AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

AĞAYEV ELMİN AĞALAR OĞLU

İKİNCİ VƏ DÖRDÜNCÜ TƏRTİB BİR SİNİF DİFERENSİAL OPERATORLARIN BƏZİ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2016

Dissertasya işi **Bakı Dövlət Universitetinin"Riyazi analiz" kafedrasında** yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Nazim B.Kərimov**

Elmi məsləhətçi:
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru **Ziyatxan S.Əliyev**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hidayət M.Hüseynov**

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Telman B.Qasımov**

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövət Pedaqoji Universiteti
"Riyazi analiz" kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 23 sentyabr 2016-cı il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdindəki elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç.,9

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat göndərilib 30 iyun 2016-cı il.

AMEA RM-nin D01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **r.e.d., dos. R.Ə.Bəndəliyev**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mözunun aktuallığı. Tədqiqat obyektiriyazi fizika məsələlərinin öyrənilməsi olan xətti diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi müasir riyaziyyatın intensiv inkişaf edən bölmələrindən biridir. Xətti diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsini qurarkən aşağıdakı məsələlərin tədqiqi fundamental rol oynayır: baxılan operatorların məxsusi ədədlərinin kompleks müstəvidə yerləşməsinin ümumi xarakteristikası, köklü alt fəzalarının strukturu, məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələri, məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemlərinin müxtəlif funksional fəzalarda bazislik xassələri.

Xətti diferensial operatorların məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələrinin tədqiqi qədim tarixə malikdir. Hələ 1836-cı ildə Şturm keyfiyyət üsullarından (müqayisə tipli teoremlərdən) istifadə edərək ikinci tərtib öz-özünə qoşma diferensial (Şturm-Liuvill) operatorların məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələrini öyrənmişdir. O göstərmişdir ki, məxsusi funksiyanın intervalda sıfırlarının sayı onun uyğun olduğu məxsusi ədədin sıra nömrəsindən bir vahid azdır və məxsusi funksiyaların sıfırları növbələşirlər. O. Davudoğlu dördüncü tərtib öz-özünə qoşma diferensial operatorlar üçün bu xassələri sadə sərhəd şərtləri halında tədqiq etmişdir. Keçən əsrin əvvəllərində O.D. Kelloq müəyyən sinif nüvələr ayırdı və göstərdi ki, bu nüvələrlə doğrulan inteqral operatorlar da Şturmun ossillyasiya xassələrinə malikdirlər. Sonralar bu yanaşma F.R. Qantmaxer və M.Q. Kreyn, V. Leyton və Z. Nihari, A.Yu. Levin və Q.D. Stepanov, U. Eliyas , C. Prizibuçin və digərləri tərəfindən müsbət məxsusi ədədlərə malik yüksək tərtibli xətti diferensial operatorların məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələrini tədqiq etmək üçün inkişaf etdirdilər. Qeyd edək ki, 1928-ci ildə Yançevski daha ümumi sərhəd şərtləri daxilində dördüncü tərtib məsələlərə baxmışdır. O sərhəd şərtlərini təsnif edərək requlyar və tamam requlyar sərhəd şərtləri daxil etmişdir. "Kəsilməzlik üsulundan" istifadə edərək requlyar və tamam requlyar Şturm sistemlərinin köklü alt fəzalarının strukturunu və məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələrini öyrənmişdir. Göstərmişdir ki, (potensial mövcud olduğu halda) məxsusi ədədlər müəyyən bir nömrədən sonra sadədirlər və onlara uyğun məxsusi funksiyalar Şturmun ossillyasiya xassələrinə malikdirlər. Buna baxmayaraq indiyə qədər bu ilk sonlu sayda məxsusi ədədlərin təkrarlanma tərtibləri və onlara uyğun məxsusi funksiyaların ossillyasiyası haqqında heç bir nəticə yoxdur. D. Banks və O. Kurovski Prüfer tipli çevirmənin köməyi ilə potensialı sıfır olan tamam requlyar Şturm sisteminin məxsusi funksiyalarının və onların törəmələrinin ossillyasiya xassələrini öyrənmişlər. Bu yaxınlarda N.B. Kərimov və Z.S. Əliyev Prüfer tipli çevirmənin köməyi ilə, J. Ben Amara isə analitik üsulların köməyi ilə potensialı sıfır olan requlyar Şturm sisteminin məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələrini tədqiq etmişlər.

Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsi J. Uolterin, C.T. Fultonun, A. Şnayderin, D.B. Hintonun, E.M.Rusakovskinin, P.A.Baydnq, P.C. Braun və K.Seddicinin işlərində baxılmışdır. Bu işlərdə uyğun məsələlər $L_2 \oplus \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, fəzasında öz-özünə qoşma xəttiləşdirici- operatorlar üçün məxsusi qiymət məsələlərinə gətirilir və onların məxsusi və qoşulmuş vektorlar sistemlərinin $L_2 \oplus \mathbb{C}^N$ fəzasında Riss bazisi əmələ gətirmələri göstərilir. A.A. Şkalikovun işində həm tənliyə, həm də sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan spektral məsələlərin ümumi nəzəriyyəsi qurulmuşdur. Onun tərəfindən daxil edilmiş requlyar, sanki requlyar və normal sərhəd məsələləri üçün çoxqat tamlıq, bazislik və ayrılış teoremləri isbat edilmişdir. E.İ. Moiseev və N.Yu. Kapustin, N.B. Kərimov və V.S. Mirzəyev uyğun xəttiləşdirici-operator $L_2 \oplus C$ Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma olduğu halda sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi funksiyaları sistemindən ixtiyari biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin L_2 fəzasında Riss bazisi, $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında isə bazis əmələ gətirməsi göstərilmişdir. N.Yu. Kapustin, N.B. Kərimov və R.Q. Poladov, Z.S. Əliyev tərəfindən sərhəd şərtlərinin hərikisinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsinə baxılmışdır və məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemindən ikisi atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün kafi şərtlər müəyyənləşdirilmişdir.

N.B.Kərimov və Z.S.Əliyevin¸ Z.S.Əliyevin işlərində sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

Qeyd edək ki, Ç. Tretterin, B.T.Bilalov və T.R.Muradovun, T.B.Qasımovun, Z.S.Əliyevin işlərində daha ümumi şəkildə ilkin məsələlərin məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin bazisliyini təmin edən şərtlər tapılmışdır.

Beləliklə, requlyar Şturm sistemlərinin ossillyasiya xassələrinin tədqiqi, uyğun xəttiləşdirici operator $L_2 \oplus \mathrm{C}$ Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma olmadığı halda sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan ikinci tərtib Şturm-Liuvill məsələsinin və sərhəd şərtinə spektral parametr rasional daxil olan dördüncü tərtib Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sistemlərinin $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələrinin öyrənilməsi aktual məsələlərdir.

İşin məqsədi. Dördüncü tərtib requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikasının¸ məxsusi və qoşulmuş funksiyaların alt fəzalarının strukturunun və məzsusi funksiyalarının ossilyasiya xassələrinin öyrənilməsi, sərhəd şərtinə spektral parametr rasional daxil olan ikinci və dördüncü tərtib Şturm-Liuvill məsələlərinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemlərinin $L_p,\ 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələrinin tədqiqi.

