Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Diferensial tənliklər» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Tahir S.Hacıyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Vəli M.Qurbanov**

(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti**);**

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Şirmayıl V.Bağırov**

(Bakı Dövlət Universiteti).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Texniki Universiteti «Riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 10 aprel 2015-ci il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 5 mart 2015-ci il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **r.e.d. Vüqar E. İsmayılov**

Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, проф. **Таир С. Гаджиев**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, проф. **Вали М. Курбанов**

(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет);

кандидат физико-математических наук, доц. **Ширмаил В.Багиров**

(Бакинский Государственный Университет).

Ведущая организация: **Азербайджанский Технический Университет** кафедра «Математика».

Защита диссертации состоится 10 апреля 2015 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета D 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 05 марта 2015 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

D 01.111 ИММ НАНА **д.м.н. Вугар Э.Исмаилов**

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ОРХАН СОЛТАН оглы АЛИЕВ

УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2015

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ORXAN SOLTAN OĞLU ƏLİYEV

ÇƏKİLİ FƏZALARDA ELLİPTİK VƏ PARABOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN ARADAN QALDIRILA BİLƏN ÇOXLUQLARI

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2015

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ORXAN SOLTAN OĞLU ƏLİYEV

ÇƏKİLİ FƏZALARDA ELLİPTİK VƏ PARABOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN ARADAN QALDIRILA BİLƏN ÇOXLUQLARI

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2015

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ОРХАН СОЛТАН оглы АЛИЕВ

УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2015

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Funksional analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hidayət M. Hüseynov**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Nizaməddin Ş. İsgəndərov**

(Bakı Dövlət Universiteti**);**

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Telman B.Qasımov**

(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti «Riyazi analiz» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 10 aprel 2015-ci il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq ücün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.
Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 5 mart 2015-ci il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **r.e.d. Vüqar E. İsmayılov**

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Идаят М.Гусейнов**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф.
Низамеддин Ш.Искендеров

(Бакинский Государственный Университет);

кандидат физико-математических наук, доц. **Тельман Б.Касумов**

(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 10 апреля 2015 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета D 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 05 марта 2015 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

D 01.111 ИММ НАНА **д.м.н. Вугар Э. Исмаилов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вопросы устранимости множеств для эллиптических и параболических уравнений имеют давнюю историю. Классическим является результат об устранимости точки для ограниченных решений уравнения Лапласа. В работе М.В. Келдыша получен критерий устранимости компакта в классе ограниченных решений для уравнения Лапласа. Этот критерий - равенство нулю винеровской емкости этого компакта. Далее этот результат был распространен Л. Карлесоном на гармонические функции с конечным интегралом Дирихле. Им был получен критерий устранимости компакта в классе $C^{0,\lambda}(0<\lambda<1)$ гёльдеровых решений уравнения Лапласа. Этот критерий - равенство нулю классической меры Хаусдорфа порядка $n-2+\lambda$.

Для эллиптических уравнений высокого порядка устранимость множеств для гёльдеровых решений рассматривались в работах Л.Карлесона, В.Кондратьева, Дж. Серрина, Р. Харвея и др.

В работе Е.Л.Долженко было получено достаточное условие устранимости в терминах равенства нулю классической меры Хаусдорфа. Для недивергентных эллиптических и параболических второго порядка с ограниченными и измеримыми коэффициентами, вопросы устранимости рассмотрены в работах Е.М.Ландиса и это условие - равенство нулю емкости заданного множества.

В работе Е.Моисеева рассмотрены вопросы устранимости множеств лежащих на границе области задачи Неймана для уравнения Лапласа. Получено условие устранимости в классе гёльдеровых функций в терминах меры Хаусдорфа.

В работе Ю.В.Егорова установлено, что достаточным условием устранимости граничного компакта для дифференциального уравнения m-го порядка в классе L_p- функций, является ограниченность меры Хаусдорфа порядка $n-mq$, где n- размерность пространства, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

В работах С.В.Гайденко рассматривается эллиптическое уравнения второго порядка. Для обобщенных решений этого уравнения из класса L_p, предел в среднем которых на границе равен нулю, получено достаточное условие устранимости граничного компакта - это условие конечность Хаусдорфовой меры порядка

$n-q$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Также исследуется единственность решения второй краевой задачи.

В работе А.А.Новрузова и И.Т.Мамедова рассмотрено недивергентное равномерно эллиптическое уравнение без младших членов в классе гёльдеровых функций и найдено достаточное условие устранимости компакта- это равенство нулю меры Хаусдорфа порядка $n-2+\alpha$.

