AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ELMAN CAVANŞİR oğlu İBRAHIMOV

GEGENBAUER DİFERENSİAL OPERATORU İLƏ BAĞLI HARMONİK ANALİZİN BƏZİ ASPEKTLƏRİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı 2017

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Rəsmi opponentlər:

- riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, prof. **Ziyatxan Əliyev**
(Bakı Dövlət Universiteti)
- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Viktor Burenkov**
(RXDU-nun nəzdində S.M.Nikolski ad. Riyaziyyat İnstitutu, Rusiya);
- akademik **Vaxtanq Kokilaşvili**
(A.Razmadze ad. Riyaziyyat İnstitutu, Gürcüstan EA).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti "Riyazi analiz" kafedrası

Dissertasiyanın müdafiəsi 29 sentyabr 2017-ci il saat 14^{00}-da Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunan dissertasiyaların müdafiəsini keçirən D.01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat 11 iyul 2017-cı il tarixində buraxılıb.

AMEA RMİ-nın D.01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Harmonik analizin əsasları görkəmli fransız riyaziyyatçısı İozef Furyemin 1822-ci ildə dərc edilmiş "İstiliyin analitik nəzəriyyəsi" adlı kitabında qoyulmuşdur.

İndiki vaxtda harmonik analiz (HA) aşağıdakı geniş bölmələri əhatə edir, belə ki: xüsusi törəməli tənliklər, çevirmə nəzəriyyəsi, yaxınlaşma nəzəriyyəsi, Furye sıralarının və inteqrallarının cəmlənmə nəzəriyyəsi, maksimal funksiyalar və potensiallar nəzəriyyəsi. Harmonik analiz məsələlərinin aktuallığı bununla izah olunur. Harmonik analizin ideyaları və metodları diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən tutmuş- qruplar nəzəriyyəsinə qədər tətbiq olunur. HA-in güclü işçi aparatlarından biri də şübhəsiz müxtəlif çevirmələridir, hansılar ki, ilk dəfə XİX əsrin əvvəllərində Furye, Laplas, Puasson, Koşi kimi məhşur riyaziyyatçılar tərəfindən istilikkeçirmə nəzəriyyəsində istifadə olunmuşdur. XİX əsrin sonunda əsasını Laplas çevirməsi təşkil edən riyazi analizin bir qanadı "Operasiya hesabı" əmələ gəlmişdir.

İnteqral çevirmələri belə ki: istilikkeçirmə nəzəriyyəsində, hidromexanika, elastikiyyət nəzəriyyəsində, rəqs nəzəriyyəsində, atom nüvəsi nəzəriyyəsində, avtomatik idarəetmə nəzəriyyəsində və başqalarında mühüm tətbiqi rol oynayır. Bəllidir ki, riyazi fizikanın müxtəlif məsələlərinin həlli şübhəsiz sinqulyar inteqrallarına belə ki: Dirixle, Puasson, Koşi, Veyerştrass və s. kimi inteqrallarına gətirib çıxarır. Son illərin əldə etdiyi ən mühüm nəticələrdən biri də HA-in simasını dəyişən, şübhəsiz sinqulyar inteqrallar nəzəriyyəsinin (SİN) ideyalarının və texnikasının HA-in məsələlərində istifadə edilməsidir. Potensial tipli inteqrallar nəzəriyyəsi riyazi-fizika məsələlərinin həllində mühüm yer tutur və təsadüfi deyil ki, bu nəzəriyyəyə çoxlu sayda məqalələr və monoqrafiyalar həsr olunub: M.Riss, Q.H.Xardi, J.E.Littlvud, S.L.Sobolev, İ.Steyn, T.Weys, O.V.Besov, S.Q.Samko və s. Bu sahədə İ.Steynin (1973) və S.Q.Samkonun (1984) illərdə çap olunmuş monoqrafiyalarını qeyd etmək istərdim. Axırıncı 30 ildə B-elliptik tənlikləri və potensial nəzəriyyəsinə İ.A.Kipriyanov və onun tələbələri tərəfindən mühüm tapıntılar daxil edilmişdir. Potensial və SİN-in metodları xüsusi törəməli diferensial tənliklərinin həllində, analitik funksiyalar nəzəriyyəsində, mexanika məsələlərində müvəffəqiyyətlə istifadə olunur.

Son illərdə ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun (ÜSO) doğurduğu nüvəli yeni inteqral tənliklərin tədqiqatı başlanıb. ÜSO nəzəriyyəsinin əsasları J.Delsart tərəfindən (1938) ildə qoyulmuş, sonralar isə B.M.Levitanın monoqrafiyasında (1973) verilmişdir.

Fəzaların “daxiletmə nəzəriyyəsi” xüsusi törəməli diferensial tənliklərinin araşdırılması nəticəsində əmələ gəlmişdir. Riyazi-fizika tənliklərinin həlli ilə bağlı klassik “daxiletmə nəzəriyyəsi” ilk dəfə S.L.Sobolevin işlərində qoyulmuşdur (1936).

Daxiletmə nəzəriyyəsinin inkişafında növbəti mərhələsi S.M.Nikolski tərəfindən (1947-1951) yaxınlaşma nəzəriyyəsinə əsaslanaraq yeni metodlar kəşf edilmişdir. Sonradan O.V.Besov (1959) daha geniş fəzalar üçün analoji nəzəriyyə qurmuşdur. Bu nəzəriyyəyə geniş ədəbiyyat həsr olunub.

Maksimal funksiyalar nəzəriyyəsinin əsasları Xardi və Littlvud tərəfindən 1930-cu ildə qoyulmuşdur və sonradan bu nəzəriyyə çoxlu sayda riyaziyyatçılar tərəfindən gur inkişaf etmisdir.

Dissertasiyanın tədqiqatları harmonik analizin beş mühüm bölmələrini əhatə edir, belə ki: çevirmələr nəzəriyyəsi, yaxınlaşma nəzəriyyəsi, sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsi, maksimal funksiyalar və potensial nəzəriyyəsi, hansılar ki, bir-birinə sıx bağlıdır və bir-birini müvəffəqiyyətlə tamamlayır.

Yuxarıda dediklərim kifayət qədər dissertasiyanın mövzusunun aktuallığını izah edir və gördüyümüz kimi həm nəzəri, həm də praktiki əhəmiyyətini göstərir.

İşin məqsədi. Yeni inteqral çevirməsinin qurulması və onun inversiyası (tərs çevirmənin varlığı); Gegenbauer sinqulyar inteqralının qurulması və bu inteqrallarla onu doğuran funksiyalara həm Lebeq tipli xarakteristik nöqtələrdə, həm də $L_{p,\lambda}$ metrikasında yaxınlaşması və yaxınlaşma tərtibinin öyrənilməsi. Teylor və Riman tipli törəmə anlayışları daxil etməsi və bu törəmələri olan funksiyaların həmin sinqulyar inteqrallarla yaxınlaşması üçün asimptotik teoremlərinin isbatı; Ümumiləşmiş operator vasitəsi ilə hamarlıq modulunun qurulması və bu termində yaxınlaşma nəzəriyyəsinin düz və tərs teoreminin alınması; Nikolski-Besov fəzaları daxil edilməsi və onların ən yaxşı yaxınlaşma terminində təsnifatı, yəni onların approksimasiya xarakteristikası. Bu fəzalarda daxiletmə teoremlərinin alınması; Ümumiləşmiş funksiyalar sinfində ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun və onun doğurduğu bürümənin xassələrinin öyrənilməsi; Gegenbauer diferensial operatorunun doğurduğu ümumiləşmiş hamarlığa malik olan Besov fəzasının qurulması və onun xassələrinin öyrənilməsi; Gegenbauer diferensial operatorunun doğurduğu maksimal funksiyanın qurulması və onun $L_{p,\lambda}$ məhdudluğunun isbatı.

Elmi yenilik. İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Yeni inteqral çevirməsi alınıb (biz onu Gegenbauer çevirməsi adlandırmışıq) və onun tərs çevirməsinin varlığı haqqında teorem isbat edilib.
- Gegenbauerin m-sinqulyar inteqralı qurulub və bu inteqralın Lebeq tipli nöqtələrdə və $L_{p,\lambda}$ metrikasında yığılma və yığılma tərtibi öyrənilib. Ümumiləşmiş sürüşmə funksiyasının köməyi ilə qurulmuş Riman törəməsi anlayışı verilmiş və bu törəmələri olan funksiyalar üçün Gegenbauerin m-sinqulyar inteqrallarla yaxınlaşması haqqında asimptotik teoremlər isbat edilmişdir.
- Lokal inteqrallanan funksiyaların Gegenbauerin sinqulyar inteqrallarla yaxınlaşmasının dəqiq qiymətləndirilməsi verilmişdir.
- Ümumiləşmiş Gegenbauer operatoru üçün Teylor-Delsart düsturu alınmışdır.
- Gegenbauer maksimal operatoru qurulub və onun üçün $L_{p,\lambda}$ məhdudluğu isbat edilib.
- Riss-Gegenbauer potensialı qurulub və onun üçün Hardi-Littlvud-Sobolev teoremi isbat olunub.
- Nikolski-Besov tipli fəzalar qurulub və onların Banax fəzası olduğu isbat edilib. Onların ekvivalentliyi isbat edilib (yəni Banax fəzaları ekvivalentdir).
- Ümumiləşmiş hamarlığa malik olan Besov fəzaları qurulub və onların müxtəlif xarakteristikaları verilib.

Tədqiqatın ümumi metodikası. İşdə konstruktiv funksiyalar nəzəriyyəsinin, çevirmələr nəzəriyyəsinin, maksimal funksiyalar və potensial nəzəriyyəsinin metodları istifadə olunub.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyada alınan nəticələr nəzəri və praktiki əhəmiyyət daşıyır. Nəzəri nöqtədən alınan nəticələr çevirmə nəzəriyyəsinə, konstruktiv funksiyalar nəzəriyyəsinə, maksimal funksiyalar və potensial nəzəriyyəsinə yeni məlumatlar daxil edib. Praktiki nöqtəsi baxımından Gegenbauer çevirməsi bürümə tipli tənliklərin həllində istifadə edilə bilər, o tənliklərdə ki, hansılar ki, inteqral çevirməsi vasitəsilə həll olunur. Gegenbauer çevirməsi inteqral tənliklərdə də istifadə oluna bilər. Qurulan konkret operatorlar funksiyaların təqribi hesablanmasında verilmiş dəqiqliklə istifadə edilə bilər. Alınan asimptotik teoremlər funksiyaların operatorla yaxınlaşma xətasını dəqiq qiymətini verir.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ümuminstitut seminarında, Belarusiya Dövlət Universitetinin "Funksional analiz" kafedrasının seminarında (rəh.:Belarusiya EA-nın müxbir üzvü Y.V.Radino), ADNA-nın "Ali riyaziyyat" kafedrasının seminarında (rəh.: prof. R.G.Məmmədov), eləcədə "Funksional fəzalarda operatorlar nəzəriyyəsi" adlı ümumittifaq konfransında (Ternopol 1984), "Funksional nəzəriyyənin müasir problemləri" adlı konfransda (Bakı 1989), Şimali Kavkaz reqional konfransında (Qroznı 1989), REA-nın müxbir üzvü, prof. L.D.Kudryavtsevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş 2-ci ümumittifaq konfrasda (Moskva 2003) məruzə edilmişdir.

Nəşrlər. Dissertasiya işinin əsas nəticələri müəllifin avtoreferatın sonunda verilmiş 28 elmi işində nəşr olunmuşdur.

İşin həcmi və tərkibi. Dissertasiya işi giriş, 4 fəsil, 18 yarımfəsil, nəticə və 169 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 260 səhifə təşkil edir.

İŞİN MƏZMUNU

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılır, işin mövzusuna aid olan qısa tarixi məlumat verilir və dissertasiyanın əsas nəticələri əks olunur. Dissertasiyanın tərkibi dörd fəsil və on səkkiz yarımfəsildən ibarətdir.

Birinci fəsil yeddi yarımfəsildən ibarətdir. Bu fəsildə Gegenbauer çevirməsi qurulur və onun tərs çevirməsinin varlığı haqqında teorem isbat olunur. Gegenbauer adlı sinqulyar inteqralı daxil edilir (qısaca QSİ) və bu inteqrallarla funksiyaların nöqtədə və $L_{p,\lambda}$ çəkili metrika fəzasında yığılma və yığılma tərtibi öyrənilir.

Birinci fəslin əsas nəticələrinə nəzər yetirək.

Bizim tədqiqatımızın əsasında Gegenbauer çevirməsini doğuran Gegenbauer diferensial operatorudur

$$G \equiv G_{\lambda} = \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} \left[\frac{d}{dx} \left(x^2 - 1\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \right],\ x \in (1,\infty),\ \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Gegenbauer funksiyaları $P_{\alpha}^{\lambda}(x)$ və $C_{\alpha}^{\lambda}(x)$, aşağıdakı tənliyin

$$\left\{\left(x^2 - 1\right) \frac{d^2}{dx^2} + (2\lambda + 1)\, x \frac{d}{dx} - \alpha\, (\alpha + 2\lambda)\right\} Y\,(x) = 0\ .$$

xətti asılı olmayan həlləridir. G operatorun doğurduğu Gegenbauer ÜSO

$$A_t f(x) \equiv A_t^\lambda f(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)} \int_0^\pi f\left((x,t)_\varphi\right) d\mu_\lambda(\varphi),$$

burada

$$d\mu_\lambda(\varphi) = (\sin\varphi)^{2\lambda-1} d\varphi,$$

$$(x,t)_\varphi = xt - \sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}\cos\varphi \quad .$$

$L_{p,\lambda}[1,\infty) \equiv L_p\left([1,\infty), dm_\lambda\right)$, $1 \le p \le \infty$ ölçülən və sonlu norması

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left(\int_1^\infty |f(x)|^p \, dm_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,\lambda} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[1,\infty)} |f(x)|,$$

burada $dm_\lambda(x) = \left(x^2-1\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx$ olan funksiyalar sinfi işarə edilib.

$P_\alpha^\lambda(x)$ və $Q_\alpha^\lambda(x)$ funksiyalarına görə Gegenbauer çevirmələrini aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$F_P : f(t) \mapsto f_P^\wedge(\alpha) = C_\lambda \int_1^\infty f(t) P_\alpha^\lambda(t) dm_\lambda(t),$$

$$F_Q : f(t) \mapsto f_Q^\wedge(\alpha) = C_\lambda \int_1^\infty f(t) Q_\alpha^\lambda(t) dm_\lambda(t),$$

burada $Q_\alpha^\lambda(t) = \dfrac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2\lambda)} C_\alpha^\lambda(t)$, və tərs çevirmələri

$$F_P^{-1} : f_P^\wedge(\alpha) \mapsto f(x) = C_\lambda \int_1^\infty f_p^\wedge(\alpha) Q_\alpha^\lambda(x) dm_\lambda(\alpha),$$

$$F_Q^{-1} : f_Q^\wedge(\alpha) \mapsto f(x) = C_\lambda \int_1^\infty f_Q^\wedge(\alpha) P_\alpha^\lambda(x) dm_\lambda(\alpha) \;,$$

burada

$$C_\lambda = \frac{2^{\frac{3}{2}-\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{3+2\lambda}{4}\right)\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-2\lambda}{4}\right)\cos\pi\lambda\right)^{-1}}{{}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}-\lambda; \frac{5-2\lambda}{4}; \frac{1}{2}\right) - {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}-\lambda; \frac{5-2\lambda}{4}; \frac{1-2\lambda}{2}\right)}.$$

Lemma 1. İxtiyari $f \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ üçün

$$\left(A_t f\right)_P^\wedge(\alpha) = f_P^\wedge(\alpha) Q_\alpha^\lambda(t), \qquad t \ge 1$$

bərabərliyi doğrudur.

Aşağıdakı nəticə A_t operatorunun $L_{p,\lambda}$ fəzasının məhdudluğunu göstərir.

Lemma 2. Əgər $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p \le \infty$, onda ixtiyari $t \in [1,\infty)$ üçün

$$\|A_t f\|_{p,\lambda} \le \|f\|_{p,\lambda}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Fərz edək ki, $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$ və $g \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$. Bu funksiyaların bürüməsini

$$(f * g)(x) = \int_1^{\infty} g(t) A_t f(x) dm_{\lambda}(t) \quad ,$$

operatoru kimi təyin edək. Bu operator $[1,\infty)$, aralığının sanki hər yerində təyin olunub və $f * g \in L_{p',\lambda}[1,\infty)$.

Lemma 3. İxtiyari $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p < \infty$ üçün

$$\left| f_P^{\wedge}(\alpha) \right| \le c(\lambda) \|f\|_{p,\lambda} . \alpha^{2\lambda - 1} \quad ,$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $c(\lambda)$ ancaq λ -dan asılı olan bəzi sabitdir.

Nəticə. İxtiyari $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p < \infty$ üçün

$$\lim_{\alpha \to \infty} f_P^{\wedge}(\alpha) = 0.$$

Qeyd edək ki, $p = 1$ olduqda bu bərabərlik məhşur Riman-Lebeq lemmasının analoqudur.

Lemma 4. Fərz edək ki, $1 \le p, q, r \le \infty$ və $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Onda ixtiyari $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$ və $g \in L_{q,\lambda}[1,\infty)$ üçün Yunq bərabərsizliyi

$$\|f * g\|_{r,\lambda} \le \|f\|_{p;\lambda} \|g\|_{q,\lambda}$$

doğrudur.

Fərz edək ki, S -Şvarsın əsas funksiyalar sinfidir.

Lemma 5. $f, g \in s(0,\infty)$ üçün

а) $(f * g)(x) = (g * f)(x)$,

б) $(f * g)_P^{\wedge}(\alpha) = f_P^{\wedge}(\alpha) g_Q^{\wedge}(\alpha)$.

bərabərlikləri doğrudur.

İlk baxışdan b) bərabərliyi özünə məxsus və qeyri adi görünür, amma o təbiidir və lemma 1-dən çıxır. Növbəti lemma və ondan çıxan nəticə Furye inteqrallar nəzəriyyəsindəki Parseval və Planşerel klassik teoremlərinə uyğun gəlir.

Lemma 6. Fərz edək ki, $f, g \in S(1,\infty)$.

Onda $f \cdot g \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$, $f_P^{\wedge}(\alpha) g_Q^{\wedge}(\alpha) \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ və

$$\int_1^{\infty} f(x) g(x) dm_\lambda(x) = C_\lambda \int_1^{\infty} f_P^{\wedge}(\alpha) g_Q^{\wedge}(\alpha) dm_\lambda(\alpha).$$

bərabərliyi doğrudur.

Nəticə. Fərz edək ki, $f \in S(1,\infty)$. Onda $f_P^{\wedge}(\alpha) f_Q^{\wedge}(x) \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ və

$$\int_1^{\infty} f^2(x) dm_\lambda(x) = C_\lambda \int_1^{\infty} f_P^{\wedge}(\alpha) f_Q^{\wedge}(\alpha) dm_\lambda(\alpha),$$

doğrudur və Parseval və Planşerel bərabərliyini xatırladır.

Tərif 1. Fərz edək ki, $f \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$. Əgər $x \in [1,\infty)$ nöqtəsində

$$\lim_{r\to 0}\left(sh\frac{r}{2}\right)^{-(2\lambda+1)} \int_0^r \left| f(x) - A_{cht} f(x)\right| sh^{2\lambda} t dt = 0$$

bərabərliyi ödənirsə, onda həmin nöqtəni f funksiyasının Lebeq-Gegenbauer $(L-G)$-nöqtəsi) nöqtəsi adlandıracayıq.

Teorem 1. Əgər $f \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, onda $[1,\infty)$ aralığının sanki hər bir nöqtəsi onun $(L-G)$-nöqtəsidir.

Gegenbauer inteqralının

$$f(x) = C_\lambda \int_1^{\infty} f_P^{\wedge}(\alpha) Q_\alpha^\lambda(x) dm_\lambda(\alpha) \tag{1}$$

R-kəsiyini

$$S_R^\lambda f(x) = C_\lambda \int_0^{\infty} A_{cht}^\lambda f(x) sh^{2\lambda} u \int_1^R P_\alpha^\lambda(chu) dm_\lambda(\alpha) du$$

kimi işarə edək.

Teorem 2. (tərs çevirmənin varlığı). Fərz edək ki, $f \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$. Onda hər bir $x \in [1,\infty)$ $(L-G)$ nöqtəsində hər bir $0<\lambda<\frac{1}{2}$ üçün

$$\lim_{R\to\infty} S_R^{\lambda} f(x) = f(x),$$

bərabərliyi doğrudur.

1.2-nin əsas nəticələrinə nəzər salaq.

Fərz edək ki, $\tau \in G \subset R$ və τ_0 - bu çoxluğun sıxlıq nöqtəsidir.

Tərif 2. $[1,\infty)$ aralığında təyin olunmuş və τ parametrindən asılı olan $K_\tau^\lambda(x)$ funksiyasını nüvə adlandıracayıq onda ki, $K_\tau^\lambda(x) \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ və ixtiyari $\tau \in G$

$$\int_1^\infty K_\tau^\lambda(x)\, dm_\lambda(x) = 1 \tag{2}$$

bərabərliyi ödənilsin.

Tərif 3. Əgər $K_\tau^\lambda(x)$ nüvəsi üçün ixtiyari $\delta > 0$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \int_{ch\delta}^\infty \left|K_\tau^\lambda(x)\right| dm_\lambda(x) = 0$$

şərti ödənilirsə, onda həmin nüvəni eynilik approksimasiya nüvəsi adlandıracayıq.

Tərif 4. Əgər $K_\tau^\lambda(x)$ nüvədisə onda

$$L_\tau^\lambda f(x) = \int_1^\infty A_t f(x) K_\tau^\lambda(t)\, dm_\lambda(t) \tag{3}$$

ifadəsini Qeqenbauer sinqulyar inteqralı adlandıracayıq.

Sonradan (2) şərtini daha zəif şərtlə

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \int_1^\infty K_\tau^\lambda(x)\, dm_\lambda(x) = 1 .$$

əvəz edəcəyik.

Növbəti teorem A_t ÜSO t-yə görə $L_{p,\lambda}$ fəzasında kəsilməzliyini göstərir.

Teorem 3. İxtiyari $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $(1 \le p \le \infty)$ üçün

$$\lim_{t\to 1+0} \left\| A_t f - f \right\|_{p,\lambda} = 0 .$$

bərabərliyi doğrudur. Növbəti teorem GSİ-nin $L_{p,\lambda}$ – yığılmasını təsvir edir.

Teorem 4. Əgər $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$ $(1 \le p \le \infty)$, onda eynilik approksimasiya nüvəli (2) GSİ üçün

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\left\|\mathsf{L}_\tau^\lambda f - f\right\|_{p,\lambda} = 0 .$$

bərabərliyi doğrudur.

Teorem 5. Fərz edək ki, $f \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ və $K_\tau^\lambda(chx)$ müsbət eynilik approksimasiyalı nüvədir və aşağıdakı şərtləri ödəyir:

a) $K_\tau^\lambda(chx)$ funksiyası $[0,\delta]$, $\delta>0$ parçasında monoton artandır və orada məhduddur

$$K_\tau^\lambda(chx) \le C - const,\ \ x\in[0,\delta],$$

б) (δ,∞) aralığında monoton azalandır.

Onda hər bir $(L-G)-$ nöqtəsində GSİ üçün

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\mathsf{L}_\tau^\lambda f(x) = f(x)$$

bərabərliyi doğrudur.

Növbəti lemmada ÜSO operatorunun Gegenbauer G diferensial operatoru ilə əlaqəsi yaranır.

Lemma 7. Əgər f funksiyası $[1,\infty)$ təyin olunub və $x_0\in[1,\infty)$ nöqtəsində ikinci dərəcəli törəməsi varsa, onda həmin nöqtədə

$$\lim_{t\to0}\frac{A_{cht}f(x_0)-f(x_0)}{cht-1} = \frac{x_0^2-1}{2\lambda+1}f''(x_0)+x_0f'(x_0) = \frac{Gf(x_0)}{2\lambda+1}.$$

Aşağıdakı işarəni qəbul edək $G^r = G(G^{r-1})$, $r=1,2,\ldots$; $G^0 f = f$.

$G^r f$ olan bütün funksiyalar fəzasını $G^r[0,\infty)$ kimi işarə edək.

Sonsuz sayda diferensiallanan və $[1,\infty)$ kompakt daşıyıcısı olan funksiyalar fəzasını $D[1,\infty)$ kimi işarə edək.

Lemma 8. Əgər $f,g\in G^r[0,\infty)$, $r\in\mathrm{N}$, onda

$$\int_1^\infty f(x)G^r g(x)dm_\lambda(x) = \int_1^\infty g(x)G^r f(x)dm_\lambda(x)$$

Tutaq ki,

$$\Delta_t^1 f(x) = A_t f(x) - f(x),$$

$$\Delta_t^m f(x) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu}\begin{pmatrix} m \\ \nu \end{pmatrix} A_t^\nu f(x).$$

Aşağıdakı kəmiyyəti

$$\omega_m(\delta-1,f)_{p,\lambda} = \sup_{1<t\le\delta}\left\|\Delta_t^m f\right\|_{p,\lambda}$$

$m-$ tərtibli hamarlıq modulu adlandıracayıq. Bu kəmiyyətin əsasında $m-$ tərtibli ümumiləşmiş hamarlıq modulu daxil edək

$$\Omega_m(\delta-1,f)_{p,\lambda}=\sup_{C>0}\frac{\omega_m(C(\delta-1),f)_{p,\lambda}}{(1+C)^m}.$$

Bu kəmiyyət ilk dəfə A_P S.Cəfərov tərəfindən daxil edilmişdir.

1.5-də funksiyaların GSİ

$$\mathsf{L}_\tau^\lambda f(x)=\int_1^\infty A_{cht}f(x)K_\tau^\lambda(cht)sh^{2\lambda}tdt$$

inteqralları ilə yaxınlaşmasının asimptotik teoremləri isbat olunub.

Fərz edək ki, $K_\tau^\lambda(cht)\geq 0$ və

$$\mu_\tau^{[\nu]}=\int_1^\infty K_\tau^\lambda(chu)(chu-1)^\nu sh^{2\lambda}udu,\quad \nu>0$$

inteqral momentləri sonludur.

Aşağıdakı ifadəni

$$\Delta_{cht}^n f(x_0)=A_{cht}f(x_0)-\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu(cht-1)^\nu,$$

$\alpha_0=f(x_0)$ və a_ν $(\nu=1,2,...,n-1)$ bəzi sabitlərdir, x_0 nöqtəsində Teylor tipli $n-$ fərqi adlandıraq.

Tərif 5. Əgər aşağıdakı ifadənin $(cht-1)^{-n}\Delta_{cht}^n f(x_0)$ $t\to 0$ halında sonlu limiti varsa onda həmin limiti x_0 nöqtəsində Teylor tipli $n-$tərtibli Gegenbauer törəməsi adlandıraq və $D_\lambda^{(n)}f(x)$ kimi işarə edək, yəni

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta_{cht}^n f(x_0)}{(cht-1)^n}=D_\lambda^{(n)}f(x_0).$$

Lemma 9. Əgər $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində $n-$ tərtibli Teylor tipli Gegenbauer törəməsi varsa, onda hımin nöqtədə $\nu(\nu=1,2,...,n-1)$ tərtibli törəmələri də var $D_\lambda^{(\nu)}f(x_0)=\alpha_\nu$ və

$$A_{cht}f(x_0)=f(x_0)+\sum_{\nu=1}^{n}D_\lambda^{(\nu)}f(x_0)(cht-1)^\nu+o((cht-1)^n)$$

münasibəti doğrudur.

Teylor tipli $r-$ tərtibli x_0 nöqtəsində Gegenbauer törəməsi olan funksiyalar çoxluğunun $W_\lambda^{(r)}[1,\infty)$ kimi işarə edək.

Teorem 6. Fərz edək ki, $f\in W_\lambda^{(n)}[1,\infty)$. Əgər

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{\mu_\tau^{[n+\nu]}}{\mu_\tau^{[n]}}=0$$

heç olmasa $\nu=1,2,..,$ qiymətində, onda

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{1}{\mu_\tau^{[n]}}\left[\mathsf{L}_\tau^\lambda f(x)-f(x)-\sum_{\nu=1}^{n-1}D_\lambda^{(\nu)}f(x)\mu_\tau^{[\nu]}\right]=D_\lambda^{(n)}f(x).$$

bərabərliyi doğrudur.

Bu teoremin tətbiqi kimi aşağıdakı inteqral

$$B_\tau^\lambda f(x)=\int_0^\infty A_{cht}f(x)K_\tau^\lambda(cht)sh^{2\lambda}tdt\,,$$

burada

$$K_\tau^\lambda(cht)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\tau}e^{-\left(\frac{cht-1}{2\tau}\right)^2}(sht)^{1-2\lambda}\geq 0,$$

qurulur və onun üçün aşağıdakı teorem mövcuddur.

Teorem 7. İxtiyari $f\in W_\lambda^{(n)}[1,\infty)$ funksiyası üçün aşağıdakı asimptotik bərabərlik

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\tau^n}\left[B_\tau^\lambda f(x)-f(x)-\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}D_\lambda^{(\nu)}f(x)\tau^\nu\right]=D_\lambda^{(n)}f(x)$$

doğrudur.

1.6 yarımfəsilin əsas nəticələrinə nəzər salaq .

Tərif 6. Fərz edək ki, $f\in L_{p,\lambda}[1,\infty)$ və $K_\tau^\lambda(x)$ nüvədir. Aşağıdakı ifadəni

$$\mathsf{L}_\tau^{[m]}f(x)=\int_1^\infty\left[\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^{\nu-1}\binom{m}{\nu}A_t^\nu f(x)\right]K_\tau^\lambda(t)(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}dt$$

Qeqenbauerin $m-$sinqulyar inteqralı adlandıraq.

Teorem 8. Fərz edək ki, $f\in L_{p,\lambda}[1,\infty)$ $1\leq p<\infty$ Onda eynilik approksimasiya nüvəli Qeqenbauerin $m-$sinqulyar inteqralı üçün

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\left\|\mathsf{L}_\tau^{[m]}f-f\right\|_{p,\lambda}=0$$

bərabərliyi doğrudur.

Teorem 9. Fərz edək ki, $f\in L_{p,\lambda}[1,\infty)$ $1\leq p<\infty$. Əgər а) $\int_{1}^{\infty} \left| K_{\tau}^{\lambda}(t) \right| dm_{\lambda}(t) \le M -$ sabitdir,

б) $\delta_{\tau}^{2m} = \int_{1}^{\infty} \left| K_{\tau}^{\lambda}(t) \right| (t-1)^{2m} dm_{\lambda}(t) \to 0 \quad \tau \to \tau_0,$

onda Gegenbauerin $m-$sinqulyarı üçün

$$\left\| \mathrm{L}_{\tau}^{[m]} f - f \right\|_{p,\lambda} \le 16^m (M+1) \Omega_m (\delta_{\tau}, f)_{p,\lambda}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Tərif 7. Fərz edək ki, $f \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$. Əgər $x \in [1,\infty)$ nöqtəsində aşağıdakı münasibət

$$\int_{0}^{t} \left| \Delta_{\gamma}^{m} f(x) \right| sh^{2\lambda} \gamma d\gamma = o\ \left(t^{2\lambda+1}\right), \quad t \to 0 .$$

ödənilərsə, onda hımin nöqtəni Lebeqin "$m-(L-G)$" nöqtəsi adlandıracayıq.

Növbəti teorem lokal xarakter daşıyır.

Teorem 10. Fərz edək ki, $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p < \infty$. Əgər $K_{\tau}^{\lambda}(cht) \ge 0$ monoton azalan və eynilik approksimasiya nüvədisə, onda f funksiyasının hər bir $x \in [1,\infty)$ "$m-(L-G)$" nöqtəsində

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \mathrm{L}_{\tau}^{[m]} f(x) = f(x).$$

bərabərliyi doğrudur.

Bu teorem konkret misalda öz əksini tapır.

Tərif 8. Əgər $(cht-1)^{-n} \Delta_t^n f(x)$ ifadəsinin $t \to 0$ getdikdə x nöqtəsində sonlu limiti varsa, onda həmin limiti Riman tipli $n-$ tərtibli Gegenbauer törəməsi adlandıracayıq və $D_{\lambda}^{<n>} f(x)$ kimi işarə edəcəyik, yəni

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta_{cht}^{n} f(x)}{(cht-1)^n} = D_{\lambda}^{<n>} f(x).$$

$r-$ tərtibli $D_{\lambda}^{<r>} f(x)$ törəməsi olan funksiyalar sinfinin $W_{\lambda}^{<r>}[1,\infty)$ işarə edəcəyik və $\mu_{\tau}^{[k]}$ kəmiyyətini aşağıdakı kimi yazacayıq

$$\mu_{\tau}^{[k]} = \mathrm{L}_{\tau}^{[m]}\left[(cht-1)^k ;1\right] = \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\nu-1} \binom{m}{\nu} \int_{0}^{\infty} (cht-1)^k K_{\tau}^{\lambda}(cht) sh^{2\lambda} t dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} (cht-1)^k K_{\tau}^{\lambda}(cht) sh^{2\lambda} t dt .$$

Növbəti teoremlərdə funksiyaların Gegenbauerin $m-$ sinqulyar inteqrallarla yaxınlaşmasının asimptotik qiymətləri tapılır.

Teorem 11. Fərz edək ki, f funksiyası $[1,\infty)$ məhduddur və $f \in W_{\lambda}^{<m>}[1,\infty)$ və $K_{\tau}^{\lambda}(cht) \geq 0$.

Əgər $v = 1,2,..,$ heç olmasa bir qiymətində

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \frac{\mu_{\tau}^{[m+v]}}{\mu_{\tau}^{[m]}} = 0,$$

onda

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \frac{\mathsf{L}_{\tau}^{[m]} f(x) - f(x)}{\mu_{\tau}^{[m]}} = (-1)^{m+1} D_{\lambda}^{<m>} f(x).$$

Teorem 12. Fərz edək ki, $f \in W_{\lambda}^{<m>}[1,\infty)$,nüvə $K_{\tau}^{\lambda}(cht) \geq 0$ və

$$\int_{\delta}^{\infty} \left|\Delta_{cht}^{m} f(x)\right|^{p} K_{\tau}^{\lambda}(cht) sh^{2\lambda} t dt \leq M, \quad (1 < p < \infty), \delta \in (0,\infty).$$

Əgər $v = 1,2,..,$ heç olmasa bir qiymətində

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \frac{\left(\mu_{\tau}^{[m+v]}\right)^{\frac{1}{q}}}{\mu_{\tau}^{[m]}} = 0, \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

onda

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \frac{\mathsf{L}_{\tau}^{[m]} f(x) - f(x)}{\mu_{\tau}^{[m]}} = (-1)^{m+1} D_{\lambda}^{<m>} f(x)$$

bərabərliyi doğrudur.

İkinci fəsildə Qeqenbauerin ÜSO vasitəsi ilə $L_{p,\lambda}$ metrikasında $[0,\infty)$ aralığında funksiyaların approksimasiya məsələləri öyrənilir.

İxtiyari $f \in L_{p,\lambda}$ üçün k -tərtibli fərqləri aşağıdakı kimi təyin edək

$$\Delta_{cht}^{k} f(chx) := \sum_{v=0}^{k} (-1)^{k-v} \binom{k}{v} A_{cht}^{v} f(chx),$$

və k tərtibli hamarlıq modulunu $\omega_k(f,\delta)_{p,\lambda}$

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\lambda} := \sup_{0<t\leq\delta} \left\|\Delta_{cht}^{k} f\right\|_{p,\lambda}, \quad k \in N$$

belə təyin edək.

$f \in L_{p,\lambda}$ daxil olan funksional $v > 0$ tərtibli məhdud spektrli funksiya onda deyəcəyik ki, $\alpha > v$ olduqda $f_P^{\wedge}(\alpha) = 0$ olsun. Burada $f_P^{\wedge}(\alpha) -$ Gegenbauer çevirməsidir

$$f_P^{\wedge}(\alpha) = \int_0^{\infty} f(cht) P_{\alpha}^{\lambda}(cht) sh^{2\lambda} t dt.$$

$G^k[0,\infty)$ $k -$ dəfə G operatoru təsir edən funksiyalar sinfidir və $W_{p,\lambda}^m$, $m = 1,2,...$ aşağıdakı funksiyalar sinifidir:

$$W_{p,\lambda}^m := \left\{ f \in L_{p,\lambda} : \; G^k f \in L_{p,\lambda}, \; k = 1,2,...,m \right\}.$$

$\Re(v, p, \lambda)$, $v > 0$ elə $\Phi(chx)$, $x \in \Re$ funksiyalar çoxluğudur ki, aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $\Phi(chx)$ v -tərtibli spektrdir;
2) $\Phi(chx)$ daxildir $W_{p,\lambda}^m$.

$f \in L_{p,\lambda}$ daxil olan funksiyaların $\Re(v, p, \lambda)$-dan olan funksiyalarla ən yaxşı yaxınlaşmasını $E_v(f)_{p,\lambda}$ aşağıdakı kimi təyin edək:

$$E_v(f)_{p,\lambda} := \inf \left\{ \|f - \Phi\|_{p,\lambda} : \Phi \in \Re(v, p, \lambda) \right\}.$$

Simvol $0 \le a \underset{\sim}{<} b$ o deməkdir ki, $a \le cb$ burada $c -$ bəzi parametrlərdən asılı ola bilən sabitdir.

Növbəti teorem klassik yaxınlaşma nəzəriyyəsindən olan Ceksonun düz teoreminin analoqudur.

Teorem 13. Fərz edək ki, $f \in W_{p,\lambda}^m$, $m \in Z_+ = \{0,1,2,...\}$. Onda ixtiyari $v > 0$ üçün

$$E_v(f)_{p,\lambda} \underset{\sim}{<} v^{-2m} \omega_k \left(G^m f, \frac{1}{v} \right)_{p,\lambda}$$

bərabərliyi doğrudur.

$L_{p,\lambda}$ и $W_{p,\lambda}^m$ fəzalarında qurulan Petrenin $K -$ funksionalını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$K(f, t; L_{p,\lambda}; W_{p,\lambda}^m) := \inf \left\{ \|f - g\|_{p,\lambda} + t \|G^m g\|_{p,\lambda} : g \in W_{p,\lambda}^m \right\},$$

Növbəti teoremdə $K -$ funksionalın və hamarlıq modulunun ekvivalentliyi aşkar olunur.

Teorem 14. İxtiyari $\delta > 0$ üçün

$$K\left(f,\delta^{2m};L_{p,\lambda};W_{p,\lambda}^{m}\right)\simeq\omega_{m}\left(f,\delta\right)_{p,\lambda},\quad \delta\to 0.$$

Yaxınlaşma nəzəriyyəsinin tərs teoremlərini isbat etmək üçün Bernşteyn bərabərsizliyinin müxətlif analoqları istifadə olunur. Bu fəsildə belə analoqlar Gegenbauerin G diferensial operatoru üçün alınıb.

Xüsusi halda aşağıdakı teorem isbat olunub.

Teorem 15. İxtiyari $f\in\Re(v,p,\lambda)$funksiyası üçün

$$\|G f\|_{p,\lambda}\le v^{2}\|f\|_{p,\lambda}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bu bərabərsizlik eksponensial tipli tam funksiyalar üçün Bernşteyn bərabərsizliyinin analoqudur.

Fərz edək ki, $r>0-$ həqiqi ədəddir, k və $m-$ mənfi olmayan və $2k>r-2m>0$ şərtini ödəyən tam ədədlərdir. Bütün $f\in W_{p,\lambda}^{m}$ və aşağıdakı bərabərsizliyini ödəyən

$$\omega_{k}\left(G^{m},\delta\right)_{p,\lambda}\le A_{f}\delta^{r-2m},\delta>0.$$

$A_f>0$ bəzi ədəddir, funksiyalar çoxluğunu $H_{p,\lambda}^{r}$ kimi işarə edə $f\in H_{p,\lambda}^{r}$ üçün yarım normanı belə

$$h_{p,\lambda}^{r}(f):=\sup_{\delta>0}\frac{\omega_{k}\left(G^{m},\delta\right)_{p,\lambda}}{\delta^{r-2m}}.$$

təyin edək.

$H_{p,\lambda}^{r}$ banax fəzasıdır və norması $\|f\|_{H_{p,\lambda}^{r}}:=\|f\|_{p,\lambda}+h_{p,\lambda}^{r}(f)$ kimi təyin olunur.

Növbəti teoremdə $H_{p,\lambda}^{r}$ fəzasının$\Re(v,p,\lambda)$-dan olan funksiyalarına ən yaxşı yaxınlaşması ilə təsviri verilir.

Teorem 16. Əgər $f\in H_{p,\lambda}^{r}$, onda $v\ge 1$olduqda

$$E_{v}(f)_{p,\lambda}\lesssim v^{-r}h_{p,\lambda}^{r}(f).$$

Əksinə əgər $f\in L_{p,\lambda}$ və $v\ge 1$

$$E_{v}(f)_{p,\lambda}\le\frac{A_f}{v^{r}},$$

onda $f\in H_{p,\lambda}^{r}$ və aşağıdakı bərabərsizlik

$$\|f\|_{H_{p,\lambda}^{r}}\lesssim\left(\|f\|_{p,\lambda}+A_f\right),$$

doğrudur, burada $A_f - f$ -dən asılı olan sabitdir.

Fərz edək ki, $1 \le q \le \infty$, $r > 0$ - həqiqi ədəddir, k və m $2k > r - 2m > 0$ şərtini ödəyən mənfi olmayan tam ədədlərdir. Biz deyəcəyik ki, f daxildir Nikolski-Besov sinifinə $B^r_{p,q,\lambda}$ əgər $f \in W^m_{p,\lambda}$ və yarımnorma $B^r_{p,q,\lambda}(f)$ sonludur

$$b^r_{p,q,\lambda}(f) := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \frac{\left(\omega_k\left(G^m f, \delta\right)_{p,\lambda}\right)^q}{\delta^{(r-2m)q}} \frac{d\delta}{\delta} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{\delta > 0} \frac{\omega_k\left(G^m f, \delta\right)_{p,\lambda}}{\delta^{r-2m}}, & q = \infty. \end{cases}$$

$B^r_{p,q,\lambda}(f)$ sinifi banax fəzasıdır və onun norması belə təyin olunur:

$$\|f\|_{B^r_{p,q,\lambda}} := \|f\|_{p,\lambda} + b^r_{p,q,\lambda} .$$

Qeyd edək ki, $B^r_{p,\infty,\lambda}(f) = H^r_{p,\lambda}$.

Teorem 17. Fərz edək ki, $\alpha > 1 -$ ixtiyari ədəddir. $L_{p,\lambda}$ -dn olan f funksiyasının $B^r_{p,q,\lambda}$ sinfinə daxil olması üçün zəruri və kafi şərt $B^r_{p,q,\lambda}(f)$ yarımnormasının sonlu olmasıdır

$$\widetilde{b}^r_{p,q,\lambda}(f) := \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=0}^\infty a^{nrq} \left(E_{a^n}(f)_{p,\lambda}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{n \in Z_+} a^{nr} E_{a^n}(f)_{p,\lambda}, & q = \infty, \end{cases}$$

Burada $Z_+ = \{0,1,2,...\}$. Bu halda $B^r_{p,q,\lambda}$ norması eyniliklə bərabərdir

$$\|f\|_{p,\lambda} + \widetilde{b}^r_{p,q,\lambda}(f).$$

2.2.-2.5 yarımfəsillərin əsas məqsədi 13-17 teoremlərinin isbatıdır.

2.2-ci yarımfəsildə ümumiləşmiş funksiyalar sinfində Gegenbauer çevirməsinin və bürüməsinin xassələri öyrənilir. Xüsus halda göstərilir ki, ümumiləşmiş funksyalar sinfində təyin edilmiş Gegenbauer çevirməsi və bürüməsi özlərində ümumiləşmiş funksiyalardır, yəni xətti kəsilməz funksionaldırlar.

Fərz edək ki, $S - (1, \infty)$ aralığında təyin edilmiş əsas funksiyalar sinifidir, yəni sonsuz diferensiallanan və $t \to \infty$ özü və törəmələri ixtiyari

$\frac{1}{t}$ qüvvətindən sıfra tez gedən $\varphi(t)$ funksiyalar sinifidir və S' xətti kəsilməz funksionallar çoxluğudur, yəni yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar fəzasıdır.

S-dən olan f və g funksiyaların bürüməsi belə təyin olunur:

$$(f*g)(chx)=\int_0^\infty g(cht)A_{cht}f(chx)sh^{2\lambda}tdt$$

və $f*g\in S$.

Teorem 18. Fərz edək ki, $f\in S'$ və $g\in S$. Onda onların bürüməsi $(f*g)(chx)$ yavaş artan ümumiləşmiş funksiyadır, yəni $f*g\in S'$.

2.3-ün nəticələri köməkçi vasitə xarakteri daşıyır.

Necə ki, sürüşmə operatoru diferensiallama operatorunun qüvvətlərinə görə sıralara ayrılır, A_{cht} operatoruda Gegenbauerin G operatorunun qüvvətlərinə görə ayrıla bilər.

Lemma 10. Əgər $f\in G^{k-1}[0,\infty)$, onda Teylor-Delsart düsturu

$$A_{chs}f(chx)=\sum_{v=0}^{k-1}C_v(chs)G^v f(chx)+R_k(chs)f(chx).$$

mövcuddur.

Teorem 19. Əgər $W^r_{p,\lambda}$, $1\le p\le\infty$ onda

$$E_v(f)_{p,\lambda}\underset{\sim}{<}v^{-2r}\left\|G^r f\right\|_{p,\lambda},\qquad r=1,2,....$$

2.4-də 2.1 və 2.2 teoremləri isbat olunur. 2.5-də 2.4 və 2.5 teoremləri isbat olunur və daxiletmə teoremləri isbat olunur.

Fərz edək ki, $r>0$ və $a>1$ həqiqi ədədlərdir, k və s - isə $2k>r-2s>0$ şərtini ödəyən mənfi olmayan tam ədədlərdir.

Deyəcəyik ki, $f\in {}^j B^r_{p,q,\lambda}$ $j=1,2,3,4,$ əgər $f\in W^m_{p,\lambda}$ və ${}^j b^r_{p,q,\lambda}$ – yarımnormalar:

$$
{}^{1}b^{r}_{p,q,\lambda}(f):=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty \dfrac{\left(\omega_k\left(G^s,\delta\right)_{p,\lambda}\right)^q}{\delta^{(r-2s)q}}\dfrac{d\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty,\\ \sup\limits_{\delta>0}\dfrac{\omega_k\left(G^s f,\delta\right)_{p,\lambda}}{\delta^{r-2s}}, & q=\infty.\end{cases}
$$

$$
{}^{2}b^{r}_{p,q,\lambda}(f):=\begin{cases}\left(\int\limits_0^a \dfrac{\left(\omega_k\left(G^s f,\delta\right)_{p,\lambda}\right)^q}{\delta^{(r-2s)q}}\dfrac{d\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty,\\ \sup\limits_{0<\delta\le a}\delta^{-(r-2s)}\omega_k\left(G^s f,\delta\right)_{p,\lambda}, & q=\infty.\end{cases}
$$

$$
{}^{3}b^{r}_{p,q,\lambda}(f):=\begin{cases}\left(\sum\limits_{j=0}^\infty a^{jrq}\left(E_{a^j}(f)_{p,\lambda}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty,\\ \sup\limits_{j\in Z_+} a^{jr}E_{a^j}(f)_{p,\lambda}, & q=\infty.\end{cases}
$$

$$
{}^{4}b^{r}_{p,q,\lambda}(f):=\begin{cases}\inf\left(\sum\limits_{j=0}^\infty a^{jrq}\left\|Q_{a^j}\right\|^q_{p,\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty,\\ \inf\sup\limits_{j\in Z_+} a^{jr}\left\|Q_{a^j}\right\|_{p,\lambda}, & q=\infty.\end{cases}
$$

sonludur.

Aşağı sərhəd f funksiyasını

$$
f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}Q_{a^j}(x),\ \ Q_{a^j}(x)\in\Re\left(a^j,p,\lambda\right).
$$

sırasının $L_{p,\lambda}$-da yığılmasına görə götürülür.

${}^{j}B^{r}_{p,q,\lambda}$ fəzaları aşağıdakı normaya görə

$$
\|f\|_{{}^{j}B^{r}_{p,q,\lambda}}:=\|f\|_{p,\lambda}+{}^{j}b^{r}_{p,q,\lambda},\qquad j=1,2,3,4.
$$

banax fəzalarıdır.

Növbəti teoremdə ${}^{j}B^{r}_{p,q,\lambda}$ fəzalarının müxtəlif normaların eyniliyi alınıb.

Teorem 20. ${}^{j}B^{r}_{p,q,\lambda}$, $j=1,2,3,4$ fəzaları üst-üstə düşür və onların normaları ekvivalentdir (yəni banax fəzaları ekvivalentdirlər).

Qeyd edək ki, ${}^{1}B^{r}_{p,q,\lambda}$ и ${}^{3}B^{r}_{p,q,\lambda}$ fəzaları ekvivalentliyindən teorem 17 alınır.

Üçüncü fəslin nəticələrinə nəzər yetirək. Əvvəlcə işarələri və tərifləri daxil edək: $X=[0,\infty)$, $\Re_{+}=(0,\infty)$, $C(X)-$cüt kəsilməz funksiyalar fəzası, $C^{\infty}(X)\subset R$ -cüt, sonsuz diferensiallanan funksiyalar fəzası, $D(X)\subset R$ kompakt daşıyıcısı olan, cüt və diferensiallnan funksiyalar fəzası, $C_0(X)$- cüt funksiyalardan ibarət olan Şvars fəzası, $D'(X)-$ cüt ümumiləşmiş $D(X)$- olan funksiyalar fəzası, $S'(X)$-cüt ümumiləşmiş $S(X)$ - olan funksiyalar fəzası $S_0(X)\subset S(X)$ in elə alt fəzasıdır ki, $\psi\in S(X)$ olan ψ funksiyaların $\psi^{\wedge}_{Q}$ çevirməsinin kompakt daşıyıcısı $\Re_{+}$ dən olsun, yəni supp $\psi^{\wedge}_{Q}\in\Re_{+}$, $S^{1}_{0}(X)\subset S_0(X)$ elə alt çoxluğudur ki, $\psi\in S_0(X)$ üçün $\int\limits_0^{\infty}\left(\psi^{\wedge}_{r}\right)^2_Q(\alpha)\frac{dr}{r}=1$ ixtiyari $\alpha\in[1,\infty)$.

$f_r(x)=\dfrac{f\left(ch\frac{x}{r}\right)sh^{2\lambda}\frac{x}{r}}{rsh^{2\lambda}x}$, $r>0-$ f funksyasının X -da təyin olan və $d\mu_{\lambda}(x)=sh^{2\lambda}x\,dx$ ölçüsünü saxlayan dartılma funksiyasıdır, bu mənada ki,

$$\int\limits_0^{\infty}f_r(x)d\mu_{\lambda}(x)=\int\limits_0^{\infty}f(chx)d\mu_{\lambda}(x),\quad r>0,\ f\in L(d\mu_{\lambda}).$$

Tərif 9. Ölçülən $\omega:\Re_{+}\mapsto\Re_{+}$ və aşağıdakı şərti ödəyən:

$$\exists c>0;\ \forall r,\rho>0\qquad\left(\frac{1}{2}\le\frac{r}{\rho}\le 2\Rightarrow\omega(r)\le c\omega(\rho)\right).$$

ω funksiyasını çəki adlandıracayıq. Misal üçün

$$\omega_{\gamma,\beta}(r)=r^{\gamma}\left(1+|\log r|\right)^{\beta};\ \gamma,\beta\in R$$

funksiyası çəkidir.

Tərif 10. Fərz edək ki, $1\le p,\ q\le\infty$, $\psi\in S^{1}_{0}(X)$ və ω çəkidir. Gegenbauerin diferensial operatorunun doğurduğu ümumiləşmiş hamarlığa malik olan Besov fəzasını $\dot{\Lambda}^{\omega,\psi}_{p,q}(X)$, kimi işarə edək, elə $f\in S'(X)$ funksiyaları üçün ki

$$f(chx)=\int_0^\infty f*\psi_r*\psi_r(chx)\frac{dr}{r}$$

və $A_{p,q}^{\omega,\psi}(f)<\infty$, burada

$$A_{p,q}^{\omega,\psi}(f)=\begin{cases}\left(\int_0^\infty\left(\frac{\|f*\psi_r\|_{p,\lambda}}{\omega(r)}\right)^q\frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{r>0}\frac{\|f*\psi_r\|_{p,\lambda}}{\omega(r)}, & q=\infty.\end{cases}$$

Tərif 11. Fərz edək ki, $1\le p,\ \ q,q'\le\infty,\ \ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

Aşağıdakı şərtləri ödəyən

$(i)\quad \omega(r)r^{-\frac{2\lambda+1}{p}}\in L_{q',\lambda}\left([1,\infty),\frac{dr}{r}\right)$

$(ii)\ \exists\varepsilon>0$ такое, что $r^{\varepsilon}\omega(r)\in L_{q',\lambda}\left([0,1],\frac{dr}{r}\right)$

çəkilər sinifini $W_{\frac{2\lambda+1}{p}}$ kimi işarə edək.

Cümlə 1. Fərz edək ki, $1\le p,\ q\le\infty$ və $\omega\in W_{\frac{2\lambda+1}{P}}$. Onda $\dot{\Lambda}_{p,q}^{\omega}(X)$ banax fəzasıdır.

Cümlə 2. Fərz edək ki, $1\le q\le\infty$. Onda $1\le p_1\le p_2\le\infty$ üçün və elə iki ω_1,ω_2 çəkiləri üçün $r^{\frac{2\lambda+1}{p1}}(\omega_1(r))^{-1}=r^{\frac{2\lambda+1}{p2}}(\omega_2(r))^{-1}$ olduqda

$$\dot{\Lambda}_{p1,q}^{\omega1}(X)\subseteq\dot{\Lambda}_{p2,q}^{\omega2}(X).$$

daxiletmə mövcuddur.

Sonradan biz $\Lambda_{p,q}^{\omega}(X)=\dot{\Lambda}_{p,q}^{\omega}\cap L_p(d\mu_\lambda)$ fəzasını öyrənirik. Onun $B_{p,q}^{\omega}$ normasını təyin edirik və bu fəzanın bəzi xarakteristikalarını veririk.

Tərif 12. Fərz edək ki, $1\le\varepsilon,\delta<\infty$, $1\le q,q'\le\infty$, $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$ və ω çəkidir.

(i) çəkisini $\omega\ d_\varepsilon -$ çəki adlandıracayıq, əgər elə $c>0$ var ki,

$$\int_0^s r^\varepsilon \omega(r)\frac{dr}{r} \le c\, s^\varepsilon \omega(s), \quad \forall s>0,$$

(ii) çəkisini $\omega\ b_\delta -$ çəki adlandıracayıq, əgər elə $c>0$ var ki,

$$\int_s^\infty \frac{\omega(r)}{r^\delta}\frac{dr}{r} \le c\frac{\omega(s)}{s^\delta} \qquad \forall s>0.$$

d_ε çəkilər sinfini (d_ε) kimi işarə etsək, b_δ çəkilər sinfini (b_δ)-kimi işarə etsək, onda yazacayıq ki

$$W_{\varepsilon,\delta} = (d_\varepsilon)\cap(b_\delta),$$

$$W^q_{\varepsilon,\delta} = \left\{\omega : \omega(r) = x^{\frac{1}{q'}}(r)v^{-\frac{1}{q}}(r^{-1}); \quad x, v \in W_{\varepsilon,\delta}\right\}.$$

Xassə 1. Fərz edək ki, $\overline{\omega}(r) = \omega(r^{-1})$ Onda $\omega \in (b_\varepsilon) \Leftrightarrow \overline{\omega} \in (d_\varepsilon)$.

Xassə 2. Əgər $\omega \in W^q_{\varepsilon,\delta}$ onda $\omega \in W^q_{\varepsilon',\delta'}$ ixtiyari $\varepsilon' > \varepsilon$ və $\delta' > \delta$.

Teorem 21. (Birinci xarakteristik teorem) Fərz edək ki, $1 \le p,\ q \le \infty$ və $\omega\ W^q_{0,2}\ f \in \Lambda^\omega_{p,q}$ üçün

$$B^\omega_{p,q}(f) = \begin{cases} \left(\int_X \left(\frac{\|\Delta_{cht} f\|_{p,\lambda}}{\omega(t)}\right)^q \frac{dt}{t}\right), & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in X} \frac{\|\Delta_{cht} f\|_{p,\lambda}}{\omega(t)}, & q = \infty. \end{cases}$$

Onda $\Lambda^\omega_{p,q}(X)$-dən olan $B^\omega_{p,q}$ norması ekvivalentdir $A^\omega_{p,q}$.

Teorem 22. (İkinci xarakteristik teorem) Fərz edək ki, $1 \le p,\ q \le \infty$ və $\omega \in W^q_{0,2}\ f \in \Lambda^\omega_{p,q}(X)$ üçün norma budur

$$C^\omega_{p,q}(f) = \begin{cases} \left(\int_X \left(\frac{m(f,t)_{p,\lambda}}{\omega(t)}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in X} \frac{m(f,t)_{p,\lambda}}{\omega(t)} & q = \infty, \end{cases}$$

burada $\quad m(f,t)_{p,\lambda} = \sup\limits_{0\le x\le t}\|\Delta_{chx} f\|_{p,\lambda}$.

Onda norma $C^{\omega}_{p,q}(f)$ ekvivalentdi $A^{\omega}_{p,q}$.

Dördüncü fəsildə ÜSO doğuran Gegenbauerin maksimal funksiyası ($G-$maksimal funksiya) anlayışı daxil edilir.

$G-$ maksimal funksiyanın $L_{p,\lambda}-$ məhdudluğu isbat edilir. Riss-Gegenbauer potensialı ($G-$ Riss potensialı) daxil edilir və onun üçün Sobolev tipli teorem isbat olunur.

4.1-də bəzi köməkçi nəticələr əldə edilib.

Fərz edək ki, $H(x,r) = (x-r, x+r)\cap[0,\infty)$, $r\in(0,\infty)$, $x\in[0,\infty)$. İxtiyari ölçülən $E\subset[0,\infty)$çoxluğunun ölçüsünü $\mu E = |E|_{\lambda} = \int\limits_{E} sh^{2\lambda} t dt$ kimi təyin edək. Norması sonlu olan ölçülən funksiyalar fəzasını belə işarə edək $L_p([0,\infty),G)\equiv L_{p,\lambda}[0,\infty)$, $1\le p\le\infty$. Gegenbauerin maksimal funksiyalarını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$M_G f(chx) := \sup_{r>0}\frac{1}{|H(0,r)|_{\lambda}}\int_0^r A_{cht}|f(chx)|d\mu_{\lambda}(t),$$

$$M_{\mu} f(chx) := \sup_{r>0}\frac{1}{|H(x,r)|_{\lambda}}\int_{H(x,r)}|f(cht)|d\mu_{\lambda}(t), \qquad d\mu_{\lambda}(t) = sh^{2\lambda} t dt,$$

$$|H(0,r)|_{\lambda} = \int_0^r sh^{2\lambda} t dt, \ |H(x,r)|_{\lambda} = \int_{H(x,r)} sh^{2\lambda} t dt,$$

$$A_{cht} f(chx) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}\int_0^{\pi} f(chx cht - shx sht\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\lambda-1} d\varphi -$$

Gegenbauerin ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun başqa formasıdır.

Lemma 11. Əgər $0<\lambda<\frac{1}{2}$ onda

$$|H(0,r)| \sim \begin{cases} \left(sh\frac{r}{2}\right)^{2\lambda+1}, & 0<r<2, \\ \left(ch\frac{r}{2}\right)^{4\lambda}, & 2\le r<\infty. \end{cases}$$

Burada $f \sim g$ o deməkdir ki, bəzi $c_{1,\lambda}$ və $c_{2,\lambda}$ λ-dan asılı olan sabitləri üçün $c_{1,\lambda} g \le f \le c_{1,\lambda} g$ münasibət ödənilir.

Lemma 12. Fərz edək ki, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ və $x \in [0,\infty)$, $r \in (0,\infty)$. Onda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur: əgər $0 < r < 2$

$$|H(x,r)|_\lambda \le c_\lambda \begin{cases} \left(sh\frac{r}{2}\right)^{2\lambda+1}, & 0 \le x < r, \\ sh\frac{r}{2} ch^{2\lambda} x, & r \le x < \infty. \end{cases}$$

və $2 \le r < \infty$ olduqda

$$|H(x,r)|_\lambda \le c_\lambda \begin{cases} ch^{2\lambda} r, & 0 \le x < r, \\ ch^{2\lambda} x ch^{2\lambda} r, & r \le x < \infty. \end{cases}$$

3.2-də $G-$maksimal funksiyanın $L_{p,\lambda}$ məhdudluğu isbat edilir.

Teorem 23. Əgər $0 \le x < \infty$ və $0 < r < \infty$ onda

$$M_G f(chx) \le c_\lambda M_\mu f(chx),$$

burada c_λ – bəzi müsbət və λ-dan asılı olan sabitdir.

Teorem 24. a) Əgər $f \in L_{p,\lambda}[0,\infty)$ onda ixtiyari $\alpha > 0$ üçün

$$|\{x : M_G(chx) > \alpha\}|_\lambda \le \frac{c_\lambda}{\alpha} \int_0^\infty |f(cht)| sh^{2\lambda} t dt = \frac{c_\lambda}{\alpha} \|f\|_{L_{1,\lambda}[0,\infty)},$$

burada $c_\lambda > 0$ və ancaq λ-dan asılıdır.

в) Əgər $f \in L_{p,\lambda}[0,\infty)$, $1 < p < \infty$ onda $M_G f(chx) \in L_{p,\lambda}[0,\infty)$ və

$$\|M_G f\|_{L_{p,\lambda}[0,\infty)} \le c_{p,\lambda} \|f\|_{L_{p,\lambda}[0,\infty)}.$$

Nəticə. Əgər f – lokal inteqrallanan funksiyadırsa və $f \in L_{p,\lambda}[0,\infty)$, $1 \le p < \infty$, onda

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|H(0,r)|_\lambda} \int_{H(0,r)} A_{cht} f(chx) sh^{2\lambda} t dt = f(chx).$$

Qeyd edək ki, 23 və 24 teoremləri Bessel maksimal funksiyası üçün alınan nəticələrin analoqlarıdır.

3.3-də Riss-Gegenbauer potensialı ($G-$ Riss potensialı) anlayışı daxil edilir və onun inteqral ifadələri alınır. Bundan əlavə $G-$ Riss potensialı üçün Sobolev tipli teorem isbat olunur.

Tərif 13. Riss-Gegenbauer potensialını ($G-$ Riss potensialı) aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$I_G^\alpha f(chx):=G^{-\frac{\alpha}{2}}f(chx).$$

Lemma 13. Fərz edək ki, $h_r(chx)$ G operatorunun doğurduğu nüvədi və $0<\alpha<2\lambda+1$. Onda

$$I_G^\alpha f(cht)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty r^{\frac{\alpha}{2}-1}h_r(chx)dr\right)A_{cht}f(chx)sh^{2\lambda}xdx.$$

burada $h_r(chx)=\int_0^\infty e^{-\gamma(\gamma+2\lambda)r}P_\gamma^\lambda(chx)dm_\lambda(\gamma)$.

Nəticə. Aşağıdakı bərabərsizlik

$$\left|I_G^\alpha f(cht)\right|\lesssim\int_0^\infty\left|A_{cht}f(chx)\right|(shx)^{\alpha-2\lambda-1}sh^{2\lambda}xdx .$$

Riss-Gegenbauerin kəsik inteqralına nəzər salaq

$$\Im_G^\alpha f(chx):=\int_0^\infty A_{cht}(shx)^{\alpha-2\lambda-1}f(cht)sh^{2\lambda}tdt,\quad 0<\alpha<2\lambda+1.$$

Ölçülən funksiyalar zəif $L_{p,\lambda}$ fəzanın $WL_{p,\lambda}[0,\infty)$ kimi işarə edək, belə ki

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}}:=\sup t\left|\{x\in[0,\infty):|f(chx)|>t\}\right|^{\frac{1}{p}}.$$

$G-$ Riss potensialı üçün Xardi-Littlvud-Sobolev teoreminin analoqunun yeri var.

Teorem 25. Fərz edək ki, $1-2\lambda<\alpha<2\lambda+1$, $1\le p<\frac{2\lambda+1}{\alpha}$ və $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{2\lambda+1}$.

a) Əgər $f\in L_{p,\lambda}[0,\infty)$, onda $\Im_G^\alpha f$ sanki bütün $x\in[0,\infty)$ üçün müntəzəm yığılır.

в) Əgər $1\le p<\frac{2\lambda+1}{\alpha}$, $f\in L_{p,\lambda}[0,\infty)$, onda $\Im_G^\alpha f\in L_{q,\lambda}[0,\infty)$ və

$$\left\|I_G^\alpha f\right\|_{L_{q,\lambda}[0,\infty)}\lesssim\left\|\Im_G^\alpha f\right\|_{L_{q,\lambda}[0,\infty)}\lesssim\|f\|_{L_{p,\lambda}[0,\infty)},$$

c) Əgər $f \in L_{1,\lambda}[0,\infty)$ $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2\lambda+1}$, onda

$$\left\| I_G^{\alpha} f \right\|_{WL_{q,\lambda}[0,\infty)} \lesssim \left\| \Im_G^{\alpha} f \right\|_{WL_{q,\lambda}[0,\infty)} \lesssim \left\| f \right\|_{L_{1,\lambda}[0,\infty)}.$$

BMO –Gegenbauer fəzasını daxil edək.

Tərif 14. Sonlu norması olan lokal inteqrallanan funksiyalar BMO-Gegenbauer fəzasını (G-BMO fəzası) aşağıdakı kimi işarə edək:

$$\|f\|_{BMO[0,\infty)} := \sup_{x,r \in (0,\infty)} \frac{1}{|H(0,r)|_{\lambda}} \int_{H(0,r)} \left| A_{cht} f(chx) - f_{H(0,r)}(chx) \right| sh^{2\lambda} t dt,$$

burada

$$f_{H(0,r)}(chx) = \frac{1}{|H(0,r)|_{\lambda}} \int_{H(0,r)} A_{cht} f(chx) sh^{2\lambda} t dt.$$

Modifik olan Riss-Gegenbauerin kəsr inteqralına baxaq

$$\tilde{\Im}_G^{\alpha} f(chx) = \int_0^{\infty} \left(A_{cht}(shx)^{\alpha-2\lambda-1} - (sht)^{\alpha-2\lambda-1} \chi_{\left(\frac{1}{4},\infty\right)}(cht) \right) f(cht) sh^{2\lambda} t dt,$$

burada $\chi_{\left(\frac{1}{4},\infty\right)}(cht)$ - $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$ aralığının xarakteristik funksiyasıdır.

Teorem 26. Fərz edək ki, $1-2\lambda < \alpha < 2\lambda+1$, $p\alpha = 2\lambda+1$, $f \in L_{p,\lambda}[0,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Onda $\tilde{\Im}_G^{\alpha} f \in BMO[0,\infty)$ və

$$\left\| \tilde{\Im}_G^{\alpha} f \right\|_{BMO_G[0,\infty)} \lesssim \|f\|_{L_{p,\lambda}[0,\infty)}.$$

Müəllif, həmçinin alınmış nəticələrin müzakirəsi və işə daimi diqqətinə görə, elmi məsləhətçisi AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyevə dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Ибрагимов Э.Дж. О чезаровских средних ультрасферического ряда. Учен. записки Азгосуниверситета им. С.М.Кирова, № 4, 1976, с.17-25.
2. Ибрагимов Э.Дж. О чезаровских средних гиперсферических рядов Лапласа. Учен. записки Азгосуниверситета им. С.М.Кирова, №2, (1977), с.40-44.
3. Ибрагимов Э.Дж. Об операторах типа Джексона на сфере, Учен. записки Азгосуниверситета им. С.М.Кирова, № 6, (1978), с.21-29.
4. Ибрагимов Э.Дж. Об одном заданном на сфере ряда по полиномам Якоби, Научные труды, серия физ.-мат. Науки, изд-во Азгосуниверситета им. С.М.Кирова, № 3, (1979), с.67-74.
5. Ибрагимов Э.Дж. О семействе линейных положительных операторов на сфере. Науч. тр., серия физ.-мат. наук, изд-во Азгосуниверситета им. С.М.Кирова, № 6, (1979), с.3-9.
6. Ибрагимов Э.Дж., Радыно Я.В. О приближении функций на сфере в метриках $L_{p,\lambda}$ интегралами типа Джексона, Вестник БГУ им. В.И.Ленина, сер. Физика, математика, механика, № 1, Минск 1984, с.35-38.
7. Ибрагимов Э.Дж. О порядке сходимости к нулю коэффициентов Фурье-Якоби. Всесоюзная конференция «Современные проблемы теории функций», Баку – 1989, с.49-50.
8. Ибрагимов Э.Дж. О преобразовании Якоби. Тезисы докладов Северокавказской региональной конференции, Грозный – 1989, с.67-68.
9. Ibrahimov E.J. Asymptotic estimations of approximation of functions by linear positive operators, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol. XV(XXIII), (2001), p. 88-93.
10. Ibrahimov E.J. On approximation order of functions by m-singular Gevenbauer integrals, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol. XVII (XXV), (2002), p.71-77.
11. Ибрагимов Э.Дж. Теорема типа Соболева для дробного интеграла, порожденного дифференциальным выражением Гегенбауэра Вторая Международная конференция, посвященная 80-летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева, Москва: ФИЗМАТЛИТ, (2003), с.257-260.

12. Ibrahimov E.J., Jafarova S.A. About analogue of theorem Zigmuad for Jacoby polynomial, Khazar Journal of Mathematics, vol. 2, № 3 (2006), p.21-34.
13. Ibrahimov E.J. On maximal functions, associated with the Gegenbauer expansion on the finite segment, Khazar Journal of Mathematics, vol. 2, №1, (2006), p.31-40.
14. Ibrahimov E.J., Guliyev V.S. Calderon reproducing formula associated with the Gegenbauer operator on the half-line, Jour. Math. Anal. and Appl., 335 (2007), p.1079-1094.
15. Ибрагимов Э.Дж. и Гулиев В.С. Эквивалентные нормировки пространств функций, ассоциированных с обобщенным сдвигом Гегенбауэра, Analysis Mathematics, 34 (2008), с.83-103.
16. Ibrahimov E.J., Guliyev V.S. On estimating the approximation of locally summable functions by Gegenbauer singular integrals. Georgian Mathematical Journal, 15(2), (2008), p.251-262.
17. Ibrahimov E.J., Jafarova S.A. On approximation of functions by Gegenbauer singular integrals, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, (2010), vol. XXXIII (XLI), p.67-78.
18. Ibrahimov E.J., Jafarova S.A. On approximation order of functions by Gegenbauer singular integrals, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, (2011), vol.XXXV (XLIII), p. 39-52.
19. Ibrahimov E.J. On Gegenbauer transformation on the half-line, Georgian Math. J. 18(2011), p.497-515.
20. Ibrahimov E.J., Jafarova S.A. On convergence and convergence order of Gegenbauers m-singular integrals, Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, 159 (2012), p.21-42.
21. Ibrahimov E.J. Maximal operators associated with Gegenbauer expansions on the half-line. I., Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics, NASA, 40 (1), (2014), p.104-121.
22. Ibrahimov E.J. Generalized weighted Besov spaces on the Gegenbauer hypergroup, Commentationes Mathematicae 54(1), 2014, p.95-128.
23. Ibrahimov E.J. On Fourier coefficients of some classes of functions and their applications in approximation theory. Commentationes Mathematicae 54(2) (2014), p.217-254.
24. Ibrahimov E.J. On summability of Fourier-Qegenbauer series. Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, 166, (2014), p.69-93.
25. Ibrahimov E.J., Guliyev V.S. Generalized Gegenbauer shift and some problems of the theory of approximation of functions on the metric of $L_{2,\lambda}$.

Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. of physical-technical and mathematical sciences, vol. XXXV, №2, (2015), p.24-56.
26. Ibrahimov E.J. The Jacobi transform method in approximation theory. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, 169 (2015), p.33-82.
27. Ibrahimov E.C., Akbulut A. The Hardy-Littewood-Sobolev theorem for Riesz potential generated by Gegenbauer operator. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute 170 (2016), p.166-199.
28. Ибрагимов Э. Дж. О сходимости рядов Фурье-Якоби в среднем. Владикавказский математический журнал, 18(3), (2016), с.43-60.

ЭЛЬМАН ДЖАВАНШИР оглы ИБРАГИМОВ

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ГЕГЕНБАУЭРА

АННОТАЦИЯ

Исследования данной диссертации относятся к пяти важным разделам гармонического анализа таких как: теория преобразований, теория аппроксимации, теория сингулярных интегральных операторов, теории максимальных функций и терия потенциалов, которые тесно взаимосвязаны между собой и удачно дополняют друг друга. Получены следующие основные результаты:

1. Построено новое интегральное преобразование (названное нами преобразованием Гегенбауэра) и получена теорема о его обращении.
2. Построен m-сингулярный интеграл Гегенбауэра и получены теоремы о сходимости и порядке сходимости этих интегралов как в характерных точках типа Лебега, так и в метрике пространства $L_{p,\lambda}$. Получены асимптотические оценки приближения этими интегралами функций, обладающих производными Римана, которые введены нами с помощью функций, обобщенного сдвига Гегенбауэра.
3. Получена точная оценка приближения локально суммируемых функций сингулярными интегралами Гегенбауэра.
4. Получена формула Тейлора-Дельсарта, которая представляет собой разложение оператора обобщенного сдвига Гегенбауэра по степеням дифференциального оператора Гегенбауэра.
5. Построена максимальная функция Гегенбауэра и доказана ее $L_{p,\lambda}$ ограниченность.
6. Получена формула потенциала Рисса-Гегенбауэра и для него доказана теорема типа Харди-Литтлвуда-Соболева.
7. Построены пространства типа Никольского-Бесова, доказано, что они являются банаховыми пространствами. Установлена эквивалентность норм этих пространств (т.е. банаховы пространства эквивалентны).
8. Построены пространства Бесова обобщенной гладкости, порожденные дифференциальным оператором Гегенбауэра и даны различные характеристики этих пространств

ELMAN JAVANSHIR oglu IBRAHIMOV

SOME ASPECTS OF HARMONIC ANALYSIS ASSOCIATED WITH GEGENBAUER DIFFERENTIAL OPERATOR

ABSTRACT

Dissertation research covers five important sections of the harmonic analysis: theory of transformations, approximation theory, singular integrals theory, theory of maximal functions and potential theory.

The following main results were obtained in the thesis:

1. New integral transformation is constructed and theorem about its inverse transformation is proved. The transformations properties have been studied.
2. By the use of constructed new singular integral the convergence and order of convergence to its function has been studied in the Lebesgue point, as well as metric space. Taylor and Riemann-type derivatives definition is given and the asymptotic theorems for functions with such derivatives are proved.
3. An exact estimate of the approximation of locally summable functions by singular Gegenbauer integrals is obtained.
4. Generalized shift operator was worked in, by the use of which the module of smoothness was constructed and its properties have been studied. Direct and inverse theorems of approximation theory have been obtained.
5. Nikolski-Besov space was determined and their approximate characteristic has been obtained. Embedding theorems have been proved in these spaces.
6. The properties of generalized shift operator and its convolution in the class of generalized functions have been studied.
7. Besov spaces of generalized smoothness generated by Gegenbauer differential operator are constructed and the different characteristics of these spaces are given.
8. The maximum function created by Gegenbauer differential operator is based, and its boundedness is proved.
9. Potential of Riesz-Gegenbauer is constructed and theorem of Hardy-Littlewood-Sobolev is proved for it.

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЭЛЬМАН ДЖАВАНШИР оглы ИБРАГИМОВ

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ГЕГЕНБАУЭРА

1202.01– Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2017