Tədqiqat üsulları. Dissertasiya işində alınmış nəticələrin əsaslandırılması üçün həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin¸ kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin¸ adi diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin¸ xətti operatorların spektral nəzəriyyəsisnin və indefinit metrikalı fəzalarda xətti operatorlar nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə olunmuşdur.

Elmi yeniliklər. Dissertasiya işində aşağıdakı kimi əsas nəticələr alınmışdır:

– dördüncü tərtib tamam requlyar Şturm sistemlərinin köklü alt fəzalarının strukturu və məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələri tam öyrənilmişdir;

– uyğun xəttiləşdirici operator $\Pi_1 = L_2 \oplus C$ Pontryaqin fəzasında öz-özünə qoşma olduğu halda sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin alt sisteminin $L_p(0,1), 1<p<\infty$, fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;

– sərhəd şərtinə spektral parametr rasional daxil olan dördüncü tərtib Sturm-Liuvill məsələsinin köklü alt fəzalarının strukturu öyrənilmiş¸ məxsusi funksiyalarının ossilyasiya xassələri tədqiq olunmuş və məxsusi funksiyaları sisteminin $L_p(0,1), 1<p<\infty$, fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

Nəzəri və praktik əhəmiyyəti. Alınmış nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Bu nəticələr diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin və riyazi fizikanın bir çox məsələlərinin tədqiqində istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasının seminarında (rəhbər – prof.Z.S.Əliyev), AMEA-nın Riyazyat və Mexanika İnstitutunun "Qeyri-harmonik analiz" şöbəsinin seminarında (rəhbər – AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.T. Bilalov), müzakirə olunmuşdur. Dissertasiya işinin nəticələri Ümummilli liderimiz Heydər Əliyevin anadan olmasının 81-ci ildönümünə həsr edilmiş XI ənənəvi Tələbə elmi konfrasında (Bakı, 2004)¸ Əməkdar elm xadimi, akademik Əşrəf Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransda (Bakı, 2007)¸ V.V. Qolubevin 125 illiyinə və Saratov Dövlət Universtetinin 100 illiyinə həsr olunmuş "Funksiyalar nəzəriyyəsinin müasir problemləri və onların tətbiqləri" 15-ci Saratov qış məktəbində (Saratov, 2010) məruzə edilmişdir.

Dissertasiyanın həcmi və strukturu. Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən¸nəticədən və 75 adda istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir¸ həcmi 111 səhifədir.

İŞİN MƏZMUNU

Dörd yarım fəsildən ibarət olan I fəsil dördüncü tərtib

$$\ell(y) \equiv (p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = \lambda\tau(x)y, \quad a < x < b, \qquad (1)$$

diferensial tənliyinin

$$a_{11}Ty(a) + a_{12}(py'')(a) + a_{13}y'(a) + a_{14}y(a) = 0, \qquad (2.a)$$

$$a_{21}Ty(a) + a_{22}(py'')(a) + a_{23}y'(a) + a_{24}y(a) = 0, \qquad (2.b)$$

$$b_{11}Ty(b) + b_{12}(py'')(b) + b_{13}y'(b) + b_{14}y(b) = 0, \qquad (2.c)$$

$$b_{21}Ty(b) + b_{22}(py'')(b) + b_{23}y'(b) + b_{24}y(b) = 0, \qquad (2.d)$$

Şturm tipli sərhəd şərtlərini ödəyən məxsusi və qoşulmuş funksiyalarının alt fəzalarının strukturunun və məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur, burada¸ $\lambda \in C$ spektral parametr, $Ty \equiv (py'')' - qy'$, $p(x)$ $[a,b]$ parçasında iki dəfə kəsilməz diffe-rensiallanan müsbət funksiya, $q(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz differen-siallananmənfi olmayanfunksiya¸ $r(x)$ $[a,b]$ parçasında həqiqi qiymətli kəsilməz funksiya, $\tau(x)$ $[a,b]$ parçasında müsbət kəsilməz funksiyadır. a_{ij}, b_{ij}, $i,j = 1,2$ əmsalları

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

şərtlərini ödəyən həqiqi sabitlərdir.

(3) şərtləri (2) sərhəd şərtlərinin öz-özünə qoşma olması üçün zəruri və kafidir.

(1)-(2) məsələsi dördüncü tərtib Şturm sistemi adlanır.

1.1-də requlyar və tamam requlyar Şturm sistemləri anlayışları daxil edilir.

Fərz edək ki¸

$$A_1(y) \equiv Ty(a) - A_0 y'(a) + A_1 y(a), \qquad B_1(y) \equiv Ty(b) - B_0 y'(b) + B_1 y(b),$$

$$A_2(y) \equiv (py'')(a) + A_2 y'(a) + A_0 y(a), \quad B_2(y) \equiv (py'')(b) + B_2 y'(b) + B_0 y(b),$$

$$A_3(y) \equiv Ty(a) + A_3(py'')(a) + A_4 y(a), \quad B_3(y) \equiv Ty(b) + B_3(py'')(b) + B_4 y(b),$$

$$A_4(y) \equiv y'(a) + A_3 y(a), \qquad B_4(y) \equiv y'(b) + B_3 y(b),$$

$$A_5(y) \equiv (py'')(a) + A_5 y'(a), \qquad B_5(y) \equiv (py'')(b) + B_5 y'(b).$$

(2) sərhəd şərtlərinin kanonik formaları aşağıdakı kimi təyin olunur:

(i) $A_1(y) = A_2(y) = B_1(y) = B_2(y) = 0$; (ii) $A_3(y) = A_4(y) = B_1(y) = B_2(y) = 0$;

(iii) $A_3(y) = A_4(y) = B_3(y) = B_4(y) = 0$; (iv) $A_5(y) = y(a) = B_1(y) = B_2(y) = 0$;
(v) $A_5(y) = y(a) = B_3(y) = B_4(y) = 0$; (vi) $A_5(y) = y(a) = B_5(y) = y(b) = 0$;
(vii) $y'(a) = y(a) = B_1(y) = B_2(y) = 0$; (viii) $y'(a) = y(a) = B_3(y) = B_4(y) = 0$;
(ix) $y'(a) = y(a) = B_5(y) = y(b) = 0$.

(i)-(ix) kanonik formasında verilmiş sərhəd şərtlərinin əmsalları

$$A_0 \geq 0,\ B_0 \geq 0,\ B_2 \geq 0,\ B_3 \geq 0,\ A_2 \leq 0,\ A_3 \leq 0, \tag{4}$$

şərtlərini ödəyərsə¸ onda Şturm sistemi requlyar Şturm sistemi adlanır.Requlyar Şturm sistemi üçün (4) şərtlərindən əlavə

$$\begin{gathered} A_0^2 \leq |A_1 A_2|,\quad B_0^2 \leq |B_1 B_2|, A_1 > 0,\ A_5 \leq 0,\ B_5 \geq 0,\ B_1 < 0 \\ A_4 > 0\ (A_4 \geq 0,\ A_3 \neq 0),\ B_4 < 0\ (B_4 \leq 0,\ B_3 \neq 0), \end{gathered} \tag{5}$$

şərtləri də ödənilərsə¸ onda bu sistem tamam requlyar Şturm sistemi adlanır.

Tamam requlyar Şturm sisteminin sərhəd şərtləri

$$\text{(x)}\quad \begin{aligned} &A_6(y) = (py'')(a) - C_0 Ty(a) - C_1 y'(a) = 0, \\ &A_7(y) = y(a) + C_2 Ty(a) - C_0 y'(a) = 0, \\ &B_6(y) = (py'')(b) + D_0 Ty(b) + D_1 y'(b) = 0, \\ &B_7(y) = y(b) - D_2 Ty(b) + D_0 y'(b) = 0, \end{aligned}$$

kimidətəyinedilir¸ burada $C_0,\ C_1,\ C_2,\ D_0,\ D_1,\ D_2 \geq 0$ və $C_1 = \infty$ və $D_1 = \infty$ halları da istisnaedilmir.

1.2-də requlyar Şturm sisteminin məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının xassələri öyrənilir.

Requlyarsərhədşərtləri Birkovmənadarequlyardır¸ həttagüclürequlyardır.RequlyarŞturmsistemininməxsusiədədləriqeyri-məhdudmonotonartanardıcıllıqəmələgətirir ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$) vəbütünməxsusiədədlərintəkrarlanmatərtibləri sonludur. $r(x) \equiv 0$ olduqda tamam requlyar Şturm sisteminin məxsusi ədədləri müsbətdir.

Teorem 1. *RequlyarŞturmsisteminin* $r(x) - \lambda\tau(x) < 0,\ x \in (a,b)$ *şərtiniödəyənməxsusiədədlərisadədir*

Nəticə 1. *Əgər* $r(x) \equiv 0$, *olarsa, ondatamamrequlyarŞturmsistemininbütün məxsusi ədədləri sadədirlər.*

(1)tənliyininvə (2)sərhədşərtlərininəmsalları μ parametrindənasılıolarsa, ondaməxsusiədədl ərvəuyğunməxsusifunksiyalar da μ parametrindənasılıfunksiyalar olacaq. Tutaqki, $\mu \in I \equiv [\mu_1, \mu_2]$, $\mu_1, \mu_2 \in R$. Məxsusiədədlərivəonlarauyğunməxsusifunksiyalarıuyğunolaraq $\lambda_k(\mu)$ və $y_k(x,\mu)$, $k \in \mathrm{N}$, kimiişarəedək. Bundansonraaşağıdakışərtlərin ödənildiyini fərz edək:

1°. $p''(x,\mu)$, $q'(x,\mu)$, $r(x,\mu)$, $\tau(x,\mu) \in C([a,b]\times I)$;

2°. μ parametrindənasılıolmayanelə $p_0 > 0$ və $\tau_0 > 0$ ədədlərivarki, $p(x,\mu) > p_0$, $\tau(x,\mu) > \tau_0, (x,\mu) \in [a,b]\times I$;

3°. hərbirqeydolunmuş μ üçün $q(x,\mu)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında mənfi deyil¸ bundan əlavə $[a,b]$ parçasının heç bir daxili alt intervalında eynilik kimi sıfra bərabər olmur;

4°. μ parametri I intervalındadəyişdikdə¸(i-ix) kanonik formasındakısərhədşərtlərinintipləridəyişmirvəuyğunəmsallar μ parametrinənəzərənməhdudvəkəsilməzqalır.Eyni şərtlər (x)sərhəd şərtləri üçün də ödənilir.

Lemma1.

Fərzedəkki, $1^\circ - 4^\circ$ *şərtləriödənilir. Onda* $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ *məxsusiədədlərisonluvə* μ *-yənəzərənkəsilməzqalır.* $\mu \to \mu_0$ *olduqdabirneçə* $\lambda^{(1)}(\mu)$, $\lambda^{(2)}(\mu), \ldots$ *məxsusiədədlər* λ_0 *-ayığılırsa, onda* λ_0 *ədədidə (1)-(2) məsələsinin* $\mu = \mu_0$ *olduqdaməxsusiədədidirvəonuntəkrarlanmatərtibi* $\lambda^{(1)}(\mu), \lambda^{(2)}(\mu), \ldots$ *məxsusiədədlərinintəkrarlanmatərtiblərinincəminəbərabərdir.*

Tutaq ki, $\vartheta(x,\mu)$ *funksiyası* $\lambda^{(1)}(\mu), \lambda^{(2)}(\mu), \ldots$ *məxsusiədədlərindənhərhansıbirinəuyğunnormallaşdırılmışməxsusifunksiyadır.Onda* λ_0 *məxsusi ədədinə uyğun elə* $u_0(x)$ *normalaşdırılmış məxsusi funksiyası tapmaq olar ki, ixtiyari* $\varepsilon > 0$ *ədədi üçün elə* $\delta(\varepsilon) > 0$ *ədədi var ki,* $|\mu - \mu_0| < \delta(\varepsilon)$ *şərtini ödəyən hər bir qeyd olunmuş* μ *parametri və ixtiyari* $x \in [a,b]$ *üçün*

$$|u^{(k)}(x,\mu) - u_0^{(k)}(x)| < \varepsilon,\ k = \overline{0,4},$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

Teorem 2. *Tutaqki, (1) tənliyininəmsalları* $p(x,\mu')$, $q(x,\mu'')$, $r(x,\mu''')$ *və* $\tau(x,\mu'''')$,

$(x,\mu)\in[a,b]\times I,$ *μ parametrinənəzərənanalitik funk-siyalardırvəşərtləriödənilir.Bundanəlavətutaqki, sərhədşərtlərininəmsalları qeydolunmuşdurvə* $p(x,\mu'),\ q(x,\mu''),\ r(x,\mu'''),\ \tau(x,\mu'''')$ *funksiyaları μ parametrinənəzərənmonoton funksiyalardır (belə ki¸ bir parametr dəyişdikdə digər parametrlər dəyişməz qalır). Onda(i)* $p(x,\mu')$ *artan(azalan) olarsa, məxsusiədədlərazalmır (artmır); (ii)* $q(x,\mu'')$ *artan (azalan)olarsa, məxsusiədədlərazalmır (artmır); (iii)* $r(x,\mu''')$ *artan(azalan)olarsa, məxsusiədədlərazalmır(artmır); (iv)* $\tau(x,\mu'''')$ *artan (azalan)olarsa¸ sıfırdanfərqliməxsusiədədlərin mütləq qiyməti azalmır (artmır).*

1.3-də müxtəlif Şturm sistemlərinin kəsilməz deformasiyalarınaəsaslanan "kəsilməzlik üsulu" öyrənilir.Burada¸ "μ-proses" anlayışı daxil edilir və bu prosesin köməyi ilə bir requlyar Şturm sistemindən digər requlyar Şturm sisteminə keçid tədqiq olunur. Bu yarımfəsildə potensial sıfır olduğu halda tamam requlyar Şturm sistemlərinin və requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi ədədlərinin osillyasiya xassələriöyrənilir. Göstərmək olur ki¸ requlyar Şturm sisteminin məxsusi ədədləri müəyyən nömrədən başlayaraq sadədirlər və uyğun məxsusi funksiyalar Şturmun ossilyasiya xassələrini ödəyirlər.