В работах В.Литмана, Б.Г.Мазьи, Дж. Серрина, Р.Харвейа, Дж.Полкинга и др. рассмотрены различные аспекты вопросов устранимости.

В работе В.Кайзера и Б.Мюллера рассматривается уравнение теплопроводности и в классе ограниченных решений дан критерий устранимости, который заключается в равенстве нулю тепловой емкости компакта.

В работе С.Д.Эйдельмана приведен параболический аналог классического результата об устранимости точки для ограниченных решений уравнения Лапласа.

В работе И.Крал вводится параболический аналог классической меры Хаусдорфа и в терминах этой меры даются условия устранимости множеств для решений параболических уравнений. Доказан критерий устранимости компакта в классе гёльдеровых функций. Метод используемый в этих работах пригоден только для уравнений с постоянными коэффициентами.

В последнее время активно изучаются вырождающиеся уравнения. Отметим работы S.Chanillo, R. Weeden, где изучены различные аспекты качественной теории равномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.

В работе И.Т.Мамедова изучаются вопросы устранимости для уравнений типа Гилбарга-Серрина. Изучается гёльдеровость решения для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений.

Также рассматриваются вопросы устранимости для недивергентных эллиптических уравнений второго порядка.

В работах П.Аронсона, Д.Едмундса и Л.Пелетйега, Р.Гарипи и В.Циммера рассматриваются вопросы устранимости для линейных и квазилинейных параболических уравнений в классе ограниченных и гёльдеровых функций. При этом условие устранимости описывается в зависимости от вида уравнения в терминах равенства нулю соответствующих ёмкостей и мер Хаусдорфа.

Изучаюся также неравномерно вырождающиеся уравнения эллиптического типа.

Мы отметим монографии [31][1], [32][2] в которых приведены многие важные факты из теории эллиптических и параболических уравнений.

Заметим также, что за нехваткой объема многие результаты по нелинейным эллиптическим и параболическим уравнениям, в связи с вопросами устранимости, нами не приведены.

Цель работы. Данная диссертационная работа посвящена вопросам устранимости множеств относительно различных краевых задач для неравномерно вырождающегося эллиптического и параболического оператора в пространстве ограниченных функций.

Общая методика исследований. Для исследования рассматриваемых задач используются методы дифференциальных уравнений в частных производных, теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- в классе ограниченных функций для вырождающихся эллиптических уравнений получен критерий устранимости компакта;
- при некоторых условиях на коэффициенты эллиптического уравнения в терминах емкости получено достаточное устранимости компакта;
- получены емкостные оценки, оценки функции Грина;
- в классе ограниченных функций для вырождающихся параболических уравнений получен критерий устранимости компакта;
- в терминах меры Хаусдорфа получены достаточные для устранимости компакта;

[1] О.А.Ладыженская, И.И.Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* // 1973, 472с.

[2] О.А.Ладыженская, В.А., И.И.Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* // 1967, 431с.

- Получены достаточные условия устранимости компакта для решений второй краевой задачи для вырождающихся параболических уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались в Институте Математики и Механики НАН Азербайджана на семинарах отделов «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Г.И.Асланов), «Дифференциальные уравнения» (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиев), а также на Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика И.И.Ибрагимова (Баку, 2012); XIV Международной научной конференции, посвященной памяти акад. М.Кравчука (Киев, 2012); XXI Международной конференции (Украина, 2013); Международной конференции, посвященной 55-летию Института Математики и Механики НАНА (Баку, 2014).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы. Объем работы 103 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения и двух глав.

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор полученных результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1 (1.1-1.4) посвящена изучению вопросов устранимости для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.

В 1.1 даются необходимые обозначения и приводятся некоторые предварительные факты. Пусть E_n- n-мерное Евклидово пространство точек $x=(x_1,...,x_n), n\geq 3,$ D - ограниченная область в E_n с границей $\partial D, 0\in D.$ Рассмотрим в D эллиптический оператор

$$L=\sum_{i,j}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

в предположение, что $\|a_{ij}(x)\|$- действительная симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причем для всех $\xi\in E_n$ и п.в. $x\in D$ выполнено условие

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\gamma^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2, \tag{1}$$

здесь $\gamma\in(0,1]$ - константа,

$$\lambda_i(x)=\left(|x|_\alpha\right)^{\alpha_i}, |x|_\alpha=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\frac{2}{2+\alpha_i}}, 0\leq\alpha_i<\frac{2}{n-1};\ i=1,...,n \tag{2}$$

Множество всех ограниченных в D функций обозначим через $M(D)$. $W^1_{2,\alpha}(D)$- Банахово пространство функций $u(x)$, заданных на D, точное определение которого будет дано далее.

Компакт E называется устранимым относительно первый краевой задачи для оператора L в пространстве $M(D)$, если всякое обобщенное решение уравнения $\mathcal{L}u=0$ в $D\setminus E$, обращающийся в нуль на ∂D и принадлежащее пространству $M(D)$, тождественно равно нулю.

Пусть $h(x)\in W^1_{2,\alpha}(D), f^\circ(x)\in L_2(D), f^i(x)\in L_{2,\lambda_i^{-1}}(D),$ $i=1,...,n$ - заданные функции. Рассмотрим первую краевую задачу

$$Lu=f^\circ(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f^i(x)}{\partial x_i},\quad x\in D \tag{4}$$

$$(u(x)-h(x))\in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(D) \tag{5}$$

Функция $u(x)\in W_{2,\alpha}^{1}(D)$ называется обобщенным решением задачи (4)-(5), если для всякой функции $\eta(x)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^{1}(D)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_i \eta_j dx = -\int_D \left(-f^{\circ}\eta + \sum_{i=1}^{n} f^i \eta_i \right) dx$$

Лемма 1.1. Если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2), то первая краевая задача (4)-(5) имеет единственное обобщенное решение $u(x)$ при всяких $h(x)\in W_{2,\alpha}^{1}(D), f^{\circ}(x)\in L_p(D),\ f^i(x)\in L_{p,\lambda_i^{-1}}(D),\ i=1,\dots,n,\ \partial D\in C^1$, и это то решение $u(x)$ непрерывно по гёльдеру в D.

Лемма 1.2. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2). Тогда всякое обобщенное решение уравнения $\mathrm{L}u=0$ в D непрерывно по гёльдеру в каждой строго внутренней подобласти D.

Лемма 1.3. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2) и $\overline{\mathcal{E}}_{R,1}(0)\subset D$. Тогда для всякого положительного обобщенного решения $u(x)$ уравнения $\mathrm{L}u=0$ в D справедливо неравенство Гарнака

$$\sup_{\mathcal{E}_{R,1}(0)} u \le C_1(\gamma,\alpha,n) \inf_{\mathcal{E}_{R,1}(0)} u \qquad (6)$$

Если при этом $y\in\partial\mathcal{E}_{R,2}(0)$ и $\overline{\mathcal{E}}_{R,1}(y)\subset D$, то неравенство вида (6) справедливо в эллипсоиде $\mathcal{E}_{R,2}(y)$.

Лемма 1.4. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2), а $u(x)$ - обобщенное решение первой краевой задачи (4)-(5) при $f^i(x)\equiv 0$, $i=0,\dots,n$. Тогда, если $h(x)$ ограничена на ∂D в смысле $W_{2,\alpha}^{1}(D)$, то для решения $u(x)$ справедлив следующий принцип максимума

$$\inf_{\partial D} h \le \inf_D u \le \sup_D u \le \sup_{\partial D} h,$$

где $\inf\limits_{\partial D} h \left(\sup\limits_{\partial D} h \right)$- точная нижняя (верхняя) грань тех чисел a, для которых $h(x) \geq a \, (h(x) \leq a)$ на ∂D в смысле $W^1_{2,\alpha}(D)$.

Пусть $H \subset \mathcal{E}$- некоторый компакт, V_H-множество всех функций $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ таких, что $\varphi(x) \geq 1$ на H в смысле $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$. Рассмотрим функционал

$$I_{\mathrm{L}}(\varphi) = \int\limits_{\mathcal{E}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \varphi_i \varphi_j \, dx, \quad \varphi(x) \in V_H .$$

Величина $\inf\limits_{\varphi \in V_H} I_{\mathrm{L}}(\varphi)$ называется L- емкостью компакта H относительно эллипсоида $\mathcal{E}$ и обозначается через $cap^{(\varepsilon)}_{\mathrm{L}}(H)$. В случае $\mathcal{E} = E_n$ соответствующая величина называется L- емкостью компакта H и обозначается через $cap_{\mathrm{L}}(H)$.

Лемма 1.5. Существует единственная функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ такая, что $u(x) \geq 1$ на H в смысле $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ и $cap^{(\varepsilon)}_{\mathrm{L}}(H) = I_{\mathrm{L}}(u)$. Более того, $u(x) = 1$ на H в смысле $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$.

Функция $u(x)$, на которой достигается точная нижняя грань функционала $I_{\mathrm{L}}(\varphi)$ на множестве V_H, называется L-емкостным потенциалом H относительно эллипсоида $\mathcal{E}$.

Лемма 1.6. L - емкостной потенциал $u(x)$ компакта H относительно $\mathcal{E}$ является обобщенным решением уравнения $\mathrm{L}u = 0$ в $\mathcal{E} \setminus H$, обращающимся в 0 на $\partial\mathcal{E}$ и в 1 на ∂H в смысле $W^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$.

Пусть μ-заряд ограниченной вариации, заданный на $\mathcal{E}$. Будем говорить, что функция $u(x) \in L_1(\mathcal{E})$ является слабым решением уравнения $\mathrm{L}u = -\mu$, равным нулю на $\partial\mathcal{E}$, если для любой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E}) \cap C(\overline{\mathcal{E}})$, $\mathrm{L}\varphi(x) \in C(\overline{\mathcal{E}})$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathcal{E}} u \mathrm{L} \varphi dx = \int\limits_{\mathcal{E}} \varphi d\mu$$

Согласно лемме 1.1 существует непрерывный линейный оператор χ из $\overset{*}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ такой, что для всякого функционала $T \in \overset{*}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ функция $u = \chi(T)$ является единственным в $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathcal{E})$ обобщенным решением уравнения $\mathrm{L}u = T$. Оператор χ называется оператором Грина. По лемме 1.1 этот оператор при $p > p_0$ переводит $\overset{*}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})$ в $C(\overline{\mathrm{E}})$. Функция $u(x)$ является слабым решением уравнения $\mathrm{L}u = -\mu$, равным нулю на $\partial\mathrm{E}$, тогда и только тогда, когда для любой функции $\psi(x) \in C(\overline{\mathrm{E}})$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathrm{E}} u \psi dx = \int\limits_{\mathrm{E}} \chi(\psi) d\mu$$

Можно показать, что для каждой меры μ на E существует единственное слабое решение уравнения $\mathrm{L}u = -\mu$, равное нулю на $\partial\mathrm{E}$.

Скажем, что за ряд $\mu \in \overset{*}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})$, если существует вектор $\overline{f}(x) = \left(f^0(x), f^1(x), \ldots, f^n(x)\right)$, $f^0(x) \in L_2(\mathrm{E})$, $f^i(x) \in L_{2,\lambda_i}(\mathcal{E})$, $i = 1, \ldots, n$, что для всякой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E}) \cap C(\overline{\mathrm{E}})$ справедливо интегральное тождество

$$\mu(\varphi) = \int\limits_{\mathrm{E}} \varphi d\mu = \int\limits_{\mathrm{E}} \left(f^0 \varphi - \sum_{i=1}^{n} f^i \varphi_i \right) dx .$$

При этом

$$\left| \int\limits_{\mathrm{E}} \varphi d\mu \right| \le C_2\left(\overline{f}\right) \|\varphi\|_{W^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})}$$

Лемма 1.7. Слабое решение уравнения $\mathrm{L}u = -\mu$, равное нулю на $\partial\mathrm{E}$, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \overset{*}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})$.

Пусть $\delta(x)$- мера Дирака, сосредоточенная в точке 0, y- произвольная фиксированная точка E.

Слабое решение $g(x,y)$ уравнения $\mathrm{L}g = -\delta(x-y)$, равное нулю на $\partial\mathrm{E}$, называется функцией Грина оператора L в E.

В случае $\mathrm{E} = E_n$ соответствующая функция называется фундаментальным решением оператора L и обозначается через $G(x,y)$.

Согласно выщедоказанному, если $\psi(x)$- произвольная функция из $C(\overline{\mathrm{E}})$, то обобщенное решение $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})$ уравнения $\mathrm{L}\varphi = -\psi$ может быть представлено в виде

$$\varphi(y) = \int_{\mathrm{E}} g(x,y)\psi(x)dx$$

Лемма 1.8. Для всякого заряда ограниченной вариации на E интеграл $u(x) = \int_{\varepsilon} g(x,y)d\mu(y)$ существует, конечен п.в. в E и является слабым решением уравнения $\mathrm{L}u = -\mu$, равным нулю на $\partial\mathrm{E}$.

Рассмотрим L- емкостной потенциал $u(x)$ компакта H относительно эллипсоида E. Было показано, что $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$\int_{\mathrm{E}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_i u_j dx \geq 0$ при всякой неотрицательной на H функции $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(\mathrm{E})$. По теореме Шварца существует мера μ на H такая, что

$$\int_{\mathrm{E}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_i \eta_j dx = \int_{\mathrm{E}} \eta d\mu \tag{7}$$

Далее, так как $u=1$ на H в смысле $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\mathrm{E})$, то носитель меры μ расположен на ∂H. Мера μ - называется L - емкостным распределением компакта H. Согласно лемме 1.8 L-емкостной потенциал $u(x)$ является слабым решением уравнения $\mathrm{L}u=-\mu$, равным нулю на $\partial\mathrm{E}$, и может быть представлен в виде $u(x)=\int\limits_{\mathrm{E}} g(x,z)d\mu(z)$.

Лемма 1.9. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2), $y\in\partial\mathrm{E}_{R,2}(0)$, $\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\subset D$, $x\in\partial\mathrm{E}_{R,1}(y)$. Тогда для функции Грина $g(x,y)$ справидливы оценки

$$\begin{aligned} &C_3(\gamma,\alpha,n)\left[cap_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{E})}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\right)\right]^{-1}\leq \\ &\leq g(x,y)\leq C_4(\gamma,\alpha,n)\left[cap_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{E})}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Если же $\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(0)\subset D$, $x\in\partial\mathrm{E}_{R,1}(0)$, то

$$C_3\left[cap_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{E})}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(0)\right)\right]^{-1}\leq g(x,0)\leq C_4\left[cap_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{E})}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(0)\right)\right]^{-1}. \tag{9}$$

Следствие. Пусть выполнены условия леммы, а $y\in\partial\mathrm{E}_{R,2}(0)$, $\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\subset D$, $x\in\partial\mathrm{E}_{R,1}(y)$ или $y=0$, $\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(0)\subset D$, $x\in\partial\mathrm{E}_{R,1}(0)$. Тогда для фундаментального решения $G(x,y)$ справедливы оценки

$$C_3\left[cap_{\mathrm{L}}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\right)\right]^{-1}\leq G(x,y)\leq C_4\left[cap_{\mathrm{L}}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\right)\right]^{-1}. \tag{10}$$

Приведем теорему о критерии устранимости компакта в пронстранстве ограниченных функций $M(D)$.

Теорема 1.1. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2). Тогда для устранимости компакта $E\subset D$ относительно первой краевой задачи для оператора L в пространстве $M(D)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$cap_{\mathrm{L}}(E)=0 \tag{11}$$

Далее проведя оценки емкости можно оценить фундаментальное решение. Для этого понадобятся следующие леммы.

Лемма 1.10. Пусть относительно коэффициентов оператора L

выполнено условие (1). Тогда если $y \in \partial \mathrm{E}_{R,2}(0)$, то

$$C_7(\gamma,\alpha,n)R^{n+\frac{<\alpha>}{2}-2} \le cap_{\mathrm{L}}\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\right) \le C_8(\gamma,\alpha,n)R^{n+\frac{<\alpha>}{2}-2} \tag{12}$$

Следствие 1. Если выполнены условия (1)-(2), $y \in \partial \mathrm{E}_{R,2}(0)$, то для любого $\rho \in (0,R]$ справедлива оценка

$$cap_L\left(\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\right) \le C_{17}(\gamma,\alpha,n)\rho^{n+\frac{<\alpha>}{2}-2}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{\alpha_i}\right) \tag{13}$$

С помощью этих оценок получим следующую оценку фундаментального решения.

Следствие 2. Если выполнены условия (1)-(2) и $y \ne 0$, то при $x \in \mathrm{E}_{d|y|_\alpha;1}(y)$, $x \ne y$, для фундаментального решения $G(x,y)$ справедлива оценка

$$G(x,y) \ge C_{18}(\gamma,\alpha,n)\frac{\left(|x-y|_\alpha\right)^{2-n-\frac{<\alpha>}{2}}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{|y|_\alpha}{|x-y|_\alpha}\right)^{\alpha_i}} \tag{14}$$

Если же $y = 0$, то оценка (14) справедлива для всех $x \ne 0$. Здесь $d = \dfrac{1}{n \cdot 2^{\frac{2}{2+\alpha^-}}}$.

Введем понятие F-емкости и в терминах этой емкости дадим достаточное условие устранимости компакта.

Пусть $F(x,y)$- положительная функция, определенная в $E_n \times E_n$, непрерывна при $x \ne y$, причем $\lim\limits_{x \to y} F(x,y) = \infty$.

Пусть далее $E \subset E_n$- некоторый компакт. Назовем меру μ на E $[F]$-допустимой, если $\operatorname{supp} \mu \subset \mathrm{E}$ и $V_\mu^E(x) = \int\limits_E F(x,y)d\mu(y) \le 1$ для $x \in \operatorname{supp} \mu$.

Величина $\sup \mu(E) = cap_{[F]}(E)$, где точная верхняя грань берется по всем $[F]$- допустимым мерам, называется $[F]$-емкостью компакта E.

Теорема 1.2. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (1)-(2). Тогда для устранимости компакта $E \subset D$ относительно первой краевой задачи для оператора L в пространстве $M(D)$ достаточно, чтобы

$$cap_{[F_1]}(E) = 0, \tag{15}$$

где $F_1(x,y) = \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|y|_\alpha}{|x-y|_\alpha} \right)^{\alpha_i} \right]^{-1} \left(|x-y|_\alpha\right)^{2-n-\frac{<\alpha>}{2}}$.

Замечание. Пусть выполнены условия теоремы, а компакт $E \subset D$ является устранимым относительно первой краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$ в пространстве $M(D)$. Тогда $mes(E) = 0$.

Глава II посвящена устранимым множествам решений вырождающихся параболических уравнений. Устанавливается необходимое и достаточное условие устранимости компакта относительно первой краевой задачи для вырождающихся дивергентных параболических уравнений второго порядка в пространстве ограниченных функций.

Пусть E_n и R_{n+1} соответственно Евклидовы пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$. $\Omega \subset E_n$ ограниченная область с границей $\partial\Omega$. Q_T - цилиндрическая область $\Omega \times (0,T)$, лежащий в евклидовом пространстве R_{n+1}, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $Q_0 = \{(x,t) : x \in \Omega, t = 0\}$. В Q_T рассмотрим следующую задачу

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x,t) \tag{16}$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T)} = 0 \tag{17}$$

где $\Gamma(Q_T)$ - параболическая граница, состоящая из боковой поверхности S_T и нижнего основания. Относительно коэффициентов предполагаем, что $\|a_{ij}(x,t)\|$ действительная симметричная матрица с измеримыми элементами в Q_T и для всех $(x,t)\in Q_T$ и $\xi\in E_n$ выполнено условие

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2, \tag{18}$$

где $\gamma\in(0,1]$ - константа, $\lambda_i(x,t)=\left(|x|_\alpha+\sqrt{|t|}\right)^{\alpha_i}$, $|x|_\alpha=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\overline{\alpha}_i}$,

$\overline{\alpha}_i=\dfrac{2}{2+\alpha_i}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$, и $0\le\alpha_i<\dfrac{2}{n-1}$, $i=\overline{1,n}$.

Относительно правой части предполагаем, что $f(x,t)\in L_2(Q_T)$.

Обозначим $\alpha^-=\min\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, $\alpha^+=\max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. Через $A(Q_T)$ обозначим множество гладких функций $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T)$, для которых можно найти область $\Omega(u)$ такое, что $\overline{\Omega}(u)\subset\Omega$ и $\sup\mathrm{p}u\in\Omega(u)\times[0,T]$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ и $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{2,\alpha}(Q_T)$ соответственно пополнение $A(Q_T)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)}=\left[vrai\max_{t\in[0,T]}\int_\Omega u^2dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\lambda_i(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right]^{1/2}$$

и

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{2,\alpha}(Q_T)}=\left[\int_\Omega\left(u^2dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\lambda_i(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)dxdt\right]^{1/2}$$

Множество всех ограниченных функций в Q_T обозначим через $M(Q_T)$.

Функция $u(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (16)-(17), если для любой функции $\eta(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{2,\alpha}(Q_T)$ и любого $t_1\in[0,T]$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega u(x,t_1)\eta(x,t_1)dx-\int_{Q_{t_1}} u\eta_t dxdt+ \\ +\int_{Q_{t_1}}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_i\eta_j dxdt=\int_{Q_{t_1}} f\eta dxdt, \tag{19}$$

где $Q_{t_1}=\Omega\times(0,t_1)$.

Введем также пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p,\alpha}(Q_T)$ и $L_{p,\omega}(Q_T)$. Пусть $\omega(x,t)$-измеримая в Q_T функция, конечная и положительная для п.в. $(x,t)\in Q_T$. Через $L_{p,\omega}(Q_T)$ обозначим Банахово пространство функций $u(x,t)$ заданных на Q_T, с конечной нормой

$$\|u\|_{L_{p,\omega}(Q_T)}=\left(\int_{Q_T}(\omega(x,t))^{p/2}|u(x,t)|^p dxdt\right)^{1/p},\ 1<p<\infty.$$

$W^{1,0}_{p,\alpha}(Q_T)$-Банахово пространство функций $u(x,t)$ заданных на Q_T, с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{1,1}_{p,\alpha}(Q_T)}=\left[\int_\Omega\left(|u|^p dxdt+\sum_{i=1}^n\int_{Q_T}(\lambda_i(x,t))^{p/2}|u_i|^p\right)dxdx\right]^{1/p},\ 1<p<\infty.$$

Теперь аналогично $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ вводится подпространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p,\alpha}(Q_T)$ для $p\in(1,\infty)$. Пространство сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p,\alpha}(Q_T)$ будем обозначать $\overset{*}{W}{}^{1,0}_{p,\alpha}(Q_T)$.

Пусть $E\subset Q_T$ - некоторый компакт. Обозначим через $A_E(Q_T)$ совокупность всех функций $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T)$, для каждой из которых существует некоторая окрестность компакта E, в которой $u(x,t)=0$. Функция $u(x,t)\in W_{2,\alpha}^{1,0}(Q_T \setminus E)$ называется обобщенным решением уравнения $\mathrm{L}u = f(x,t)$ в $Q_T \setminus E$, обращающимся в нуль на $\Gamma(Q_T)$, если интегральное тождество (19) выполнено для любой функции $\eta(x)\in A_E(Q_T)$.

Компакт E называется устранимым относительно первой краевой задачи для оператора L в пространстве $M(Q_T)$, если всякое обобщенное решение уравнение $\mathrm{L}u=0$ в $Q_T \setminus E$, обращающийся в нуль на $\Gamma(Q_T)$ и принадлежащий пространству $M(Q_T)$, тождественно равно нулю.

Пусть $h(x,t)\in W_{2,\alpha}^{1,0}(Q_T)$, $f^{\circ}(x,t)\in L_2(Q_T)$, $f^{i}(x,t)\in L_{2,\lambda_i^{-1}}(Q_T)$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим первую краевую задачу

$$\mathrm{L}u = f^0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f^i(x,t)}{\partial x_i},\ (x,t)\in Q_T \tag{20}$$

$$\left(u(x,t)-h(x,t)\right)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^{1,0}(Q_T) \tag{21}$$

Лемма 2.1. Если относительно коэффициентов оператора L выполняются условия (18), то первая краевая задача имеет единственное обобщенное решение $u(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^{1,0}(Q_T)$ для $h(x,t)\in W_{2,\alpha}^{1,0}(Q_T)$, $f^{\circ}(x,t)\in L_2(Q_T)$, $f^{i}(x,t)\in L_{2,\lambda_i^{-1}}(Q_T)$, $i=\overline{1,n}$.

Лемма 2.2. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (18), и $\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(0)\times(0,T)\subset Q_T$. Тогда для всякого обобщенного решения $u(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^{1,0}(Q_T)$ уравнения (16) в Q_T справедливо неравенство

$$\sup_{\mathrm{E}_{R,1}(0)\times(0,T)} u \le C_1(\gamma,\alpha,n)\inf_{\mathrm{E}_{R,1}(0)\times(0,T)} u\,, \tag{22}$$

и если при этом $(y,t)\in\partial\mathrm{E}_{R,1}(0)\times(0,T)$ и $\overline{\mathrm{E}}_{R,1}(y)\times(0,T)\subset Q_T$, то неравенство вида (22) справедливо в $\mathrm{E}_{R,1}(y)\times(0,T)$.

Лемма 2.3. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (18). Тогда существует $p_0(\alpha,n)$ такое, что если $p > p_0$, $h(x,t) \in W^{1,0}_{p,\alpha}(Q_T)$, $f^{\circ}(x,t) \in L_p(Q_T)$, $f^{i}(x,t) \in L_{p,\lambda_i^{-1}}(Q_T)$, то всякое обобщенное решение $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ уравнения (16) непрерывно по Гельдеру в каждой строго внутренней подобласти Q_T.

Лемма 2.4. Пусть относительно коэффициентов L выполнены условия (18), а $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ обобщенное решение первой краевой задачи (20), (21) при $f^{i}(x,t) = 0$, $i = \overline{0,n}$. Тогда если $h(x,t)$ ограничена на $\Gamma(Q_T)$ в смысле $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$, то для решения $u(x,t)$ справедлив следующий принцип максимума

$$\inf_{\Gamma(Q_T)} h \le \inf_{Q_T} u \le \sup_{Q_T} u \le \sup_{\Gamma(Q_T)} h,$$

где $\inf\limits_{\Gamma(Q_T)} h \left(\sup\limits_{\Gamma(Q_T)} h \right)$ -точная нижняя (верхняя) грань чисел a, для которых $h(x) \ge a \left(h(x) \le a \right)$ на $\Gamma(Q_T)$ в смысле $W^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$.

В 2.2 приводятся некоторые емкостные оценки, оценки функции Грина. Сначала вводится понятие L емкости.

Лемма 2.5. Существуют постоянные C_1 и C_2 зависящие от γ, α, n, такие, что

$$C_1(\gamma,\alpha,n) cap_{\mathrm{L}_1}(\Pi) \le cap_{Z_2}(\Pi) \le C_2(\gamma,\alpha,n) cap_{\mathrm{L}_1}(\Pi),$$

где $\Pi \subset \mathrm{E}_T$ -некоторый компакт.

Лемма 2.6. Слабое решение $u(x,t)$ уравнения $\mathrm{L}u = -\mu$, равное нулю на $\Gamma(\mathrm{E}_T)$, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(\mathrm{E}_T)$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \overset{*}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(\mathrm{E}_T)$.

Лемма 2.7. Для всякого заряда ограниченной вариации μ на E_T следующий интеграл

$$u(x,t)=\int_{E_T} g(x,y,t)d\mu(y)$$

существует, конечен п.в. в E_T и является слабым решением уравнения $Lu=-\mu$, равным нулю на $\Gamma(E_T)$.

Далее доказываются оценки функции Грина. В параграфе 2.3 доказывается теорема об устранимости компакта.

Теорема 2.1. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (18). Тогда для устранимости компакта $E \subset Q_T$ относительно первой краевой задачи для оператора L в пространстве $M(Q_T)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$cap_L(E)=0 \tag{23}$$

В 2.4 устанавливается достаточное условие устранимости компакта относительно второй краевой задачи для вырождающихся дивергентных параболический уравнений в пространстве гельдеровых функций.

В Q_T рассмотрим задачу

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x,t)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma(Q_T)}=0, \tag{24}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ - означает производную по конормали, т.е. $\frac{\partial}{\partial \nu}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}n_i$, $(t,x)\in\Gamma(Q_T)$, а n_i-внешняя единичная нормаль к поверхности Γ.

Пусть E- некоторое компактное множество лежащее на Γ. Назовем множество E устранимым относительно второй краевой задачи (24) в $C^{0,\lambda}(Q_T)$, $0<\lambda<1$, если из

$$Lu=0,\ x\in Q_T\setminus E,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma(Q_T)\setminus E}=0,\ u\big|_t=0, \tag{25}$$

$u(x,t) \in C^{0,\lambda}(Q_T)$, следует, что $u(x,t) \equiv 0$ в Q_T.

Теорема 2.2. Пусть Q_T - цилиндрическая область в R^{n+1}, $E \subset Q_T$ - некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (18), правая часть $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (24), достаточно

$$m_H^{\frac{n+\lambda}{2}}(E) = 0.$$

В Q_T рассмотрим параболическое уравнение

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(t,x)u = 0$$

в Q_T (26)

$$\sum_{i,j=}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=}^{n} b_i(t,x) u n_i = 0, \ (t,x) \in \Gamma(Q_T)$$

Относительно коэффициентов выполняются условия (18), а также

$$|b_i(t,x)| \le b_0, \ -b_0 \le C(t,x) < 0 \tag{27}$$

Теорема 2.3. Пусть Q_T-цилиндрическая область в R^{n+1}, $E \subset Q_T$ - некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (18), (27). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (26), достаточно, чтобы

$$m_H^{\frac{n+\lambda}{2}}(E) = 0.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук Т.С.Гаджиеву за постановку задач, постоянное внимание к работе и за ценные советы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Shariffar A, Aliyev O.S., Mamedova V.A. Removable sets of solutions of second boundary- value problem for degenerated parabolic equations // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2011, vol. XXXV(XLIII), pp.93-98.
2. Aliyev O.S., Bayramova N.Q. Behavior of solutions of degenerated parabolic equations // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2012, vol. XXXVII(XLV), pp.21-24.
3. Aliyev O.S. On removable sets of solutions of degenerate elliptic equations with minor terms // News of Baku University, series of Physico-Mathematical Sciences vol.3,2012, pp.68-78.
4. Gadjiev T.S., Aliyev O.S. On removable sets of solutions of elliptic equations with minor terms // "Functions theory and problems of harmonic analysis proceedings of the International conference devoted to the 100-th anniversary of academician I.I.Ibrahimov, Baku-2012, pp.86-87.
5. Gadjiev T.S., Aliev O.S., Rasulov R. On behavior of solution of degenerated hyperbolic equation // ISRN Applied Mathematics vol.2012, article ID124936, 10pages.
6. Gadjiev T.S., Aliyev O.S. On removable sets of solutions for degenerate liner elliptic equations // XIV Международная научная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения акад. М.Кравчука. Киев, 2012, стр.16.
7. Gadjiev T.S., Aliyev O.S. On removable sets of solutions for degenerate equation. //"Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları" II Respublika Elmi Konfransı 2012, səh.30.
8. Aliyev O.S. On removable sets of solutions of Neumann problem for parabolic equations // XXI International Conference problems of decision making under uncertainties (PDMU-2013) