могут быть заданы в точечной, суммарной и/или интегральной формах. Применением метода прямых исходная задача приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от неизвестных параметров. Для решения этой системы предложен подход, согласно которому используется специальное разложение для решения краевой задачи относительно исходной системы дифференциальных уравнений. В результате решение задачи параметрической идентификации сводится к решению вспомогательной краевой задачи и системы алгебраических уравнений.

§5.3 посвящен разработке численных методов решения коэффициентно-обратных краевых задач относительно нагруженных параболических уравнений. Рассмотрена следующая коэффициентно-обратная задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\Im(x,t)u(x,t)+N(x,t)u(x,t)+F(x,t;C)+f(x,t),$$
$$(x,t)\in\Omega=(0,a)\times(0,T]. \quad (86)$$

Здесь: $\Im(x,t)$ − линейный эллиптический оператор, заданный в форме (64), а $N(x,t)$ – линейный оператор нагружения, заданный в одной из форм (65) или (66).

В зависимости от формы задания оператора нагружения $N(x,t)$ функция $F(x,t;C)$ может принимать одну из нижеследующих форм:

$$F(x,t;C)=\sum_{i=1}^{l}B_i(x,t)C_i(t), \tag{87}$$

$$F(x,t;C)=\sum_{i=1}^{l}B_i(x,t)C_i(x). \tag{88}$$

Здесь: $B_i(x,t),\ i=1,2,...,l$ – заданная последовательность непрерывных линейно-независимых функций, $C(t)=(C_1(t),C_2(t),...,C_l(t))^*$ и $C(x)=(C_1(x),C_2(x),...,C_l(x))^*$ - искомые l – мерные вектор-функции.

Начальные и краевые условия заданы в следующей форме:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a], \tag{89}$$

$$u(0,t)=\psi_0(t),\ u(a,t)=\psi_1(t),\ t\in[0,T], \tag{90}$$

причем выполнены условия согласования:

$$\varphi(0)=\psi_0(0),\ \varphi(a)=\psi_1(0),$$

и $\varphi(x),\psi_0(t),\psi_1(t)$ – непрерывные по своим аргументам функции.

В этом параграфе в зависимости от формы оператора нагружения $N(x,t)$, рассматриваются две задачи:

1) Если в дифференциальном уравнении (86) оператор нагружения $N(x,t)$ задается в форме (65), тогда функция $F(x,t;C)$ берется в форме (87). В этом случае рассматривается задача (86), (65), (87), (89), (90) (которую мы назовем **задачей А**), заключающаяся в определении вектор-функции $C(t)$.

В задаче А для восстановления вектор-функции $C(t)$ необходимо задать дополнительные условия. Эти условия могут быть заданы в различной форме, в зависимости от результатов наблюдений и специфики замеров:

а) как разделенные многоточечные условия:

$$u(x_i,t)=\Phi_i(t),\ i=1,2,...,L,\quad 0\le t\le T; \tag{91}$$

б) как нелокальные многоточечные условия:

$$\sum_{k=1}^{s_2}\tilde{\alpha}^k(t)u(\tilde{x}_k,t)=\Phi_0(t),\quad 0\le t\le T; \tag{92}$$

в) как интегральные условия:

$$\int_0^a\alpha(x,t)u(x,t)dx=\Phi_0(t),\quad 0\le t\le T. \tag{93}$$

2) Если в дифференциальном уравнении (86) оператор нагружения $N(x,t)$ задается в форме (66), тогда функция $F(x,t;C)$ берется в форме (88). В этом случае рассматривается задача (86), (66), (88), (89), (90) (которую мы назовем **задачей Б**), в которой необходимо определить вектор-функцию $C(x)$. Для восстановления вектор-функции $C(x)$ в **задаче Б** необходимые дополнительные условия могут быть заданы в различной форме в зависимости от вида проводимых наблюдений:

а) как разделенные многоточечные условия:

$$u(x,t_i)=\Phi_i(x),\ i=1,2,...,l,\quad 0\le x\le a; \tag{94}$$

б) как нелокальные многоточечные условия:

$$\sum_{i=1}^{s_2}\tilde{\alpha}^i(x)u(x,t_i)=\Phi_0(x),\qquad 0\le x\le a; \tag{95}$$

в) как интегральные условия:

$$\int_0^T\alpha(x,t)u(x,t)dt=\Phi_0(x),\ 0\le x\le a. \tag{96}$$

Применением метода прямых исходная задача приводится к системе нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами; для её решения предложен новый подход. В результате решение задачи параметрической идентификации сводится к решению вспомогательной краевой задачи и системы алгебраических уравнений.

В §5.4 предложены численные методы решения коэффициентно-обратных задач относительно нагруженных параболических уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями.

Для идентификации функций $C_i(x)$, $C_i(t)$ начально-краевые условия задаются в форме неразделенных точечных и интегральных условий.

Если оператор нагружения $N(x,t)$ задается в форме (65), тогда начальные условия рассматриваются в виде:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le a, \tag{97}$$

а краевые условия вместе с дополнительными условиями (переопределения) в виде:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+\Delta_i}\overline{D}_i(x,t)u(x,t)dx+\sum_{j=1}^{l_2}\widetilde{D}_j(t)u(\widetilde{x}_j,t)+\sum_{s=1}^{l_3}\widehat{D}_s(t)u(\widehat{x}_s,t)=L_0(t). \qquad (98)$$

Если оператор нагружения задается в форме (66), тогда начальные условия вместе с дополнительными условиями рассмотрены в форме неразделенных точечных и интегральных условий

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i}\overline{K}_i(x,t)u(x,t)dt+\sum_{j=1}^{l_2}\widetilde{K}_j(x)u(x,\widetilde{t}_j)+\sum_{s=1}^{l_3}\breve{K}_s(x)u(x,\breve{t}_s)=L_0(x), \qquad (99)$$

а краевые условия в форме:

$$u(0,t)=\psi_1(t),\ u(a,t)=\psi_2(t), \quad 0\le t\le T. \qquad (100)$$

Здесь $\bar{t}_i, \widetilde{t}_j, \breve{t}_s$ – заданные на отрезке $[0,T]$ упорядоченные моменты времени, т.е. $0\le\bar{t}_i<\bar{t}_i+\Delta_i<\bar{t}_{i+1}\le T$, $0\le\widetilde{t}_j<\widetilde{t}_{j+1}\le T$, $0\le\breve{t}_s<\breve{t}_{s+1}\le T$, $\bar{t}_i+\Delta_i\in[0,T]$; $\min(\bar{t}_1,\widetilde{t}_1)=0$, $\max(\bar{t}_{l_1}+\Delta_1,\widetilde{t}_{l_2})=T$ и для всех $i=1,2,...,l_1$, $j=1,2,...,l_2$ выполняются условия $\widetilde{t}_j\,\overline{\in}\,[\bar{t}_i,\bar{t}_i+\Delta_i]$; $\bar{x}_i,\widetilde{x}_j,\breve{x}_s\in[0,a]$, $0\le\bar{x}_i<\bar{x}_i+\Delta_i<\bar{x}_{i+1}\le a$, $0\le\widetilde{x}_j<\widetilde{x}_{j+1}\le a$, $0\le\breve{x}_s<\breve{x}_{s+1}\le a$, $\bar{x}_i+\Delta_i\in[0,a]$, $\min(\bar{x}_1,\widetilde{x}_1)=0$, $\max(\bar{x}_{l_1}+\Delta_1,\widetilde{x}_{l_2})=a$ и для всех $i=1,2,...,l_1$, $j=1,2,...,l_2$ выполняются условия $\widetilde{x}_j\,\overline{\in}\,[\bar{x}_i,\bar{x}_i+\Delta_i]$; $\varphi(x)$, $\psi_1(t),\psi_2(t)$, $(l+1)$-мерные вектор-функции $\overline{K}_i(x,t)$, $\widetilde{K}_j(x)$, $\breve{K}_s(x)$, $L_0(x)$ - непрерывно дифференцируемые по своим аргументам; $(l+2)$-мерные вектор-функции $\overline{D}_i(x,t)$, $\widetilde{D}_j(t)$, $\widehat{D}_s(t)$, $L_0(t)$ – заданы.

В этом параграфе в зависимости от формы задания оператора нагружения $N(x,t)$ рассмотрены следующие две задачи:

Задача А состоит в определении вектор-функции $C(t)$. А именно, в дифференциальном уравнении (86) оператор нагружения $N(x,t)$ берется в форме (65), а функция $F(x,t;C)$ - в форме (87). В этом случае рассматривается задача (86), (65), (87), (97), (98).

Задача Б состоит в определении вектор-функции $C(x)$. А именно, в дифференциальном уравнении (86) оператор нагружения $N(x,t)$ задается в форме (66), а функция $F(x,t;C)$ - в форме (88). В этом случае рассматривается задача (86), (66), (88), (99), (100).

Применением метода прямых исходная задача приводится к задаче, рассмотренной в четвертом параграфе второй главы, а затем для её численного решения используется предложенный там же подход.

В Приложении приводятся описание, структура и листинги разработанного автором программного обеспечения для численного решения задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами с нелокальными условиями.

Автор выражает благодарность научному консультанту, член-корр. НАН Азербайджана, д.ф.-м.н., проф. Айда-заде К.Р. за постоянное внимание к работе, ценные советы и помощь.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложены численные методы решения краевых задач, описываемых системами обычных и нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями.
2. Получены необходимые условия оптимальности и предложен численный метод решения задачи оптимального управления относительно систем с сосредоточенными параметрами с нелокальными условиями.
3. Получены необходимые условия оптимальности и предложен численный метод решения задачи оптимального управления относительно систем с нагруженными обыкновенными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями.
4. Предложены численные методы решения коэффициентно-обратных краевых задач относительно систем с обычными и нагруженными обыкновенными дифференциальными уравнениями.
5. Предложены численные методы решения краевых задач относительно уравнений параболического и гиперболического типов с нелокальными условиями.
6. Предложен численный метод решения краевых задач относительно нагруженных уравнений параболического типа.
7. Получены необходимые условия оптимальности и предложен численный метод решения задач оптимального управления относительно нагруженных систем с распределенными параметрами.
8. Получены необходимые условия оптимальности и предложен численный метод решения класса задач оптимального управления с обратной связью на примере процесса нагрева стержня в печи.
9. Предложены численные методы решения одного класса коэффициентно-обратных задач относительно обычных параболических и гиперболических уравнений и нагруженных параболических уравнений.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Abdullayev V.M.* Paylanmış parametrli bir optimal idarəetmə məsələsinin düz xətlər üsulunun tətbiqi ilə ədədi həlli / AMEA müxbir üzvü, f.r.e.d., prof. Y.C.Məmmədovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş «Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri» adlı Beynəlxalq konfransının materialları. Bakı, 2010, s.96.
2. *Абдуллаев В.М.* О решении дифференциальных уравнений высокого порядка с многоточечными неразделенными условиями / Тезисы научной конф. “Теорет. и приклад. задачи операторных уравнений”, посвященной 75-летию проф. Я.Д. Мамедова, Баку, 2006, с.8-9.
3. *Абдуллаев В.М.* Численное решение задач оптимального управления нагруженными системами / Тезисы научной конфр. “Теорет. и приклад. задачи операторных уравнений”, посвященной 75-летию проф. Я.Д. Мамедова, Баку, 2006, с. 9-10.
4. *Абдуллаев В.М.* Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами с промежуточными условиями // Известия НАНА, серия ФТМН, 2006, т.XXVI, №2, с.60-65.
5. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численные решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // Ж. вычисл. матем. и математической физики, Москва, 2006, т.46, №9, с.1566-1581.
6. *Абдуллаев В.М.* Численное решение задач оптимального управления нагруженными системами // PCI 2006, Материалы Межд. Конференция «Проблемы Кибернетики и Информатики», Баку, 2006, т. II, с.152-155.
7. *Абдуллаев В.М., Гасымов С.Ю.* Численное решение краевой задачи с нелокальными условиями для нагруженного параболического уравнения // «Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları» Resp. elmi konfr. materialları. Sumqayıt, 2007,с.23-25
8. *Абдуллаев В.М.* О применении метода прямых для краевой задачи с нелокальными условиями относительно нагруженного параболического уравнения // Известия НАНА, серия ФТМН, 2008, Т.XXVIII, №3, с.76-81.
9. *Абдуллаев В.М.* Численное решение задачи оптимального управления относительно нагруженного уравнения параболического ти-

па // Материалы Межд. Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2009, с.16-18.
10. *Абдуллаев В.М., Багиров А.Г.* О задаче нагревом с обратной связью при неполной информации // Материалы Межд. научно-практической конф. «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», Казахстан, Алматы, 2009, с.335-339.
11. *Абдуллаев В.М.* Об одной задаче синтеза управления процессом нагрева // Известия НАНА, серия ФТМН, 2009, Т.XXIX, №6, с.190-196.
12. *Абдуллаев В.М.* Численное решение задачи оптимального управления относительно нагруженного уравнения параболического типа с нелокальными многоточечными условиями // Известия Высших Технических Учебных Заведений Азербайджана. 2010, № 5-6 (69-70), с. 315-317.
13. *Абдуллаев В.М.* Обратно параметрическая задача для нагруженной системы с нелокальными условиями // Материалы Второй Межд. Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2012, с.14-17.
14. *Абдуллаев В.М.* Решение систем дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями // Известия НАНА, серия ФТМН, 2012, Т.XXXII, №3, с.126-136.
15. *Абдуллаев В.М.* Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибир. журнал индустриальной математики, Новосибирск, 2012, т.15, №3(51), с.3-15.
16. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Ж. вычисл. матем. и математической физики, Москва, 2012, т.52, №12, с. 2163-2177.
17. *Абдуллаев В.М.* Решение задачи оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Известия НАНА, серия ФТМН, 2012, т.32, № 6, с. 61-72.
18. *Абдуллаев В.М.* К решению обратных задач относительно нагруженных уравнений с нелокальными условиями // Доклады Адыгской (Черкесской) Межд. Акад. Наук. 2012, т.4, №3, с.6–14.
19. *Абдуллаев В.М.* Задача управления нагруженной системой с нелокальными краевыми условиями / Тезисы Межд. конференции «Актуальные проблемы математики и информатики» посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева. Баку, 2013, с.239-240.
20. *Абдуллаев В.М.* Решение класса обратно - коэффициентных задач относительно нагруженных уравнений параболического и гиперболического типов // Материалы. IV Межд. конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик- Терскол, 2013, с.16-19.
21. *Абдуллаев В.М.* Численное решение нагруженных нелокальных краевых задач // Известия НАНА, серия ФТМН, 2013, т.XXXIII, №3, с. 27-37.
22. *Абдуллаев В.М.* Подход к решению коэффициентно-обратных задач и его применение // Известия НАНА, серия ФТМН, 2013, Т. XXXIII, №6, с. 51-62.
23. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и математ. физики, Москва, 2014, т.54, №7, с.1096–1109.
24. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимальное управление нагруженной задачей Коши // Известия НАНА, серия ФТМН, 2005, Т.XXV, №2, с.86-91.
25. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечными условиями // Материалы Межд. Российско-Азерб. симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Эльбрус, 2008, с.16-18.
26. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Численное решение задач оптимального управления нагруженными системами с нелокальными условиями // Материалы Межд. Российско-Азерб. симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Эльбрус, 2008, с.18-19.
27. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Численное решение нагруженной краевой задачи параболического типа с нелокальными условиями // Материалы Межд. Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик- Эльбрус, 2009, с.22-25.

28. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О нагруженной задаче при управлении процессом нагрева с обратной связью // Материалы Межд. Российско- Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик- Эльбрус, 2010, с.16-18.
29. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О задаче регулирования процесса нагрева //Меж. научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев. 2011, № 2, с. 33-45.
30. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Решение краевых задач с неразделенными точечными и интегральными условиями // Матер. Межд. Российско- Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2011, с.13-16.
31. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Численное решение систем дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями // Известия Высших Техн. Учеб. Заведений Азербайджана. 2011, т. 13, № 4, с. 64-70.
32. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Решение задачи оптимального управления системой с неразделенными точечными и интервальными условиями / Тезисы Межд. конференции «Актуальные проблемы современной Математики, Информатики и Механики-II», Казахстан, Алматы, 2011, с.200.
33. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О подходах к управлению объектами с обратной связью // Материалы Второй Межд. Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик , 2012, с. 20-22.
34. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 2012, №9, с.3-19.
35. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Исследование решения задач управления с точечно-интегральными условиями // Известия Высших Техн. Учеб. Заведений Азерб., 2012, т.14, № 6, с. 61-68.
36. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Численный метод решения нагруженных краевых задач с интегральными условиями / Тезисы Межд. конференции «Актуальные проблемы математики и информатики» посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева. Баку, 2013, с.243-244.
37. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Численный метод решения класса обратных задач для нагруженных уравнений частными производными / Материалы Межд. научной конференции «Неньютоновские системы в нефтегазовой отрасли» посвященной 85-летнему юбилею академика А.Х.Мирзаджанзаде. Баку, 2013, с.21-23.

38. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Задача управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев, 2013, №2, с.61-77.
39. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О решении краевых задач с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Дифференциальные уравнения, Минск,2013,т.49,№9,с.1152–1162.
40. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибирский журнал вычислительной математики. Новосибирск, 2014, т.17, №1, с. 1–16.
41. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Численный подход к параметрической идентификации динамических систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев, 2014, № 2, с.1-16.
42. *Abdullaev V.M.* Solving the Loaded Optimal Control Problems / Abstracts the 1[st] International Conference on «Control and Optimiza-tion with Industrial Applications», COIA-2005, Baku, 2005, p.11.
43. *Abdullaev V.M., Ayda-zade K.R.* Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Lumped Systems // Computational Math. and Mathematical Physics, 2006, Vol.46, №9, pp.1487-1502.
44. *Abdullaev V.M., Rahimov A.B.* On a problem of restoring domain boundary / 6th İnternational İSAAC Congress, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 2007, p.53.
45. *Abdullaev V.M.* On application of method of lines in controlling loaded systems / Abstracts the 2-nd International Conference on «Control and Optimization with Industrial Applications», COIA-2008, Baku, 2008, p.15.
46. *Abdullayev V.M.* Feedback Control at Observed points // Proceeding PCI’2010, III International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics», 2010, Vol. III, pp.147-151.
47. *Abdullayev V.M.* Solution to differential equations involving non-separated integral and pointwise conditions / Book of Abstracts the

4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS). Baku, 2011, p.140.
48. *Abdullayev V.M.* Numerical solution to optimal control problems for loaded dynamic systems with integral conditions // Proceeding, III International Conference On Optimation Methods and Applications (OPTIMA-2012), Costa Da Caparica, Portugal, 2012, pp.10-13.
49. *Abdullaev V.M., Bagirov A.H.* On an problem of control by loaded system with non-local conditions / 4th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, COIA-2013, Borovets, Bulgaria, 2013, c.92.
50. *Abdullaev V.M.* Numerical solution to some inverse nonlocal boundary-value problems // TRANSACTIONS of the NASA (ph-math. and mech. sciences series), 2013, vol. XXXIII, №1, pp.105-114
51. *Abdullaev V.M.* Numerical Solution to a Coefficient Inverse Problem for a system of linear ODEs / ABSTRACTS IV International Conference on Optimization Methods and Applications Optimization and applications (OPTIMA-2013), Montenegro, 2013, pp.11-12.
52. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Computational Math. and Mathematical Physics, 2014, Vol.54, №7, pp. 1096–1109.
53. *Ayda-zade K.R., Abdullayev V.M.* Optimal Control Problems with Unseparated Conditions on Phase state / Abstracts the 1-st International Conference on «Control and Optimization with Industrial Applications», COIA-2005, Baku, 2005, p.16.
54. *Ayda-zade K.R., Abdullayev V.M.* Numerical Solution of Optimal Control Problems with Unseparated Conditions on Phase State // Applied and Computational Mathematics. An International Journal, 2005, Vol.4, №2, pp.165-177.
55. *Ayda-zade K.R., Abdullayev V.M.* On Regulation Problem for Heating Process// Journal of Automation and Information Sciences. 2011, vol.43, pp.32-44.
56. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* On a Class of Inverse Problems for Loaded Equations with Nonlocal Conditions // Proceeding PCI'2012, IV International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics», Baku, 2012, Vol. III, pp.74-77.
57. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On an approach to designing control of the distributed-parameter processes // Automation and remote control, 2012, vol.73, №9, pp. 1443-1455.

58. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* Control problem with non-separated multipoint and integral conditions // Journal of Automation and Information Sciences. 2013, Vol.45, №3, pp.34-52.
59. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On the Solution of Boundary Value Problems with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions // Differential Equations, 2013, Vol. 49, No. 9, pp. 1114–1125.
60. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. 2014, Vol. 17, No.1, pp. 1–16.
61. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* Numerical approach to parametric identification of dynamic systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2014, Vol.46, №3, pp.1-14

Личный вклад автора в совместно выполненные работы:

- В работах [7,23,25,27,31,35,39,40,41,52,56,59,60,61] автор предложил численный метод решения задачи, разработал программное обеспечение и провел численные эксперименты.

- В работах [10,16,24,26,28,29,33,34,35,38,43,54,55,57,58] автор получил необходимые условия оптимальности, предложил численный метод решения задачи, разработал программное обеспечение и провел численные эксперименты.

VAQ□F MAAR□F O□LU ABDULLAYEV

QEYRİ-LOKAL BAŞLANĞIC – SƏRHƏD ŞƏRTLİ YÜKLƏNMİŞ SİSTEMLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD VƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN ƏDƏDİ HƏLL ÜSULLARININ İŞLƏNMƏSİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi qeyri-lokal başlanğıc-sərhəd şərtli yüklənmiş sistemlər üçün sərhəd və optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə, konstruktiv ədədi həll üsullarının, alqoritmlərinin işlənməsinə həsr olunmuşdur.

Birinci fəsildə inteqral şərtlərlə verilmiş sərhəd məsələsinin ədədi həlli üçün bükmə üsulu təklif olunub. Bükmə əməliyyatı vasitəsilə sistemin tərtibini artırmadan inteqral şərtlər Koşi şərtlərinə gətirilmişdir. Təklif olunan üsul ayrılmayan nöqtəvi və inteqral şərtlərlə verilmiş yüklənmiş adi diferensial tənliklər sisteminin ədədi həllinə tətbiq olunmuşdur.

İkinci fəsil toplanmış parametrli sistemlərdə optimal idarəetmə və əmsal-tərs məsələlərinin ədədi həll üsullarının işlənməsinə həsr olunmuşdur. Qeyri-lokal şərtlərlə verilmiş toplanmış parametrli yüklənmiş sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmış və məsələnin ədədi həll üsulu təklif olunmuşdur. Eyni zamanda, adi və yüklənmiş adi diferensial tənliklər sistemi üçün əmsal-tərs sərhəd məsələlərinin ədədi həll üsulu təklif olunmuşdur.

Üçüncü fəsildə qeyri-lokal şərtlərlə verilmiş parabolik və hiperbolik tip tənliklərə nəzərən sərhəd məsələlərinin və yüklənmiş parabolik tip tənliklə təsvir olunan sərhəd məsələlərinin ədədi həll üsulları təklif olunmuşdur.

Dördüncü fəsil qeyri-lokal şərtlərlə verilən paylanmış parametrli sistemlərdə optimal idarəetmə məsələlərinin ədədi həll üsullarının işlənməsinə həsr olunmuşdur. Paylanmış parametrli yüklənmiş sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmış, məsələlərin ədədi həll üsulları təklif olunmuşdur.

Beşinci fəsil xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün əmsal - tərs məsələlərin ədədi həll üsullarının işlənməsinə həsr olunmuşdur. Parabolik, hiperbolik və yüklənmiş parabolik tip tənliklə təsvir olunan bir sinif əmsal-tərs məsələlərinin ədədi həll üsulları təklif olunmuşdur.

VAG□F MAAR□F ABDULLAEV

THE DEVELOPMENT OF NUMERICAL METHODS OF SOLUTION TO BOUNDARY-VALUE AND OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH RESPECT TO LOADED SYSTEMS WITH NON-LOCAL INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS

SUMMARY

The dissertation work is dedicated to the development of numerical methods of solution to boundary-value and optimal control problems for loaded systems with non-local initial and boundary conditions.

In the first chapter, we propose a folding technique for numerical solution to a boundary-value problem with integral conditions. With the help of the folding operation, the integral conditions are reduced to Cauchy conditions without increasing the order of the system. The proposed technique is applied to numerical solution to a system of loaded ordinary differential equations with unseparated point and integral conditions.

The second chapter is dedicated to the development of numerical methods of solution to inverse coefficient and optimal control problems with respect to systems with lumped parameters. For loaded systems with distributed parameters involving non-local conditions, we obtain necessary optimality conditions for the optimal control problem, as well as propose a numerical method of solution to this problem. At the same time, we propose a numerical method of solution to the inverse coefficient boundary-value problem with respect to a system of ordinary and loaded differential equations with lumped parameters.

In the third chapter, we propose numerical methods of solution to both boundary-value problems with respect to parabolic and hyperbolic equations with non-local conditions and boundary-value problems described by loaded parabolic equations.

The fourth chapter is dedicated to the development of numerical methods of solution to optimal control problems with respect to distributed systems with non-local conditions. For the loaded systems with distributed parameters with respect to the optimal control problems, we obtain necessary optimality conditions and propose a numerical method of solution to this problem.

The fifth chapter is dedicated to the development of numerical methods of solution to inverse coefficient problems with respect to partial differential equations. We propose a numerical method of solution to a class of inverse coefficient problems described by parabolic, hyperbolic, and loaded parabolic equations.

Zakaz 470. Tirac 100.

Uçastok podqotovki informaüionnıx materialov

Інститута Систем Управления HAN Azerbaydcana.

Baku, ul. B.Vaxabzade, 9.

Tel: (+012) 539-28-26

AZ□RBAYCAN M□LL□ ELML□R AKADEM□YASI

□DAR□ETM□ S□STEML□R□ □NST□TUTU

□lyazmas□ hğququnda

VAQİF MAARİF OĞLU ABDULLAYEV

QEYRİ-LOKAL BAŞLANĞIC – SƏRHƏD ŞƏRTLİ YÜKLƏNMİŞ SİSTEMLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD VƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN ƏDƏDİ HƏLL ÜSULLARININ İŞLƏNMƏSİ

1203.01 – Kompüter elmləri

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2015