Belə deformasiyaların xüsusi halına baxaq. Tutaqki¸ $\{L_1(y), A_i^{(1)},\ B_i^{(1)}\}$ və $\{L_2(y),\ A_i^{(2)},\ B_i^{(2)}\}$ sərhədşərtləri(i-ix)kanonikformasındaolanixtiyariikiŞturmsistemləridir.Bu verilənsistemlərdənbiridigərinə $\{L_\mu(y),A_i(\mu),B_i(\mu)\}$ Şturmsistemləriailəsinin köməyiiləkəsilməzkeçəbilir¸ burada

$$L_\mu(y)\equiv(p(x,\mu)y'')''-(q(x,\mu)y')'+(r(x,\mu)-\lambda\tau(x,\mu))y,$$

$$p(x,\mu)\equiv(1-\mu')p_1(x)+\mu'p_2(x),\ q(x,\mu)=(1-\mu'')q_1(x)+\ \mu''q_2(x),$$

$$r(x,\mu)\equiv(1-\mu''')r_1(x)+\mu'''r_2(x),\ \tau(x,\mu)\equiv(1-\mu'''')\tau_1(x)+\ \mu''''\tau_2(x)\,;$$

$$A_i(\mu)\equiv A_i^{(1)}(1-\mu_i)+A_i^{(2)}\mu_i,\ B_i(\mu)\equiv B_i^{(1)}(1-\mu_i)+B_i^{(2)}\mu_i.$$

$\mu',\mu'',\mu''',\mu'''',\mu_1$ və μ_2 bir-birindən asılıolmayaraq 0-dan 1-ə kimi artdıqda $\{L_1(y),A_i^{(1)},B_i^{(1)}\}$ requlyarŞturmsistemindən $\{L_2(y),A_i^{(2)},B_i^{(2)}\}$ requlyarŞturm sisteminə kəsilməz keçmək olar və tərsinə. Bucürçevirilmələr "$\mu-$proses" adlanır.

Lemma2. *Tutaqki, sərhəd şərtləri (i-ix)kanonik formasında olanixtiyariiki* $\{L_1(y), A_i^{(1)}, B_i^{(1)}\}$ *və* $\{L_2(y), A_i^{(2)}, B_i^{(2)}\}$ *requlyarŞturm sistemləri verilmişdir."* $\mu-$proses"*vasitəsilə bir sistemdən digərinə keçdikdə, məxsusi ədədlər sonlu qalır və məxsusi ədədlərdən heçbiri* $\pm\infty$ *-a çevrilmir.*

Requlyar Şturm sisteminin ossilyasiya xassələrinin öyrənilməsi aşağıdakı lemmaya əsaslanır.

Lemma3. *Tutaqki¸ ixtiyaribirrequlyarŞturmsistemilemma 2-ninşərtləri daxilində "* $\mu-$*prosesin"köməyi ilə başqabirrequlyarŞturm sisteminə çevrilmişdir. Onda* $\mu\in(0,1)$ *parametrininbütün qiymətlərində lemma 2-nin şərtlərini ödəyən məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi funksiyalar onların osillyasiya xassələrini saxlayırlar. Başqa sözlə,bütün* $\mu\in(0,1)$ *parametrləriüçünbelə məxsusi funksiyaların* (a,b) *intervalında yerləşən sıfırlarının sayı dəyişmir.*

Qeyd1. Eyniqayda iləsərhəd şərtləri (x)kanonik formasında verilmiştamamrequlyarŞturm sistemləri üçün də çevirilmələr "$\mu-$proses"təyin olunur. TamamrequlyarŞturm sistemləri üçünçevirilmələr" $\mu-$proses"zamanı lemma 2 və 3-ün hökmləri doğruolur.

İndi requlyar Şturm sisteminin məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələrini araşdıraq.

Teorem3. $r(x)\equiv 0$ *olduqda,tamamrequlyarŞturmsisteminin məxsusi ədədləri müsbət və sadə olur və sonsuz artan* $\lambda_1\le\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4<\ldots<\lambda_k<\ldots$, *ardıcıllığı əmələ gətirirlər.Bundan başqa,* λ_k *məxsusi ədədinə uyğun* $y_k(x)$ *məxsusi funksiyasının* (a,b) *intervalında* $k-1$ *sayda sadə sıfrı var.*

Teorem 4.*Tutaq ki,* $r(x)\equiv 0$. *Onda requlyar Şturm sisteminin ilk iki məxsusi ədədi istisna olmaqla¸ digər məxsusi ədədlər müsbət və sadədirlər və sonsuz artan* $\lambda_1\le\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4<\ldots<\lambda_k<\ldots$, *ardıcıllığı əmələ gətirirlər, belə ki,* $\lambda_3>0$. *Bundan başqa,* λ_k, $k>2$, *məxsusi ədədinə uyğun* $y_k(x)$ *məxsusi funksiyasının* (a,b) *intervalında* $k-1$ *sayda sadə sıfrı var.*

Qeyd2. $y_1(x)$ və $y_2(x)$ məxsusi funksiyasının sıfırlarının sayı ixtiyari sayda ola bilər.

Teorem5.*Requlyar Şturm sisteminin ilk m (m ədədi 1.3-də təyin olunmuşdur) sayda məxsusi ədədləri istisna olmaqla digər məxsusi ədədləri müsbət və sadədirlər və sonsuz monoton artan* $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_m < < \lambda_{m+1} < \ldots$ *ardıcıllığı əmələ gətirilərr.Bundan başqa,* $\lambda_k,\ k > m,$ *məxsusi ədədinə uyğun* $y_k(x)$ *məxsusi funksiyasının* (a,b) *intervalında* $k-1$ *sayda sadə sıfrı var.*

1.4-də qlobal bifurkasiya və min-maxprinsipinin köməyi ilə tamam requlyar Şturm sisteminin köklü alt fəzalarının strukturu və məxsusi ədədlərin ossilyasiya xassələri tam öyrənilmişdir.

Bu fəsilin əsas nəticəsi aşağıdakıdır.

Teorem6.*Tamam requlyar Şturm sisteminin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$ *ardıcıllığı əmələ gətirirlər. Bundan başqa,* $\lambda_k, k \in \mathrm{N},$ *məxsusi ədədinə uyğun* $y_k(x)$ *məxsusi funksiyasının* (a,b) *intervalında* $k-1$ *sayda sadə sıfrı var.*

Dörd yarımfəsildən ibarət olan II fəsildə aşağıdakı Ştrum-Liuvill məsələsinə baxılır

$$(\ell y)(x) \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,\ 1), \tag{6}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \tag{7}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)y'(1), \tag{8}$$

burada $\lambda \in C$ spektral parametr, $q(x)$ funksiyası $[0,\ 1]$ parçasında kəsilməz həqiqi qiymətli funksiyadır, $b_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1$ həqiqi sabitlərdir, belə ki, $\sigma_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 < 0.$

2.1.-də (6)-(8) məsələsinin operator interpretasiyası verilir. (6)-(8) məsələsi skalyar hasili

$$(\hat{u},\hat{\vartheta})_H = (\{u,s\},\{\vartheta,t\})_H = (u,\vartheta)_{L_2} + |\sigma_1|^{-1}\, s\,\bar{t},$$

şəklində təyin olunan $H = L_2(0,1) \oplus C$ fəzasında təsir edən və təyin oblastı

$$D(L) = \{\{y(x),s\} \in H \mid y(x) \in W_2^1(0,1),\ (\ell y)(x) \in L_2(0,1),$$
$$b_0 y(0) = d_0 y'(0),\ s = a_1 y(1) - c_1 y'(1)\},$$

olan

$$L\hat{y} = L\{y(x),s\} = \{(\ell y)(x), d_1 y'(1) - b_1 y(1)\}$$

operatoru üçün məxsusi qiymət məsələsinə gətirilir, burada $(\cdot\,,\cdot)_{L_2}$ $L_2(0,1)$ fəzasında skalyar hasildir. Qeyd edək ki,

$D(L)$ çoxluğu H fəzasında hər yerdə sıxdır. Aydındır ki, L operatoru H fəzasında korrekt təyin olunmuşdur və (6)-(8) məsələsi

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y},\ \hat{y} \in D(L)$$

şəklinə gətirilir.

$J : H \to H$ operatorunu $J\{y, s\} = \{y, -s\}$ kimi təyin edək. Bu operator daxili hasili

$$(\hat{u}, \hat{\vartheta})_{\Pi_1} = (\{u, s\}, \{\vartheta, t\})_{\Pi_1} = (y, u)_{L_2} + \sigma_1^{-1} s\bar{t}$$

olan $\Pi_1 = L_2(0,1) \oplus C$ Pontryaqin fəzasını doğurur.

Teorem7. *L operatoru Π_1 fəzasında $J-$öz-özünə qoşma operatordur. L operatorunun $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{y}_n = \{y_n(x), s_n\}$, məxsusi və qoşulmuş vektorlar sistemi H fəzasında Riss bazisi əmələ gətirir.*

(6)-(8) məsələsiiləyanaşıaşağıdakısərhədməsələsinəbaxaq :

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), x \in (0,1), \\ b_0 y(0) = d_0 y'(0), \\ a_1 y(1) = c_1 y'(1). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(9)
məsələsininməxsusiədədlərinini μ_n, n =1, 2, ... , iləişarəedək:
$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n \mapsto +\infty$.

2.2-də
(6)məsələsinin $y(0,\lambda) = d_0$, $y'(0,\lambda) = b_0$ başlanğıcşərtləriniödəyən $y(x,\lambda)$ həllininxassələriöyrənilir.

2.3-də (6)-(8)məsələsinin məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda (kompleks müstəvidə) yerləşməsi və köklü alt fəzalarının strukturu öyrənilir.

$K_n = (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \in \mathrm{N}$, işarələməsi aparaq, burada $\mu_0 = -\infty$.

Teorem8. *Aşağıdakı hökmlərdən biri doğrudur:(i) (6)-(8) məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir, bu halda K_1 intervalında cəbri iki (ya iki sadə, ya da bir təkrarlanma tərtibi iki olan) məxsusi ədəd yerləşir, K_n, $n = 2,3,\ldots$, intervalında isə bir məxsusi ədəd yerləşir; (ii) (6)-(8) məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir, K_1 intervalında məxsusi ədəd yerləşmir, bu halda elə $M \geq 2$ natural ədədi var ki, K_M intervalında cəbri üç (ya üç sadə¸ ya bir sadə, bir təkrarlanma tərtibi iki olan, ya da bir təkarlanma tərtibi üç olan) məxsusi ədəd* *yerləşir, K_n, $n = 2,3,\ldots$, $n \neq M$, intervalında isə bir sadə məxsusi ədəd yerləşir;* (iii) *(6)-(8) məsələsinin bir-birinə qoşma olan bir cüt həqiqi olmayan məxsusi ədədləri var, bu halda K_1 intervalında məxsusi ədəd yerləşmir, K_n, $n = 2,3,\ldots$, intervalında isə bir sadə məxsusi ədəd yerləşir.*

Tutaq ki, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ (6)-(8) məsələsinin məxsusi ədədlər ardıcıllığıdır. Teorem 8-in (i) vəya (ii) hökmləri ödənilərsə, onda $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{M-1} \leq \lambda_M \leq \lambda_{M+1} < \lambda_{M+2} < \ldots$ (teorem 8-in (i) hökmü ödənildikdəisə $M = 1$ qəbul edilir).Teorem 8-in (iii) hökmü ödənilərsə, onda $\lambda_1, \lambda_2 \in C \setminus R$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 < \lambda_4 < \ldots$.

Əgər $\gamma(\lambda_n) = 2$, yəni $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ olarsa, onda teorem 8-ə əsasən $n = M-1$ və ya $n = M$ olar; əgər $\gamma(\lambda_n) = 3$, yəni $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2}$ olarsa, onda $n = M-1$ olar,burada $\gamma(\lambda_n)$ ədədi λ_n məxsusi ədədinin təkrarlanma tərtibidir.

Tutaq ki, $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (6)-(8) məsələsinin $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ məxsusi ədədlərinə uyğun məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemidir,burada $y_n(x) = y(x,\lambda_n)$ əgər $\gamma(\lambda_n) = 1$ olarsa, $y_n(x) = y(x,\lambda_n)$, $y_{n+1}(x) = y_{n+1}^*(x) + \alpha_n y_n(x)$, əgər $\gamma(\lambda_n) = 2$ olarsa, α_n ixtiyari sabitdir, $y_{n+1}^*(x) = \dfrac{\partial y(x,\lambda_n)}{\partial \lambda}$; $y_n(x) = y(x,\lambda_n)$, $y_{n+1}(x) = y_{n+1}^*(x) + \beta_n y_n(x)$,

$y_{n+2}(x) = = y_{n+2}^*(x) + \beta_n y_{n+1}^*(x) + \gamma_n y_n(x)$,

əgər $\gamma(\lambda_n) = 3$ olarsa, β_n, γ_n ixtiyari sabitlərdir, $y_{n+2}^*(x) = \dfrac{\partial^2 y(x,\lambda_n)}{2\partial\lambda^2}$.Qeyd edək ki, $\gamma(\lambda_n) = 2$ olduqda $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$, $\gamma(\lambda_n) = 3$ olduqda isə $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$ və $y_{n+2}(x)$ funksiyaları məxsusi və qoşulmuş funksiyalar zəncirini əmələ gətirir.

2.4-də(6)-(8) məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin alt sisteminin bazislik xassələri öyrənilmişdir. Burada L operatorunun məxsusi və qoşulmuş vektorları sisteminə qoşma olan sistem qurulmuşdur və (6)-(8) məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyaları sisteminin alt sisteminin $L_2(0,1)$ fəzasında minimal olması üçün şərt tapılmışdır. Bu şərt ödənildikdə məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, fəzasında bazis əmələ gətirməsi isbat edilmişdir.

Lemma4. *Aşağıdakı hökmlər doğrudur:* $\gamma(\lambda_n)=1$ *olarsa* $\hat{\vartheta}_n^* = J\bar{y}_n$ olar,

$\gamma(\lambda_n)=2$ *olarsa,* $\hat{\vartheta}_n^* = J\hat{y}_{n+1}^* + \widetilde{\alpha}_n J\hat{y}_n$, $\hat{\vartheta}_{n+1}^* = J\hat{y}_n$ *olar,*

$\gamma(\lambda_n)=3$ *olarsa,* $\hat{\vartheta}_n^* = J\hat{y}_{n+2}^* + \widetilde{\beta}_n J\hat{y}_{n+1}^* + \widetilde{\gamma}_n J\hat{y}_n$, $\hat{\vartheta}_{n+1}^* = J\hat{y}_{n+1}^* + \widetilde{\beta}_n J\hat{y}_n$, $\hat{\vartheta}_{n+2}^* = J\hat{y}_n$ *olar, burada* $\bar{y}_n = \{\bar{y}_n(x), \bar{k}_n\}$, $\hat{y}_{n+1}^* = \{y_{n+1}^*(x),\ k_{n+1}^*\}$, $\hat{y}_{n+2}^* = \{y_{n+2}^*(x), k_{n+2}^*\}$, $k_{n+1}^* = k'(\lambda_n)$, $k_{n+2}^* = (1/2)k''(\lambda_n)$, $\widetilde{\alpha}_n$, $\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\gamma}_n$ *ixtiyari sabitlərdir.*

$$\delta_n = \begin{cases} \| \hat{y}_n \|_{\Pi_1}^2, & \gamma(\lambda_n)=1, \\ (\hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}^*)_{\Pi_1} & \gamma(\lambda_n)=2, \\ \| \hat{y}_{n+1}^* \|_{\Pi_1}^2, & \gamma(\lambda_n)=3, \end{cases}$$

işarələməsi aparaq,burada $\|\cdot\|_{\Pi_1}$ Π_1 *fəzasında normadır.*

Lemma5. $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{y}_n = \{y_n(x),\ k_n\}$ *vektorlarsisteminəqoşmaolan* $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}, \hat{\vartheta}_n = \{\vartheta_n(x), t_n\}$ *vektorlarsistemiaşağıdakıkimitəyinolunur*

$$\hat{\vartheta}_n = \bar{\delta}_n^{-1}\ \hat{\vartheta}_n^*,\ n=1,2,...,$$

burada $\widetilde{\alpha}_n = -\alpha_n - \delta_n^{-1} \| \hat{y}_{n+1}^* \|_{\Pi_1}^2$, *əgər* $\gamma(\lambda_n)=2$, $\widetilde{\beta}_n = -\beta_n - \delta_n^{-1}\left(\hat{y}_{n+1}^*, \hat{y}_{n+2}^*\right)_{\Pi_1}$,

$\widetilde{\gamma}_n = -\gamma_n - \delta_n^{-1} \| \hat{y}_{n+2}^* \|_{\Pi_1}^2 + \delta_n^{-2}\left(\hat{y}_{n+1}^*, \hat{y}_{n+2}^*\right)_{\Pi_1}^2 + \beta_n\left(\beta_n + \delta_n^{-1}\left(\hat{y}_{n+1}^*, \hat{y}_{n+2}^*\right)_{\Pi_1}^2\right)$, *əgər* $\gamma(\lambda_n)=3$.

Nəticə2. *Aşağıdakı hökmlər doğrudur: i)* $\gamma(\lambda_n)=1$ *olarsa,* $t_n \neq 0$; *ii)* $\gamma(\lambda_n)=2$ *olarsa,* $t_{n+1} \neq 0$; $\alpha_n \neq \alpha_n^{(0)}$ *olduqda,* $t_n = 0$, $\alpha_n \neq \alpha_n^{(0)}$ *olduqda,* $t_n = 0$, *burada* $\alpha_n^{(0)} = k_n^{-1}k_{n+1}^* - \delta_n^{-1} \| \hat{y}_{n+1}^* \|_{\Pi_1}^2$; *iii)* $\gamma(\lambda_n)=3$, *olarsa* $t_{n+2} \neq 0$; $\beta_n \neq \beta_n^{(0)}$ *olduqda* $t_{n+1} \neq 0$, $\beta_n = \beta_n^{(0)}$ *olduqda* $t_{n+1} = 0$, $\gamma_n \neq \gamma_n^{(0)}$ *olduqda* $t_n \neq 0$, $\gamma_n = \gamma_n^{(0)}$ *olduqda* $t_n = 0$, *burada* $\beta_n^{(0)} = k_n^{-1}k_{n+1}^* - \delta_n^{-1}\ (\hat{y}_{n+1}^*, \hat{y}_{n+2}^*)_{\Pi_1}$,

$\gamma_n^{(0)} = k_n^{-1}k_{n+2}^* - (\beta_n + \delta_n^{-1}(\hat{y}_{n+1}^*, \hat{y}_{n+2}^*)_{\Pi_1})\ (\beta_n - k_n^{-1}k_{n+1}^*) - \delta_n^{-1} \| \hat{y}_{n+2}^* \|_{\Pi_1}^2 + \delta_n^{-2}(\hat{y}_{n+1}, \hat{y}_{n+2}^*)_{\Pi_1}^2$.

Bu fəslin əsas nəticəsi aşağıdakıdır.

Teorem9. *Tutaqki, r ixtiyariqeydolunmuş natural ədəddir. $t_r \neq 0$ olarsa, (6)-(8) məsələsinin $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq r}^{\infty}$ məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemi $L_p(0,1),\ 1<p<\infty$, fəzasında baziz, $p=2$ olduqda isə Rissbazisi əmələ gətirir, $t_r = 0$ olarsa, busistem $L_p(0,1),\ 1<p<\infty$, fəzasında nə tam, nə də minimal deyil.*

Teorem10. *Fərz edək ki¸ r ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir. Onda (i) $\gamma(\lambda_n)=1$ olarsa, (6)-(8) məsələsinin $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq r}^{\infty}$ məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemi $L_p(0,1),\ 1<p<\infty$, fəzasında bazis, $p=2$ olduqda isə Riss bazisi əmələ gətirir; ii) $\gamma(\lambda_s)=2$, yəni $\lambda_s=\lambda_{s+1}$ olarsa, $\{y_n(x)\}_{n=1,\ n\neq r}^{\infty}$ sistemia) $r=s+1$ vəb) $r=s$, $\alpha_s \neq \alpha_s^{(0)}$ hallarında $L_p(0,1),\ 1<p<\infty,$ fəzasında bazis $p=2$ olduqda isə Riss bazisi əmələ gətirir, c) $r=s$* и *$\alpha_s=\alpha_s^{(0)}$ olduqda isə bu sistem $L_p(0,1),\ 1<p<\infty$, fəzasında nə tam nə də minimal deyil;iii) $\gamma(\lambda_s)=3$, yəni $\lambda_s=\lambda_{s+1}=\lambda_{s+2}$ olarsa, $\{y_n(x)\}_{n=1,\ n\neq r}^{\infty}$ sistemi a) $r=s+2$; b) $r=s+1$* və *$\beta_s \neq \beta_s^{(0)}$; c) $r=s$* və *$\gamma_s \neq \gamma_s^{(0)}$ hallarında $L_p(0,1),\ 1<p<\infty,$ fəzasında bazis¸ $p=2$ olduqda isə Riss bazisi əmələ gətirir;d) $r=s+1$ və $\beta_s=\beta_s^{(0)}$ e) $r=s$ və $\gamma_s=\gamma_s^{(0)}$ olduqdaisə bu sistem $L_p(0,1),\ 1<p<\infty$, fəzasında sistem nə tam, nə də minimal deyil.*

Üç yarımfəsildən ibarət olan III fəsildəaşağıdakıspektral məsələyə baxılır:

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda\, y(x),\ \ 0<x<l, \tag{10}$$

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \quad (11a)$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \quad (11.b)$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \quad (11.c)$$

$$f(\lambda)y(l) + Ty(l) = 0, \quad (11.d)$$

burada $\lambda \in C$ spektral parametr, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q(x)$ funksiyası $[0, l]$ parçasında mənfi olmayan mütləq kəsilməz funksiyadır¸ α, β, γ həqiqi sabitlərdir¸belə ki, $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \frac{\pi}{2}$. Bundan başqa $f(\lambda)$ funksiyası λ parametrinin rasional funksiyasıdır,burada a, b və $c_k,\ k = \overline{1, N},$ həqiqi sabitlərdir, belə ki, $a \ge 0,\ b_k > 0$ və $c_1 < c_2 < ... < c_N,\ N \in \mathrm{N}$.

3.1-də (10)-(11) məsələsinin köklü alt fəzalarının strukturu və məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri öyrənilir. İkinci tərtib diferensial tənliklər üçün anoloji məsələni P.A. Baydinq, P.C.Braun və B.A.Vatson araşdırmışlar.

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0,\ \delta \in [0, \pi/2]. \qquad (11.d')$$

sərhəd şərtini daxil edək. Xatırladaq ki¸ (10), (11a)-(11c), (11d')məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və qeyri-məhdud artan $\{\lambda_n(\delta)\}_{n=1}^{\infty},\ \lambda_n(\delta) \ge 0,\ n \in N,$ ardıcıllığı əmələ gətirir, belə ki¸ $\beta \in [0, \pi/2)$ və $\beta = \pi/2,\ \beta \in [0, \pi/2)$ olduqda $\lambda_1(\delta) > 0$ olur.

$s(\lambda)$ ilə $y(x, \lambda)$ funksiyasının $(0, l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayını, $i(\xi_k)$ ilə (1.1) tənliyinin $\beta = 0$ olduqda $y(0) = y'(0) = = y''(0) = 0,$ (1.2c) sərhəd şərtlərini, $\beta \in (0, \pi/2]$ olduqda isə $y(0) = Ty(0) = 0,$ (1.2a), (1.2c) sərhəd şərtlərini ödəyən $\xi_k,\ k \in \mathrm{N},$ məxsusi ədədinin osillyasiya indeksini işarə edək.

Lemma6. *Əgər* $\lambda > 0$ *və* $\lambda \in (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(0)],\ n \in \mathrm{N},$ *olarsa* $s(\lambda) = n - 1;$ əgər $\lambda < 0$ *olarsa,* $s(\lambda) = \sum\limits_{\xi_k \in (\lambda, 0)} i(\xi_k)$ *olar.*

Teorem11. *(10)-(11)sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və qeyri-məhdud artan* $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$ *ardıcıllığını əmələ gətirirlər, belə ki,* $\lambda_1 < c_1$.

$\lambda_i^c, i \in \mathrm{N},$ ilə bütün $c_j,\ j \in \{1, 2, ..., N\}$ və $\lambda_n(0), n \in \mathrm{N},$ ədədlərini azalmayan sıra ilə özündə saxlayan həqiqi ədədlər ardıcıllığını işarə edək(əgər hər hansı j və k üçün $c_j = \lambda_k(0)$ olarsa, onda təkrarlanma tərtibi nəzərə alınır). Tutaq ki¸ k_j $c_k \le \lambda_j$ şərtini ödəyən c_k ədədlərinin sayıdır.

Lemma7. *Əgər* $\lambda_n \ge 0$ *olarsa, onda* $\lambda_n, n \in \mathrm{N},$ *məxsusi ədədinə uyğun* $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$ *məxsusi funksiyasının* $(0, l)$ *intervalında* $n - k_n$ *sayda,* $\lambda_n < 0$ *olarsa,* $s(\lambda_n) - k_n$ *sayda sıfrı var.*

3.2-də (10)-(11) məsələsinin operator interpretasiyası verilir. $a > 0$ olan halda xəttiləşdirici-operator $H = L_2(0,l) \oplus C^{N+1}$ fəzasında, $a = 0$ olan halda isə $H = L_2(0,l) \oplus C^N$ fəzasında öz-özünə qoşma olur.

Tutaq ki, $a > 0$. Skalyar hasili

$$(\hat{y},\hat{\vartheta}) = \left(\{y(x),\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_{N+1}\},\{\vartheta(x),\beta_1,\beta_2, \dots ,\beta_{N+1}\}\right) =$$

$$= (u,\vartheta)_{L_2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \overline{\beta}_k}{b_k} + \frac{\alpha_{N+1}\overline{\beta}_{N+1}}{a}$$

şəklində təyin olunan $H = L_2(0,l) \oplus C^{N+1}$ Hilbert fəzasında təyinoblastı

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x),\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N\} \in H : y(x) \in W_2^4(0,\, l),\ \ell(y)(x) \in L_2(0,l),$$
$$y \in B.C_0.,\ \alpha_{N+1} = ay(l)\},$$

olan

$$L\hat{y} = L\{y(x),\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_{N+1}\} =$$

$$= \left\{ \ell(y), c_1\alpha_1 - b_1 y(l), c_2\alpha_2 - b_2 y(l),\ \dots\ , c_N\alpha_N - b_N y(l), y'(l) - by(l) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \right\}$$

operatorunu təyin edək, burada $B.C_0$. ilə(11.a)-(11.c) sərhəd şərtlərini ödəyən funksiyalar çoxluğu işarə olunmuşdur. Qeyd edək ki, $D(L)$ çoxluğu H fəzasında hər yerdə sıxdır.(10)-(11) məsələsi

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y}, \quad \hat{y} \in D(L)$$

məsələsinə adekvatdır.

$a = 0$ olduqda (10)-(11) məsələsi skalyar hasili

$$(\hat{y},\hat{\vartheta}) = \left(\{y(x),\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_N\},\{\vartheta(x),\beta_1,\beta_2, \dots ,\beta_N\}\right) =$$

$$(u,\vartheta)_{L_2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \overline{\beta}_k}{b_k},$$

kimitəyinolunan $H = L_2(0,l) \oplus C^N$ fəzasında təyin oblastı

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x),\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_N\} \in H : y(x) \in W_2^4(0,l), \ell(y)(x) \in L_2(0,l),$$

$$y \in B.C_0., y'(l) - by(l) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 0\}$$

olan

$$L\hat{y} = L\{y(x), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} =$$
$$\{\ell(y), c_1\alpha_1 - b_1 y(l), c_2\alpha_2 - b_2 y(l), \dots, c_N\alpha_N - b_N y(l)\}$$
operatoru üçün məxsusi qiymət məsələsinə gətirilir.

L operatorunun $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ məxsusi vektorlar sistemi H hilbert fəzasında ortoqonal bazis əmələ gətirir, burada

$$\hat{y}_n = \begin{cases} \{y_n(x), \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{N+1,n}\}, \ \alpha_{N+1,n} = a y_n(l), & a > 0, \\ \hat{y}_n = \{y_n(x), \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{N,n}\}, & a = 0. \end{cases}$$

3.3-də (10)-(11) məsələsinin məxsusi funksiyaları sisteminin alt sisteminin $L_p(0,l),\ 1 < p < \infty$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün şərtlər tapılmışdır.

Bu fəslin əsas nəticəsi aşağıdakıdır.

Teorem12.*Tutaq ki¸* $n_1, n_2, \dots, n_{N+1}$ *ixtiyari cüt-cüt bərabər olmayan natural ədədlərdir. Onda* $a > 0$ *olduqda* $\{y_n\}_{n=1,\, n\neq n_i,\, i=\overline{1,N+1}}^{\infty}$ *sistemi,* $a = 0$ *olduqda isə* $\{y_n\}_{n=1,\, n\neq n_i,\, i=\overline{1,N}}^{\infty}$ *sistemi* $L_p(0,l),\ 1 < p < \infty$*, fəzasında bazis (* $p = 2$ *olduqda Riss bazisi) əmələ gətirir.*

Müəllif məsələnin qoyuluşuna və daim diqqətlərinə görə elmi rəhbəri fizika-riyaziyyat elmləri doktoru¸ professor N.B.Kərimova və elmi məsləhətçi riyaziyyat elmlər doktoru, BDU-nin Riyazi analiz kafedrasının professoru Z.S.Əliyevə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın əsas məzmunu aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Агаев Э.А. О базисных свойствах дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями.Ümummilli liderimiz Heydər Əliyevin anadan olmasının 81-ci ildönümünə həsr edilmiş XI ənənəvi Tələbə elmi konfrasının tezisləri. Qərb Universiteti. Bakı, May-2004, s. 150.
2. Агаев Э.А. О базисности системы корневых функций одной спектральной задачи четвертого порядка с граничным условием, квадратично зависящим от спектрального параметра. Əməkdar elm xadimi, akad. Əşrəf Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr

olunmuş elmi konfrasın tezisləri. Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, 25 oktyabr 2007-ci il, s. 19.

3. Агаев Э.А. О базисности в L_p подсистем собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Тезисы докладов 15-й зимней школы посвященной 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ «Современные проблемы теории функций и их приложения» Саратов, Издательство СГУ, 2010, с. 3.
4. Алиев З.С., Агаев Э.А. О базисных свойствах системы собственных функций одного дифференциального оператора четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии. Вестник Бакинского Уни-верситета. Серия физико-математическая, 2008, № 3, с. 39-46.
5. Aliyev Z.S., Agayev E.A. The basis properties of the system of root functions of Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition. Trans. NAS Azerb., ser. phys.-tech. math. sci.,math. mech., 2010, v. 32, №4, p. 63-72.
6. АлиевЗ.С., АгаевЭ.А. Осцилляционныетеоремыдлязадачособственныхзначенияхчетвертогопорядка.ВестникБакинскогоУниверситета. Серия физико-математическая, 2011, № 2, с. 40-49.
7. Керимов Н.Б., Алиев З.С., Агаев Э.А. Об осцилляции собственных функций одной спектральной задачи четвертого порядка. Докл. РАН, 2012, т. 444, №3, с. 250-252.
8. Aliyev Z.S., Agayev E.A. Structure of the root subspace and oscillation properties of the eigenfunctions of completely regular Sturmian system. Proc. IMM NAS Azerbaijan, 2014, v. 40, № 1, p. 36-43.
9. АлиевЗ.С., АгаевЭ.А. ОсцилляционныесвойствасобственныхфункцийвполнерегулярныхсистемШтурмачетвертогопорядка. Докл. РАН, 2015, т. 459, № 1, с. 7-9.

ЭЛЬМИН АГАЛАР оглы АГАЕВ

НЕКОТОРЫЕСПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

АННОТАЦИЯ

ДиссертацияпосвященаисследованиюспектральныхсвойствзадачШтурма-Лиувиллявторого и четвертогопорядков.В работеизучена традиционныевопросыспектральнойтеории: изучена структура корневых подпространств, исследованысосцилляционные свойства собственных функций и найдены достаточные условия базисности в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, подсистем собственных функций задачи Штурма-Лиувилля четвертого порядка со спектральным параметром рационально входящим в граничное условие.

В диссертации получены следующиеосновные результаты:

–полностью изучены структура корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций вполне регулярных систем Штурма четвертого порядка;

–найдено необходимое и достаточное условие базисности в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, подсистем корневых функций задачи Штурма-Лиувиллясо спектральным параметромв граничном условии;

– изучены общая характеристики расположения собственных значений на вещественной оси и структура корневых подпространств, исследованысосцилляционные свойства собственных функций и найдены достаточные условия базисности в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, подсистем собственных функций задачи Штурма-Лиувилля четвертого порядка со спектральным параметром рационально входящим в граничное условие.

ELMİN AGHALAR AGHAYEV

SPECTRAL PROPERTIES OF A CLASS OF DIFFERENTIAL OPERATORS OF THE SECOND AND FOURTH ORDERS

SUMMARY

The dissertation is dedicated to the investigation of the spectral properties of Sturm-Liouville problems of the second and fourth orders.Studied the traditional questions of the spectral theory of multiplicity of eigenvalues, oscillation of eigenfunctions, a basis properties in the space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, of a system of root functions of these problems.

The following results were obtained in the dissertation work:

–fully studied the structure of root spaces and oscillation properties of eigenfunctions of the completely regular Sturmian system of the fourth order;

–found conditions which provide a basis in the space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, subsystems of the root functions of the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition;

– the structure of the root subspaces is given, the oscillation properties of the eigenfunctions are studied, found conditions for a basicity

in the space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, of a subsystem of eigenfunctions of the fourth-order Sturm-Liouville operator with boundary condition rationally depending on the spectral parameter.