НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЯГУБ АМИЯР оглы ШАРИФОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

1211.01 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по математике

БАКУ - 2015

Работа выполнена в институте **Систем Управления** НАН Азербайджанской Республики

Официальные оппоненты:
Доктор физико-математических наук, профессор **А.Б. Алиев**
Доктор физико-математических наук, профессор **А.К. Керимов**
Доктор физико-математических наук, профессор **М.А. Ягубов**

Ведущая организация: Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, кафедра «Математический анализ»

Защита диссертации состоится 22 сентября 2015 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета D.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук по математике при института математики и механика

Адрес: AZ 1148, г.Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке института Математика и механика НАН Азербайджанской Республики

Автореферат разослан 01 июля 2015 г.

Учёный секретарь
Диссертационного
Совета D.01.111 **к.ф.-м.н., доц. Р. А. Бандалиев**

Актуальность темы. Изучение некоторых физических процессов сталкивается с трудностями, обусловленными невозможностью производить непосредственные измерения на границе области протекания процесса. Такая ситуация может возникать при изучении процессов, происходящих в турбулентной плазме, некоторых диффузионных процессах, процессах влагопереноса в капиллярно-пористой среде. В этих случаях математическое моделирование рассматриваемого процесса приводит к задачам с неклассическими условиями.

Одним из фундаментальных аспектов исследования различного рода явлений в сложных системах является необходимость отказа от упрощений и ограничений, приводящих к линейной модели. В том случае, когда акцент в исследованиях делается на поведение системы на границе среды, математическое моделирование рассматриваемой проблемы приводит к задаче с нелокальными, в том числе с нелинейными, граничными условиями. Например, при изучении колебаний струны, когда закрепление её концов не подчиняется закону Гука, возникает нелинейное граничное условие. В других случаях закрепления концов струны могут возникать нестационарные граничные условия, содержащие не только след самого решения и его производной по нормали, но и производные по времени вплоть до второго порядка.

Задачи с неклассическими граничными условиями оказались интересными и с чисто теоретической точки зрения. Дело в том, что многие классические методы доказательства разрешимости начально-краевых задач непосредственно не применимы для изучения задач с нелокальными или нелинейными условиями. Поэтому современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки, исследования и обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, ярким примером которых являются нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Напоминаем, нелокальными называют такие задачи, в которых вместо или вместе с граничным условием ставятся условия, связывающие значение решения (и, возможно, его производных) во внутренних точках области. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью. Это связано с тем, что математическими моделями различных физических, химических, биологических процессов часто являются задачи, в которых вместо классических краевых условий задаётся определённая связь значений искомой функции (или её производных) на границе области и в её внутренних точках. Например, ещё 1896 г. В.А. Стекловым было показано, что математическое моделирование процессов охлаждения тел конечных размеров приводит к задаче нахождения решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего нелокальным условиям, представляющим собой линейную комбинацию значений искомого решения и его производных в различных точках границы.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями, возникающими в гидродинамике, рассматривал еще А.Зоммерфельд. Впоследствии одномерные нелокальные задачи изучали В.А.Ильин и Е.И.Моисеев, А.Крол, М. Пиконе, Я.Д. Тамаркин и другие. В последние годы большой вклад в развитие теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений различных классов вынесли А. Аширалиев, А.М. Нахушев, Л.С.Пулькина, П.Л. Гуревич, В.И. Жегалов, Т.Ш. Кальменов, Н.И.Ионкин, О.А.Репин и многие другие авторы. Отметим, что эти авторы, в основном, исследовали спектральные свойства нелокальных краевых задач. Впервые многоточечную краевую задачу в общей постановке для линейного уравнения исследовал Тамаркин Я.В.

Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении физических процессов некоторые величины могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но известно среднее значение этих величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы, распространением тепла, процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах, вопросов демографии и математической биологии. Задачи с интегральными краевыми условиями возникают также в различных областях механики и теории управления. Нелокальные интегральные условия можно считать обобщением дискретных нелокальных условий или условий локального сдвига.

Исследования показали, что присутствие нелокальных условий вызывает ряд специфических трудностей, которые не позволяют воспользоваться стандартными методами для исследования разрешимости нелокальных задач. Поэтому вопрос разработки методов исследования нелокальных задач является весьма актуальным.

Одним из важнейших направлений современной прикладной математики является разработка и исследование методов оптимизации динамических систем управления. Проблемы теории оптимального управления рассматриваются во многих исследованиях и получен ряд фундаментальных результатов. К ним можно отнести работы Р.Беллмана, Болтянского В.Г., Васильева Ф.П., Габасова Р.Ф., Гамкрелидзе Р.В., Красовского Н.Н., Крилловой Ф.М., Лионса Ж.Л., Моисеева Н.Н., Мищенко Е.Ф., Понтрягина Л.С., Филиппова А.Ф. и многих других.

Весомый вклад в теорию оптимального управления внесли Алиев Ф.А., Айда-заде К.Р., Ахмедов Ф.Ш., Ахиев С.С., Ахмедов К.Т., Бутковский А.Г., Гасанов К.К., Егоров А.И., Искендеров А.Д., Кулиев Г.Ф., Мансимов К.Б., Марданов М.Дж., Меликов Т.К. Плотников В.И., Садыгов М.А., Сиразитдинов Т.Л., Сумин М.И., Сумин .И., Тадумадзе Т.А. Тагиев Р.К., Шарифов Я.А., Ягубов Г.Я., Ягубов М.А., Юсубов Ш.Ш. и др.

До сих пор, в основном, рассматривались задачи оптимального управления, в которых динамика процесса описывалась дифференциальными уравнениями с сосредоточенными или распределенными параметрами, и по тенденции для них ставились классические начальные (задача Коши) или начально-краевые задачи.

Последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения дробного порядка. Причиной тому является то, что многие процессы науки, техники и естествознания описываются именно такими уравнениями. Часто при математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями длительностью возмущения удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят «мгновенный» характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, как их называют, дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. Последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Поэтому целесообразно исследовать задачи оптимального управления, в которых состояние системы описывается дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях.

Настоящая диссертация посвящена следующим взаимосвязанным вопросам: вопросы существования решений нелокальных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения и исследования задач оптимального управления, описываемого ими.

Исходя из вышеизложенного, считаем, что тема диссертационной работы является актуальной.

Цель работы. 1. Доказать различные теоремы существование и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений дробного порядка с нелокальными условиями.

2. Доказать принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с многоточечными и интегральными краевыми условиями.

3. Получить необходимые условия оптимальности первого порядка в виде вариациональных неравенств в различных задачах оптимального управления с нелокальными условиями.

4. Получить различные необходимые условия второго порядка в классическом смысле для различных задач оптимального управления с нелокальными условиями.

Научная новизна:

-доказаны различные теоремы существования и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений с двухточечными и интегральными краевыми условиями при импульсных воздействиях.

-доказаны различные теоремы существования и единственности решения для дифференциальных уравнений дробного порядка с двухточечными краевыми условиями.

- доказаны теоремы существования и единственности решения для дифференциальных уравнений высокого дробного порядка с нелокальными краевыми условиями при импульсных воздействиях.

-получены необходимые условия оптимальности первого порядка в виде принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с многоточечными краевыми условиями.

- получены необходимые условия оптимальности первого порядка в виде принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с интегральными краевыми условиями.

-вычислен градиент и найдено необходимое условие оптимальности в виде вариационных неравенств в задаче оптимального управления с двухточечными краевыми условиями при импульсных воздействиях.

-вычислен градиент и найдено необходимое условие оптимальности в виде вариационных неравенств в задаче оптимального управления для гиперболических систем первого порядка с интегральными краевыми условиями.

-выведены необходимые условия оптимальности второго порядка в классическом смысле для задач оптимального управления, описываемых системой дифференциальных уравнений с двухточечными, трехточечными, интегральными условиями, а также для дискретных систем с двухточечными краевыми условиями.

Общая методика исследования. В работе применяются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений дробного порядка и методы оптимального управления.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретической характер. Однако, эти результаты могут быть успешно применены при исследовании задач с нелокальными краевыми условиями.

Апробация работы. Результаты полученные в диссертации докладывались на научных семинарах института Прикладной Математики Бакинского Государственного

Университета, Института Кибернетики НАН Азербайджана и Abstracts of the International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, May 29-31, 2013, Baku, Azerbaijan, First International Conference on Analysis and Applied Mathematics Gümüşhanə IV Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» Нальчик-Терскол 04-08 декабря 2013, International Conference "Problems of cybernetics and informatics", Sep. 2012 и многочисленных республиканских и международных конференциях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы 32 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 259 страницах, состоит из введения, четырёх глав и списка литературы, содержащего 133 наименований.

Краткое содержание диссертации. Материалы диссертации расположена следующим образом. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка используемой литературы.

В первой главе изучены вопросы разрешимости краевых задач с нелокальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений дробного порядка. В разделе 1.1 исследуются нелокальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых краевые условия задачи задаются в виде линейной комбинаций двухточечных и интегральных условий, т.е. изучается существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t), x(t)), \qquad t \in [0,T], t \neq t_i, \qquad i = 1,2,...,p \qquad (1)$$

с двухточечными и интегральными условиями

$$Ax(0)+Bx(T)=\int_0^T g(s,x(s))\,ds \qquad (2)$$

при импульсных воздействиях

$$x(t_i^+)-x(t_i)=I_i(x(t_i)), \qquad i=1,2,...,p\ , \qquad (3)$$

где $0=t_0<t_1<...<t_p<t_{p+1}=T$, $A,B\in R^{hxn}$ заданные матрицы, причем $\det\,(A+B)\neq 0$, $g:[0,T]\times R^n\to R^n$, $I_i:R^n\to R^n$ заданные функции; $\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i^-)$,

$$x(t_i^+)=\lim_{h\to 0^+}x(t_i+h), \qquad x(t_i^-)=\lim_{h\to 0^+}x(t_i-h)=x(t_i)$$

правосторонние и левосторонние пределы функции $x(t)$ в точке $t=t_i$, соответственно.

Через $C([0,T]:R^n)$ будем обозначать пространство Банаха, которое состоит из непрерывных вектор-функций $x(t)$ определенных на отрезке $[0,T]$ со значениями в R^n и с нормой $\|x\|=\max\limits_{[0,T]}|x(t)|$, где $|\cdot|$ обозначена норма в R^n.

Через $PC([0,T],R^n)$ обозначим линейное пространство

$$PC([0,T],R^n)=\{x:[0,T]\to R^n; \quad x(t)\in C([t_i,t_{i+1}],R^n),$$

$i=0,1,...,p;$ $x(t_i^+)$ и $x(t_i^-)$, $i=1,2,...,p$ существуют и конечны; $x(t_i^-)=x(t_i)$.

Очевидно, линейное пространство $PC([0,T];R^n)$ банахово с нормой $\|x\|_{Pc}=\max\{\|x\|_{C(([t_i,t_{i+1}])}, i=0,1,...,p\}$.

Определим решение краевой задачи (1)-(3) следующим образом.

Определение. Функция $x\in PC([0,T]:R^n)$ называются решением краевой задачи (1) - (3), если для любого $t\in[0,T]$, $t\neq t_i$, $i=1,2,...,p$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

и для $t = t_i \quad i = 1,2,..., p, \quad 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T$

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)).$$

Кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет краевую условию (2).

Теорема1. Предположим, что выполняются следующие условия:

(H1) Существует постоянная $N \geq 0$ такая, что

$$\left| f(t,x) - f(t,y) \right| \leq N \left| x - y \right|,$$

для любого $t \in [0,T]$ и для всех $x, y \in R^n$;

(H2) Существует постоянная $M \geq 0$ такая что,

$$\left| g(t,x) - g(t,y) \right| \leq M \left| x - y \right|$$

для любого $t \in [0,T]$ и для всех $x, y \in R$;

(H3) Существуют постоянные $l_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,P$, такие что

$$\left| \dot{I}_i(x) - \dot{I}_i(y) \right| \leq l_i \left| x - y \right|$$

для любых $x, y \in R^n$.

Если

$$L = \left[S\left(NT + \sum_{k=1}^{P} l_k \right) + MT \left\| (A = B)^{-1} \right\| \right] < 1 ,$$

тогда краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение.

Здесь число S определяется равенством

$$S = \max \left\{ \left\| (A + B)^{-1} A \right\|, \left\| (A + B)^{-1} B \right\| \right\}.$$

Теорема 2. Предположим, что выполняются следующие условия:

(H4) Функция $f : [0,T] \times R^n \to R$ непрерывна;

(H5) Существует постоянная $N_1 \geq 0$, такая что

$$\left| f(x,t) \right| \leq N_1$$

для всех $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$.

(H6) Функция $g:[0,T] \to R^n \to R^n$ непрерывна;

(H7) Существует постоянная $M_2 \geq 0$, такая что

$$\left|g(t,x)\right| \leq N_2$$

для всех $t \in [0,T]$ и для любых $x \in R^n$;

(H8) Функции $I_k : R^n \to R^n, k = 1,2,...,p$ непрерывны и существует постоянная $N_3 > 0$, такая что

$$\max_{k \in \{1,2,...,p\}} \left|I_k(x)\right| \leq N_3 .$$

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно решение на $[0,T]$.

Теорема 3. Предположим, что кроме условий (H4) и (H6) выполняются следующие условия:

(H9). Существует $\theta_g \in L^1([0,T], R^+)$ и непрерывная неубывающая функция $\psi_f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, такая, что $\left|f(t,x)\right| \leq \theta_g(t) \cdot \psi_f(|x|)$ для любого $t \in [0,T]$ и для всех $x \in R^n$;

(H10) Существует $\theta_g \in L^1([0,T], R^+)$ и непрерывная неубывающая функция $\psi_g : (0,\infty) \to [0,\infty)$, такая что, $\left|g(t,x)\right| \leq \theta_g(t) \cdot \psi_g(|x|)$ для любого $t \in [0,T]$ и для всех $x \in R^n$;

(H11) существует непрерывная и неубывающая функция $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, такая что $\left|I_k(x)\right| \leq \psi(|x|)$для любого $x \in R^n$ и $k = 1,2,..., p$.

(H12) Существует число $k > 0$, такое что

$$\frac{k}{S\psi_f(k)\int_0^T \theta_f(t)dt + \left\|(A+B)^{-1}\right\|\psi_g(k)\int_0^T \theta_g(t)dt + Sp\psi(k)} > 1.$$

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0,T]$.

В разделе 1.2 мы изучаем задачу существования и единственности решения для систем нелинейных дифференциальных уравнении дробного порядка в виде:

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), t \in (0,T) \tag{4}$$

с двухточечными и интегральными краевыми условиями

$$Ex(0) + Bx(T) = \int_0^T g(s, x(s))\,ds, \tag{5}$$

где $E \in R^{n\times n}$ заданная единичная матрица, $B \in R^{n\times n}$ заданная матрица, и

$$\|B\| < 1. \tag{6}$$

Здесь $f(t,x)$ и $g(t,x)$ - n - мерные заданные вектор функции, ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}$ - дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0 < \alpha \le 1$.

Первым основным результатом данного раздела является разрешимость краевой задачи (4), (5). Этот результат базируется на теореме Банаха о неподвижной точке

Теорема 4. Предполагаем, что

(G1) Существует постоянная $L \ge 0$, такая что

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x - y|;$$

(G2). Существует константа $M \ge 0$, такая что

$$|g(t,x) - g(t,y)| \le M|x - y|,$$

для любого $t \in [0,T]$ и любых $x, y \in R^n$.

Если

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[LT^{\alpha}\left(1 + \left(1 - \|B\|\right)^{-1}\right)\right] + \left(1 - \|B\|\right)^{-1} MT < 1,$$

то краевая задача (4), (5) имеет единственное решение на $[0,T]$.

Вторым основным результатом данного раздела является существование решения краевой задачи (4), (5), основанное на теореме о неподвижной точке Шауфера.

Теорема 5. Предположим, что

(G3). Функция $f:[0,T]\times R^n \to R^n$ непрерывна;

(G4). Существует постоянная $N_1 > 0$, такая что

$$|f(t,x)| \le N_1$$

для любого $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$;

(G5). Функция $g:[0,T]\times R^n \to R^n$ непрерывна;

(G6). Существует постоянная $N_2 > 0$, такая что

$$|g(t,x)| \le N_2$$

для любого $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$.

Тогда краевая задача (4), (5) имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0,T]$.

Следующий результат также посвящен вопросу существования решения нелокальной краевой задачи (4), (5). Этот результат базируется на альтернативе Лере-Шауфера. Здесь условия (G4) и (G6) ослаблены.

Теорема 6. Предположим, что выполняются условия (H3) и (H5) и, кроме того:

(G7) существует $\theta_f \in L_1([0,T]; R^+)$ и непрерывная возрастающая функция $\psi_f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, такая что $|f(t,x)| \le \theta_f(t)\psi_f(|x|)$ для любых $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$;

(G8) существует $\theta_g \in L_1([0,T]; R^+)$, и непрерывная возрастающая $\psi_g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ такая что $|g(t,x)| \le \theta_g(t)\psi_g(|x|)$ для любых $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$.

(G9) Существует число $k > 0$, такое что

$$\frac{k}{\psi_f(k)\left[\left\|I^{\alpha}\theta_g\right\|_{L_1} + \left(1-\|B\|\right)^{-1}\|B\|I^{\alpha}\theta_g(T)\right] + \psi_g(k)\left(1-\|B\|\right)^{-1}\left\|\theta_g\right\|_{L_1}} > 1 .$$

Тогда краевая задача (3), (4) имеет хотя бы одно решение.

В разделе 1.3 изучается существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}x(t) = f(t,x(t)), \qquad t \in [0,T], t \neq t_i, \qquad i = 1,2,...,p \qquad (6)$$

с двухточечными и интегральными условиями

$$Ax(0) + Bx(T) = \int_0^T g(s,x(s))\,ds \qquad (7)$$

при импульсных воздействиях

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)), \qquad i = 1,2,...,p , \qquad (8)$$

где $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $A, B \in R^{n\times n}$ заданные матрицы, причем $\det\,(A+B) \neq 0$, $j : [0,T] \times R^n \to R^n$, $I_i : R^n \to R^n$ - заданные функции; $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$,где

$x(t_i^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} x(t_i + h), \qquad x(t_i^-) = \lim\limits_{h\to 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ - правосторонние и левосторонние пределы функции $x(t)$ в точке $t = t_i$, соответственно.

Определение. Функция $x \in PC\left([0,T] : R^n\right)$ называется решением краевой задачи (6) - (8), если для любого $t \in [0,T], t \neq t_i$, $i = 1,2,...,P$ ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}x(t) = f(t,x(t))$

и для $t = t_i$ $i = 1,2,...,P$ $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T$

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)).$$

Кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет краевому условию (7).

Теорема 7. Предполагаем, что

(B1). Существует константа $L_f > 0$, такая что

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le L_f |x-y|,$$
$$|g(t,x)-g(t,y)| \le L_g |x-y|$$

для любого $t \in [0,T]$ и любых $x, y \in R^n$.

(B2) Существуют постоянные $l_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,p$, такие что

$$|l_i(x)-l_i(y)| \le l_i |x-y| .$$

Если

$$L_g \left\| (A+B)^{-1} \right\| T + L_{AB} \sum_{j=1}^{p} l_j +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L_f L_{AB} \sum_{j=1}^{p+1} (t_j - t_{j-1})^{\alpha} + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} L_f < 1,$$

то краевая задача (6)- (8) имеет единственное решение на $[0,T]$, здесь $L_{AB} := \max\left(\left\| (A+B)^{-1} A \right\|, \left\| (A+B)^{-1} B \right\| \right)$.

Теорема 8. Предположим, что

(B3). Функция $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ непрерывна

(B4). Существует постоянная $N_1 > 0$, такая что

$$|f(t,x)| \le N_1$$

для любого $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$;

(B5). Функция $g : [0,T] \times R^n \to R^n$ непрерывна

(B6). Существует постоянная $N_2 > 0$ такая, что

$$|g(t,x)| \le N_2$$

для любого $t \in [0,T]$ и $x \in R^n$.

(B7) $\dot{I}_k \in C(R^n, R^n)$.

Тогда краевая задача (6)- (8) имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0,T]$.

В разделе 1.4 рассматривается следующая нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка с импульсными воздействиями:

$$ {}^{c}D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0,T], \quad t \neq t_k, \quad 1 < \alpha \leq 2 \tag{9}$$

$$\Delta y(t_k) = I_k(y(t_k)), \quad \Delta y'(t_k) = I_k^*(y(t_k)), \quad k = 1,2,...p \tag{10}$$

$$A_1 y(0) + B_1 y(T) = C_1, \tag{11}$$

$$A_1 y'(0) + B_2 y'(T) = C_2, \tag{12}$$

где, ${}^{c}D^{\alpha}$ - дробная производная в смысле Капуто,

$$f \in C([0,T], R^n, R^n), \quad I_k, \ I_k^* \in C(R^n, R^n),$$

$$\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k^-), \quad y(t_k^+) = \lim_{h \to +0} y(t_k + h),$$

$$y(t_k^-) = \lim_{h \to -0} y(t_k + h) = y(t_k); \quad \Delta y'(t_k) = y'(t_k^+) - y'(t_k^-),$$

$$y'(t_k^+) = \lim_{h \to +0} y'(t_k + h), \qquad y(t_k^-) = \lim_{h \to -0} y'(t_k + h) = y'(t_k);$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T,$$

$A_k, B_k \in R^{n \times n}$ $k = 1,2$ заданные вещественные матрицы, причем $\det(A_1 + B_1) \neq 0,$ $\det(A_2 + B_2) \neq 0,$ $C_i \in R^n,$ $i = 1,2$ заданные вещественные векторы.

Определение: Функция $y \in PC^1([0,T], R^n)$, который имеет α - производные на $[0,T], t \neq t_k$, $k = 1,2,...,p$, называется решением краевой задачи (9) – (12), если функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению ${}^{c}D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t))$ $t \in [0,1],$ $t \neq t_k,$ $k = 1,2,...,p$ и условиям (10) – (12).

Теорема 9. Пусть выполняются следующие условия:

$(A1)$ Функция $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ непрерывна и существует постоянная $L_1 \geq 0$, такая что

$$\| f(t,u) - f(t,\upsilon) \| \leq L_1 \| u - \upsilon \|$$

для всех $t \in [0,T]$ и $u,\upsilon \in R^n$;

$(A2)$ Функции $I_k : R^n \to R^n$ непрерывны и существует постоянная $L_1 \geq 0$ такая что,

$$\left\| I_k(u) - I_k(\upsilon) \right\| \leq l_k \left\| u - \upsilon \right\|$$

для всех $u,\upsilon \in R^n$ и $k = 1,2,...,p$;

$(A3)$ Функции $I_k : R^n \to R^n$ непрерывна и существует постоянная $L_1^* \geq 0$, такая что

$$\left\| I_k^*(u) - I_k^*(\upsilon) \right\| \leq l_k^* \left\| u - \upsilon \right\|$$

для всех $u,\upsilon \in R^n$ и $k = 1,2,..., p.$

Кроме того,

$$L_1 T^{\alpha} \left[\frac{(1 + L_{AB})}{\Gamma(\alpha + 1)} + \left(1 + \left\| (A_1 + B_1)^{-1} B_1 \right\| \right) \frac{(p+1)}{\Gamma(\alpha)} \left[1 + \left\| (A_2 + B_2)^{-1} B_2 \right\| \right] \right] +$$

$$+ L_{AB} \sum_{i=1}^{p} l_i + \left[1 + \left\| (A_1 + B_1)^{-1} B_1 \right\| \right] \left(2 + \left\| (A_2 + B_2)^{-1} B_2 \right\| \right) T \sum_{i=1}^{p} l_i^* < 1,$$

Тогда краевая задача (9)-(12) имеет единственное решение.

В разделе 2.2 управляемый процесс на фиксированном отрезке времени $[0,T]$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u) \tag{13}$$

с многоточечными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{N} B_j x(t_j) = C, \tag{14}$$

где $x(t) \in R^n$; $f(t,x,u)-$ заданная $u-$ мерная вектор функция; $C \in R^n -$ заданный постоянный вектор; $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ фиксированные точки, $u(t)-$ $r-$ мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного множества U, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \qquad t \in [0,T] \tag{15}$$

Требуется на решениях задачи (13)-(15) минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T F(t,x,u)dt \tag{16}$$

Здесь предполагается, что функции $f(t,x,u)$, $F(t,x,u)$ и $\varphi(x,y)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют ограниченные частные производные относительно аргументов x и y. Под решением задачи (13)-(14) соответствующий фиксированному допустимому управлению $u(t)$ мы берем функцию $x(t):[0,T] \to R^n$ который абсолютно-непрерывна на отрезке $[0,T]$.

Введем следующих условий

(A1) Пусть $\det B \neq 0$, где $B = \sum_{i=0}^{N} B_i$;

(A2) Функция $f:[0,T] \times R^n \times R^n \to R^n$ непрерывна и существует постоянная $K \geq 0$ такая, что

$$\left| f(t,x,u) - f(t,y,u) \right| \leq K \left| x - y \right|, \quad t \in [0,T],\ x, y \in R^n, u \in U$$

(A3)

$$L = KTM < 1,$$

здесь $M = \max_{0 \leq t,s \leq T} \left\| M(t,s) \right\|$,

$M(t,s)-$ кусочно-постоянная матрица, такая что для $t_{k-1} \leq s < t_k$, $(k = 1,2,\ldots,N)$,

$$M(t,s)=\begin{cases} B^{-1}\sum_{i=0}^{k-1} B_i, & если \quad s<t, \\ -B^{-1}\sum_{i=k}^{N} B_i, & если \quad t\le s. \end{cases} \tag{17}$$

Теорема 11. Пусть условии (А1) выполняется. Функции $x(\cdot)\in C([0,T],R^n)$ является абсолютно непрерывным решением задачи (13)-(14) тогда и только тогда, когда

$$x(t)=B^{-1}C+\int_0^T M(t,s)f(s,x(s),u(s))ds, \tag{18}$$

где матрица функция $M(t,s)$ определяется равенством (21).

Теорема 12. Пусть выполняются условия А1)-А3). Тогда для любого $C\in R^n$ и для любого фиксированного допустимого управления краевая задача (13)-(14) имеет единственное решение, которое удовлетворяют интегрального уравнения (18)

Теперь предположим что, неизвестная вектор функция $\psi(t)\in R^n$ и числовой вектор являются решением следующей краевой задачи:

$$\dot\psi(t)=-\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \qquad t\in[0,T], \qquad t\ne t_i, \quad i=1,2,...,N-1 \tag{19}$$

$$\psi(0)=B_0'\lambda+\frac{\partial\varphi}{\partial x(0)}, \quad \psi(T)=-B_N'\lambda-\frac{\partial\varphi}{\partial x(T)}, \tag{20}$$

$$\psi(t_i+0)-\psi(t_i-0)=B_i'\lambda, \qquad i=1,2,...,N-1 \tag{21}$$

где

$$H(t,\psi,x,u)=\langle\psi(t),f(t,x,u)\rangle-F(t,x,u).$$

Дифференциально-разностная краевая задача (19)-(21) называется сопряженной задачей в параметрической форме, так как она сохраняет в себе неизвестный параметр λ. Из сопряженной системы (19), (20) видно, что решение этой системы в точках $t = t_i$, $(i = 1,2,..., N-1)$ терпит разрывы первого рода. После некоторых упрощений получаем формулу для приращения функционала

$$\Delta J(u) = -\int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t,\psi,x,u)dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt + \eta_{\tilde{u}}. \quad (22)$$

Из (22) получается

Теорема 13. (Принцип максимума) Пусть допустимый процесс $u^0(t), x^0(t,u^0)$ оптимален в задаче (13)-(16), а $\psi^0(t)$ решение сопряженной задачи (19)-(21) вычисленное на оптимальном процессе. Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$\max_{\upsilon \in U} H(t,\psi^0(t), x^0(t), \upsilon) = H(t,\psi^0(t), x^0(t), u^0(t)).$$

В разделе 2.2 предполагается управляемый объект описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u(t)),\ t \in [0,T] \quad (23)$$

с интегральными краевыми условиями

$$x(0) + \int_0^T m(t)x(t)dt = c \quad (24)$$

здесь $x(t) \in R^n$, $f(t,x,u) - n$ мерная непрерывная функция. Относительно функции $f(t,x,u)$ будем предполагать, что она определена для всех (x,u,t) и непрерывна по аргументам (x,u,t) вместе функцией $\frac{\partial f}{\partial x}$; $c \in R^n$ заданный постоянный вектор, $m(t) \in R^{n \times n}$-заданная матрица функция размерности

$n \times n$; $n(t) - r$-вектор функция – управляющий параметр со значениями $V \subset R^r$ т.е.

$$u(t) \in V, \ t \in [0, T] \tag{25}$$

где $V \subset R^r$. Требуется на решениях задачи (23)-(25) минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x,(0), x(T)) + \int_0^T F(t, x, u) dt \ . \tag{26}$$

Здесь предполагается, что скалярные функции $\varphi(x, y)$ и $F(t, x, u)$ непрерывны относительно своих аргументов и имеют непрерывные ограниченные производные относительно x, y.

Предполагается, что допустимые управления выбираются из класса ограниченных измеримых функций со значениями из множества V. Под решением краевой задачи (13)-(14), соответствующим фиксированному допустимому управлению $u(t)$ понимается абсолютно–непрерывная функция $x(t):(0, T) \to R^n$, которая удовлетворяет уравнению (13) почти для всех $t \in [0, T]$.

Допустимое управление, вместе с соответствующим решением краевой задачи (13), (14) будем называть допустимом процессом.

Допустимый процесс $\{u(t), x(t, u)\}$, являющийся решением задачи (13)-(16), т.е. доставляющий минимум функционалу (16) при ограничениях (13)-(15), называется оптимальным процессом, а $u(t)$ оптимальным управлением.

Будем предполагать, что существует оптимальное управление в задаче (13)-(16). Наша ближайшая цель - дать некоторые достаточные условия, которые гарантируют существование и единственность решений краевой задачи (13), (14) при каждом допустимом управлении.

Введем следующие условия:

1) Пусть $\|B\| < 1$, где через B обозначено $B = \int\limits_0^T m(t)dt$.

2) Функция $f : [0,T] \times R^n \times R^r \to R^n$ непрерывна и существует постоянная $K \geq 0$, такая что

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \leq K|x - y|$$

для всех $f \in [0,T]$; $x, y \in R^n$, $u \in V$.

1) $L = (1 - \|B\|)^{-1} KTN < 1$, здесь $N = \max\limits_{0 \leq t \leq T} \|N(t,s)\|$,

$$N(t,s) = \begin{cases} E + \int\limits_0^t m(\tau)d\tau, & 0 \leq t \leq s, \\ -\int\limits_t^T m(\tau)d\tau, & s < t \leq T, \end{cases}$$

где $E \in R^{n \times n}$ - единичная матрица.

Теорема 9. Пусть выполняется условие 1). Тогда функция $x(\cdot) \in C([0,T], R^n)$ является абсолютно непрерывным решением краевой задачи (13)-(14) тогда, и только тогда, когда

$$x(t) = (E + B)^{-1} C + \int\limits_0^T k(t,\tau) f(\tau, x,(\tau), u(\tau)) d\tau, \tag{27}$$

здесь $k(t,\tau) = (E + B)^{-1} N(t,\tau)$.

Теорема 10. Пусть выполняются условия 1)-3). Тогда для любых $C \in R^n$ и для всех допустимых управлений краевая задача (23)-(24) имеет единственное решение, которое удовлетворяет уравнению (27).

В разделе 3.1 рассматривается следующая нелокальная краевая задача при импульсных воздействиях:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \ t \neq t_i, \tag{28}$$

$$Ax(0)+Bx(T)=C\ , \qquad (29)$$

$$\Delta x(t_i)=I_i(x(t_i),v_i), \quad i=1,2,...,p, \ \ 0<t_1<t_2<...<t_p<T\ , \qquad (30)$$

$$(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p=\{u(t)\in L_2^r[0,T]:u(t)\in V, n.в.t\in[0,T], v_i\in\Pi, i=1,2,...,p.\}\ , \qquad (31)$$

где $x(t)\in R^n$, $f(t,x,u)$ - n-мерная непрерывная функция, $A,B\in R^{n\times n}, C\in R^{n\times 1}$ – заданные постоянные матрицы, $\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i^-)$, $I_i(x,v)$ – некоторые заданные функции, $(u,[v])$- управляющие параметры, $V\in R^r$ и $\Pi\in R^m$ - ограниченные выпуклые множества.

Требуется на решениях краевой задачи (28)-(31) минимизировать функционал

$$J(u,[v])=\Phi(x(0),x(T)), \qquad (32)$$

где $\Phi(x,y)$ заданная скалярная функция.

Под решением краевой задачи (28) – (30), соответствующей фиксированному управляющему параметру $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$, будем понимать функцию $x(t):[0,T]\to R^n$, абсолютно непрерывную на [0,T], $t\neq t_i$ и непрерывную слева при $t=t_i$, для которой существует конечный правый лимит $x(t_i^+)$ при $i=1,2,...,p$. Пространство таких функций обозначим $PC([0,T],R^n)$. Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой $\|x\|_{PC}=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|$, где $|\cdot|$- является нормой в R^n.

Допустимый процесс $\{(u(t),[v]),x(t;u(t),[v])\}$, являющийся решением задачи (28)-(32), т.е. доставляющий минимум функционалу (32) при ограничениях (28)-(31), будем называть оптимальным процессом, а $(u(t),[v])$- оптимальным управлением, где через $x(t;u(t),[v])$ обозначено решение краевой задачи (28)-(31), соответствующее допустимому управлению $(u(t),[v])$.

Введем следующие условия:

1). Пусть $\det(A+B)\neq 0$.

2). $f:[0,T]\times R^n\times R^r\to R^n$, $I_i:R^n\times R^m\to R^n$, $i=1,2,...,p$ - непрерывные функции и существуют постоянные $K>0$, $L_i>0$, $i=1,2,...,p$

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,u)\right|\le K\left|x-y\right|,\quad t\in[0,T],\ x,y\in R^n,$$

$$\left|I_i(x,v)-I_i(y,v)\right|\le L_i\left|x-y\right|,\quad x,y\in R^n.$$

3). $$L=S[KT+\sum_{i=1}^{p}L_i]<1,$$

где $S=\max\left\{\left\|(A+B)^{-1}A\right\|,\left\|(A+B)^{-1}B\right\|\right\}$.

Теорема 14. Пусть выполняется условие 1). Тогда функция $x(\cdot)\in PC([0,T],R^n)$ является абсолютно непрерывным решением краевой задачи (28) – (31) тогда и только тогда, когда

$$x(t)=(A+B)^{-1}C+\int_0^T K(t,\tau)f(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\sum_{i=1}^{p}K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i)\,,\quad(33)$$

где $K(t,\tau)=\begin{cases}(A+B)^{-1}A, & 0\le\tau\le t\\ -(A+B)^{-1}B, & t\le\tau\le T\end{cases}$.

Теорема 15. Пусть выполняются условия 1)- 3). Тогда для любого $C\in R^n$ и $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ краевая задача (28) – (31) имеет единственное решение, которое удовлетворяет равенству

$$x(t)=(A+B)^{-1}C+\int_0^T K(t,\tau)f(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i)\quad(34)$$

Сформулируем теперь некоторые дополнительные условия на $f(t,x,u),I_i(x,v),i=1,2,...,p;\Phi(x,y)$, которые предполагаются выполненными для всех $|x| \le R, u \in V, v_i \in \Pi, i = 1,2,\dots,p; 0 \le t \le T$.

4).Производные функции $f(t,x,u)$ относительно u ограничены, т.е. для любого $\bar{u} \in R^r$

$$\left|f_u(t,x,u)\bar{u}\right| \le K_1|\bar{u}| .$$

5).

$$\left|f(t,x+\bar{x},u+\bar{u}) - f(t,x,u) - f_x(t,x,u)\bar{x} - f_u(t,x,u)\bar{u}\right| \le K_2|\bar{x}|^2 + K_3|\bar{u}|^2.$$

6).Производные $I_i(x,v), i = 0,1,\dots,p$ по v ограничены:

$$\left|I_{iv}(x,v)\bar{v}\right| \le L_i^{(1)}|\bar{v}| .$$

7).

$$\left|I_i(x+\bar{x},v+\bar{v}) - I_i(x,v) - I_{ix}(x,v)\bar{x} - I_{iv}(x,v)\right| \le L_i^{(2)}|\bar{x}|^2 + L_i^{(3)}|v|^2.$$

8).Функция $\Phi(x,y)$ имеет ограниченные первые производные, и эти производные удовлетворяют условию Липшица, т.е.

$$\left|\Phi_x(x,y)\right| \le K_4; \left|\Phi_y(x,y)\right| \le K_5.$$

$$\left|\Phi(x+\bar{x},y+\bar{y}) - \Phi(x,y) - \langle\Phi_x(x,y),\bar{x}\rangle - \langle\Phi_y(x,y),\bar{y}\rangle\right| \le K_6|\bar{x}|^2 + K_7|\bar{y}|^2.$$

Теорема 16.Пусть выполняются условия 1)-8), кроме того,

$$\det\left(E + I_{ix}(x(t_i),v_i)\right) \ne 0, \quad i = 1,2,\dots,p.$$

Тогда функционал (32) при ограничениях (28)-(31) дифференцируем, причем его градиент имеет вид

$$J'(u,[v]) = \left(f_u'(t,x,u)\psi(t), \sum_{i=1}^{p} I'_{iv_i}(x_i,v_i)\psi(t_i) \right) \in L_2^r[0,T] \times R^m, \quad (35)$$

где $\psi(t)$ - решение дифференциально-разностной системы

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x'(t,x,u)\psi(t), \qquad t \ne t_i \quad (36)$$

$$\Delta\psi(t_i) = -I'_{ix}(x(t_i),v_i)\left(I'_{ix}(x(t_i),v_i) + E\right)^{-1}\psi(t_i). \qquad i = 1,2,\dots,p. \quad (37)$$

с граничными условиями

$$A'(A'+B')^{-1}\psi(T)+B'(A'+B')^{-1}\psi(0)=$$
$$=B'(A'+B')^{-1}\Phi_{x(0)}(x(0),x(T))-A'(A'+B')^{-1}\Phi_{x(T)}(x(0),x(T)).$$

Имея формулы градиента для функционала (32) при ограничениях (28)-(31), можно получить необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления.

Теорема17. Пусть выполнены условия теоремы 16.Тогда для оптимальности управления $(u_*,[v]_*)\in U\times\Pi^p$ в задаче (28)-(31) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$\int_0^T\langle H_u(t,x_*(t),u_*(t),\psi_*(t)),u(t)-u_*(t)\rangle dt+\sum_{i=1}^p\left\langle h_{iv_i}(x_{i*},v_{i*}),v_i-v_{i*}\right\rangle\geq 0 \quad (38)$$

для любого, $(u,[v])\in U\times\Pi^p$, где $x_*(t)=x(t;u_*,[v]_*)$, $\psi_*(t)=\psi(t;u_*,[v]_*)$.

В разделе 3.2 граничные условия заданы на характеристиках гиперболической системы с помощью двухточечных краевых условий. Надо отметить, что задачи оптимального управления с такими краевыми условиями рассматриваются впервые.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^T P(t,y(t,0)y(t,l))dt+\int_0^l Q(s,x(0,s),x(T,s))ds \qquad (39)$$

при условиях

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t}=f(t,s,x(t,s),y(t,s),u(t,s)),\\ \dfrac{\partial y(t,s)}{\partial s}=g(t,s,x(t,s),y(t,s),u(t,s)),\end{cases} \qquad (40)$$

$$\begin{cases} x(0,s)+\alpha(s)x(T,s)=\varphi(s),\ 0\le s\le l, \\ y(t,0)+\beta(t)y(t,l)=\psi(t),\ 0\le t\le T, \end{cases} \tag{41}$$

$$u=u(t,s)\in U\subseteq L_2^r(Q), \tag{42}$$

где, $Q=[0,T]\times[0,l], T,l$ - заданные положительные числа, $(x,y)=(x_1,...,x_n;y_1,...,y_m)$ - фазовые переменные, $u=(u_1,...,u_r)$ - управляющий параметр, $f=(f_1,...,f_n),\ g=(g_1,...,g_m),\ \varphi=(\varphi_1,...,\varphi_n),\ \varphi=(\psi_1,...,\psi_m)$ - заданные вектор – функции, $\alpha(s)\in R^{n\times n}, \beta(t)\in R^{m\times m}$ - заданные матриц функции, $P(t,a,b), Q(s,c,d)$ - заданные функции. Под решением задачи (42)-(43), соответствующим управлению $u=u(t,s)\in L_2^r(Q)$, будем понимать вектор-функцию $z(t,s)=(x(t,s),y(t,s))\in L_2^{n+m}(Q)$, имеющую обобщенные производные $\dfrac{\partial x_i(t,s)}{\partial t}\in L_2(Q),\ i=1,...,n,\ \dfrac{\partial y_j(t,s)}{\partial s},\ j=1,...,m,$ удовлетворяющую уравнениям (42) почти всюду в Q, а условиям (41) в смысле равенства соответствующих следов функций $x(t,s),\ y(t,s)$. За класс допустимых управлений берем заданное множество U из $L_2^r(Q)$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1)функции $f_i(t,s,x,y,u),\ i=\overline{1,n},\ g_j(t,s,x,y,u),\ j=\overline{1,m}$ вместе с частными производными $f_{ix}, f_{iy}, f_{iu}, g_{jx}, g_{jy}, g_{ju}$ непрерывны по совокупности переменных $(t,s,x,y,u)\in[0,T]\times[0,l]\times R^n\times R^m\times R^r$ и удовлетворяют условию Липшица по переменным (x,y,u) т.е.

$$\left|f(t,s,x+\bar{x},y+\bar{y},u+\bar{u})-f(t,s,x,y,u)\right|\le K_1^{(1)}|\bar{x}|+K_2^{(1)}|\bar{y}|+K_3^{(1)}|\bar{u}|,$$

$$\left|g(t,s,x+\bar{x},y+\bar{y},u+\bar{u})-g(t,s,x,y,u)\right|\le K_1^{(2)}|\bar{x}|+K_2^{(2)}|\bar{y}|+K_3^{(2)}|\bar{u}|;$$

где $K_i^{(j)}$ - константы Липшица, $i=1,2,3;\ j=1,2.$

2) $\alpha(s)-n\times n$ матрица с измеримыми ограниченными элементами на отрезке $[0,l]$, $\beta(t)-\ m\times m-$ матрица с измеримыми ограниченными элементами на отрезке $[0,T]$, причем $\|\alpha\|<1$, $\|\beta\|<1$, где $\|\alpha\|,\|\beta\|$ - нормы матриц $\alpha(s)$ и $\beta(t)$. $\varphi(s)-$ заданная вектор-функция из $L_2^n(0,l)$, а $\psi(t)-$ заданная вектор-функция из $L_2^m(0,l)$;

3) функции $P(t,a,b)$ и $Q(s,c,d)$ вместе с частными производными P_a,P_b и Q_c,Q_d непрерывны по совокупности переменных $(t,a,b)\in[0,T]\times R^m\times R^m$ и $(s,c,d)\in[0,l]\times R^n\times R^n$ соответственно и удовлетворяют условию Липшица по переменным (a,b) и (c,d) соответственно

Теорема 18. Пусть выполняются условия 1)-3). Кроме того, наибольшее собственное число матрицы

$$\begin{pmatrix} MK_1^{(1)}T & MK_2^{(1)}l \\ NK_1^{(2)}T & NK_2^{(2)}l \end{pmatrix}$$

по модулю меньше единицы. Тогда система дифференциальных уравнений (41)-(44) имеет единственное решение $(x(t,s),y(t,s))$ из $L_2^n(Q)\times L_2^m(Q)$.

В этом разделе для приращения функционала получается выражение

$$\Delta J(u)=\iint\limits_Q\left\langle H_u(t,s,x(t,s),y(t,s),\psi^{(1)}(t,s),\psi^{(2)}(t,s),u(t,s)),\bar{u}(t,s)\right\rangle dtds+R.$$

где функции $\psi^{(1)}(t,s),\psi^{(2)}(t,s)$ являются решением сопряженной задачи:

$$\frac{\partial \psi^{(1)}(t,s)}{\partial t} = -\frac{\partial H(t,s,x,y,\psi^{(1)},\psi^{(2)},u)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi^{(2)}(t,s)}{\partial s} = -\frac{\partial H(t,s,x,y,\psi^{(1)},\psi^{(2)},u)}{\partial y},\ (t,s)\in Q,$$

$$P_a(t,y(t,0),y(t,l)) + \psi^{(2)}(t,0) + \mu(t) = 0,$$

$$P_b(t,y(t,0),y(t,l)) + \psi^{(2)}(t,l) + \beta'(t)\mu(t) = 0,\ t\in[0,T],$$

$$Q_c(s,x(0,s),x(T,s)) + \psi^{(1)}(0,s) + \lambda(s) = 0,$$

$$Q_d(s,x(0,s),x(T,s)) + \psi^{(1)}(T,s) + \alpha'(s)\lambda(s) = 0, s\in[0,l],$$

а градиент функционала имеет вид:

$$J'(u) = H_u(t,s,x(t,s),y(t,s),\psi^{(1)}(t,s),\psi^{(2)}(t,s),u(t,s)).$$

В разделе 4.1 рассматривается следующая нелокальная краевая задача при импульсных воздействиях:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)),\ \ 0\le t\le T,\ t\ne t_i, \tag{43}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C, \tag{44}$$

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)),\quad i=1,2,\dots,p,\ 0<t_1<t_2<\dots<t_p<T \tag{45}$$

$$u(t)\in U, t\in[0,T], \tag{46}$$

где $x(t)\in R^n$, $f(t,x,u)$ - n-мерная непрерывная вектор-функция, $A,B\in R^{n\times n}, C\in R^{n\times 1}$ – заданные постоянные матрицы, $I_i(x)$ – некоторые заданные функции, u – управляющие параметры, $U\in R^r$ - открытое множество.

Требуется на решениях краевой задачи (43)-(46) минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_0),x(T)) + \int_0^T F(x,u,t)dt. \tag{47}$$

Здесь предполагается, что скалярные функции $\varphi(x,y)$ и $F(x,u,t)$ непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x, y и до второго порядка включительно.

Под решением краевой задачи (43) – (45), соответствующей фиксированному управляющему параметру $u(\cdot) \in U$, будем понимать функцию $x(t):[0,T] \to R^n$, абсолютно непрерывную на [0,T], $t \neq t_i$ и непрерывную слева при $t = t_i$, для которой существует конечный правый предел $x(t_i^+)$ при $i = 1,2,..., p$.

Предположим выполнение следующих условий:

1) Пусть $\det(A+B) \neq 0$.

2) $f:[0,T] \times R^n \times R^r \to R^n$, $I_i : R^n \to R^n$, $i = 1,2,..., p$ - непрерывные функции и существуют постоянные $M > 0$, $L_i > 0$, $i = 1,2,..., p$

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \le K|x-y|, \quad t \in [0,T], \; x, y \in R^n,$$

$$|I_i(x) - I_i(y)| \le L_i|x-y|, \quad x, y \in R^n,$$

3) $L = S[KT + \sum_{i=1}^{p} L_i] < 1$,

где $S = \max\left\{\left\|(A+B)^{-1} A\right\|, \left\|(A+B)^{-1} B\right\|\right\}$

Теорема 19. Пусть выполняется условие 1). Тогда функция $x(\cdot) \in PC\big([0,T], R^n\big)$ является абсолютно непрерывным решением краевой задачи (43) – (44) тогда и только тогда, когда

$$x(t) = (A+B)^{-1} C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^{p} K(t,t_i) I_i(x(t_i)), \quad (47)$$

где $K(t,\tau) = \begin{cases} (A+B)^{-1} A, & 0 \le \tau \le t \\ -(A+B)^{-1} B, & t \le \tau \le T \end{cases}$.

Теорема 20. Пусть выполняются условия 1)- 3). Тогда для любого $C \in R^n$ и при каждом фиксированном допустимом управлении краевая задача (43) – (45) имеет единственное решение, которое удовлетворяет равенству (47).

Пусть вектор функция $\psi = \psi(t) \in R^n$ является решением следующей сопряженной задачи (условие стационарности функции Лагранжа по состоянию):

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \quad t \in T, \quad t \neq t_i \tag{49}$$

$$\psi(t_i^+) - \psi(t_i) = -I'_{ix}(x(t_i))(I'_{ix}(x(t_i)) + E)^{-1}\psi(t_i), \tag{50}$$

$$A'(A' + B')^{-1}\psi(T) + B'(A' + B')^{-1}\psi(0) =$$

$$= B'(A' + B')^{-1}\Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) - A'(A' + B')^{-1}\Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) \tag{51}$$

Пусть теперь $\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t)$,где ε-достаточно малое число, $\delta u(t)$-некоторая кусочно-непрерывная функция. Тогда приращение функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$ при

фиксированных функциях $u(t), \Delta u(t)$ есть функция параметра ε. Если справедливо представление

$$\Delta J(u) = \varepsilon \delta J(u) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 J(u) + o(\varepsilon^2),$$

то $\delta J(u)$ и $\delta^2 J(u)$ называются первой и второй вариациями функционала, соответственно. В диссертации формулы первой и второй вариаций функционала явно найдена.

Теорема 21. Если допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет условию $\delta J(u) = 0$, то для ее оптимальности в задаче (43)-(47) необходимо, чтобы неравенство

$$\delta^2 J(u) = -\left\{ \int_0^T \int_0^T \left\langle \delta' u(\tau) \frac{\partial' f(x, u, t)}{\partial u} R(\tau, s) \frac{\partial f(x, u, s)}{\partial u}, \delta u(s) \right\rangle d\tau ds + \right.$$

$$+\int_0^T \left\langle \delta' u(t) \frac{\partial^2 H(\varphi, x, u, t)}{\partial u^2}, \delta u(t) \right\rangle dt +$$

$$+ 2\int_0^T \int_0^T \left\langle \delta u'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} L(t,s) \frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u}, \delta u(s) \right\rangle dt ds \geq 0 \quad (52)$$

выполнялось для всех $\delta u(t) \in L_\infty[0,T]$.

Из условия (52) следует аналог условия Лежандра-Клебше для рассматриваемой задачи

Теорема 22. Вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для всех $v \in R^r$ и $\theta \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$v' \frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u^2} v \leq 0 .$$

В разделах 4.2, 4.3, 4.4 и 4.5 получены необходимые условия оптимальности второго порядка в классическом смысле для задач оптимального управления с интегральными, двухточечными, трехточечными краевыми условиями, а также для задач оптимального управления дискретными системами с двухточечными краевыми условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарифов Я.А., Необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления с импульсными воздействиями при нелокальных условиях, Доклад НАНА No 6, 2011.

2. Guliyev H.F., Sharifov Y.A., An optimal control problem generated by the system of first order nonlinear partial differential equations with nonlocal conditions, 3rd International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Bilkent University, Ankara, Turkey, 2011.

3. Шарифов Я.А. Задача оптимального управления для гиперболических систем с интегральными условиями, Тезисы докладов XIV международной конферен. «Проблемы теоретической кибернетики», Москва, 2005, с.175.
4. A.Ashyralyev, Sharifov Y.A. Optimal Control Problem for Impulsive Systems with Integral Boundary Condition, First International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Gumushanə, 2012, pp.12-15.
5. A.Ashyralyev, Sharifov Y.A., Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Impulsive Differential Equations with Two-Point and Integral Boundary Conditions, Gumushanə, 2012, pp.8-11.
6. Ya.A. Sharifov, Two-point boundary Value Problem for system of impulsive differential equations of fractional order, The 7th International Conference on Differential and Fractional Differential Equations, Moscow, Russia, 2014, p.108.
7. Мамедова Н.Б., Шарифов Я.А. Оптимальное управления для систем с нелокальными условиями, Международный Российско-Болгарский симпозиум, Нальчик, 2010, с.155-157.
8. Шарифов Я.А. Существование и единственность решений нелинейных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями при импульсных воздействиях, Второй Международный Российско–Узбекский симпозиум, Россия, Нальчик, Элбрус-2012, с.288-290.
9. Шарифов Я.А. О необходимых условиях оптимальности для канонических систем первого порядка с интегральными условиями, Тезисы всероссийского конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», Екатеринбург, 2004, с.238.
10. Sharifov Y.A., Mammadova N.B., Non-local boundary value problems for differential equations with fractional order, The conference is dedicated to the 870 th anniversary of great poet and philosopher Nizami Ganjavi, September 23-25, 2011, pp.21-24.
11. Mekhtiyev M.F., Djabrailov Sh.I., Sharifov Ya. A. Necessary Optimality Conditions of Second Order in Classical Sense in Optimal Control Problems of Three-Point Conditions, Journal of Automation and Information Sciences, Vol.42, No.3, 2010, pp.47-57.

12 Шарифов Я.А. Необходимые условия оптимальности в классическом смысле и дискретных задачах оптимального управления с нелокальными условиями, Автоматика и вычислительная техника №4, Рига, 2011, с.18-28.
13. Ишмухаметов А.З., Мамедова Н.Б., Шарифов Я.А. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений для систем с граничными условиями, Труды института Системного анализа РАН, Динамика неоднородных систем, Том 36, №2, 2008, с. 59-73.
14. Sharifov Y.A., Mammadova N.B., On second-order necessary optimality conditions in the classical sense for systems with nonlocal conditions, Differential equations, 2012, Vol.48, No.4, pp.1-4.
15. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Optimal Control Problems for Impulsive Systems with Integral Boundary Conditions, EJDE, 2013, Vol.2013, 2013, No 80, pp.1-11.
16. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions, Advances in difference equations, 2013, 2013:173.
17. Mardanov M.J., Mahmudov N.I., Sharifov Y.A. Existence and Uniqueness Theorems for Impulsive Fractional Differential Equations with the Two-Point and Integral Boundary Conditions, Hindawi Publishing Corporation, The scientific World Journal, Vol.2014, 8 pages.
18. Sharifov Y.A., Quliyev H.F. Formula for the Gradient in the Optimal Control Problem for the Non-Linear System of the Hyperbolic Equations with Non-Local Boundary Conditions, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.3, No 1, 2012, pp.111-121.
19. Sharifov Y.A. Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Fractional Differential Equations with Nonlocal Boundary Conditions, Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics XXXVI, Baku -2012, pp.125-134.
20.Sharifov Y.A. Conditions Optimality in Problems Control with Systems Impulsive Differential Equations Under Non-Local Boundary Conditions, Ukrainian Mathematical Journal, 2012, vol.64, No 6, pp.836-847.

21.Sharifov Y.A. Necessary optimality conditions of first and second order for systems with boundary conditions, Transactions of NASA series of physical-technical and mathematical science. №1, 2008, pp. 189-198.
22.Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Existence and Uniqueness of solutions for the system of nonlinear fractional differential equations with nonlocal and integral boundary conditions, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and applied analysis, Vol.2012, ID 594802, 14pages.
23.Sharifov Y.A. Singular Controls in the Classical Sense for the Optimal Control Problem with Nonlocal Boundary Conditions, Cybernetics and System Analysis Vol. 49, No 6, 2013, pp.1-10.
24.Шарифов Я.А. Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях Известия вузов, Математика, 2013, №2, с.75-84.
25.Sh. Djabrailov, Ya. Sharifov, First order necessary optimality conditions for the systems with three-point boundary conditions, Seljuk Journal of Applied Mathematics, Vol.9, No.2, pp.83-93, 2008.
26. Sharifov Y.A., Mammadova N.B., Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, Differential equations, Vol.50, No.3, 2014, pp.403-411.
27. A.R. Safari, M.F. Mekhtiyev, Y.A. Sharifov, Maximum Principle in the Optimal Problems for Systems with Integral Boundary Conditions and its Extension, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and applied analysis, Vol.2013, ID 946910, 9 pages.
28. Шарифов Я.А. Задача оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях, Вестник Сам.гос.техн.ун-та, Сер.,Физ.-мат. Науки, 2013, №4(33), с.34-45.
29. Шарифов Я.А. Об одной краевой задаче с двухточечными и интегральными условиями. Четвертая международная конференция "Математическая физика и ее приложения", Россия, г. Самара, 25августа-1сентября 2014г., с.379.
30. Sharifov Y.A. Two-point boundary value problem for systems of impulsive differential equations of fractional order, The seventh international conference on differential and functional differential equations, Moscow, Russia, August 26-28, 2014, p.108.

31. Mardanov M.J., Sharifov Y.A., Molaei H.H., Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2014(2014),No259, pp.1-8.
32. Mardanov M.J., Sharifov Y.A. Pontryagin's maximum principle for the optimal control problems with multipoint boundary conditions, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2015(2015), Id 428042, 6 pages.

YAQUB ƏMİYAR oğlu ŞƏRİFOV

BƏZİ QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ SƏRHƏD VƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi bəzi qeyri-lokal şərtli sərhəd və optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

-İmpuls təsirli ikinöqtəli və inteqral sərhəd şərtli adi diferensial tənliklər sistemi üçün müxtəlif varlıq və yeganəlik teoremlərinin isbat edilmişdir;

-İkinöqtəli sərhəd şərti ilə verilmiş kəsr tərtibli diferensial tənliklər sistemi üçün müxtəlif varlıq və yeganəlik teoremlərinin isbat edilmişdir;

-İmpuls təsirli qeyri-lokal sərhəd şərtli kəsr tərtibli diferensial tənliklər sistemi üçün müxtəlif varlıq və yeganəlik teoremlərinin isbat edilmişdir;

- Qeyri-lokal sərhəd şərti ilə verilmiş optimal idarəetmə məsələlərində müxtəlif birinci tərtib optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdırr;

-Müxtəlif qeri-lokal şərtli optimal idarəetmə məsələlərində klassik mənada müxtəlif ikinci tərtib optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmışdır;

YAGUB AMIYAR oglu SHARIFOV

INVESTIGATION OF SOME BOUNDARY VALUE AND OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH NONLOCAL CONDITIONS

ABSTRACT

The dissertation work is dedicated to the investigation of some boundary-value and optimal control problems with nonlocal conditions. The following main results have been obtained:

-Various theorems of existence and uniqueness for a system of impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions have been proved;

-Various theorems of existence and uniqueness for a system of impulsive differential equations of fractional order with nonlocal boundary conditions have been proved;

-Various theorems of existence and uniqueness for a system of impulsive differential equations of fractional order with nonlocal boundary conditions have been proved;

-The given various necessary conditions of first order optimality for optimal control problems with nonlocal boundary conditions;

-Various necessary second order optimality conditions in classic sense have been f optimal control problems with different nonlocal boundary-value conditions.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

YAQUB ƏMİYAR OĞLU ŞƏRİFOV

BƏZİ QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ SƏRHƏD VƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

1211.01 – diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru alimlik dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI - 2015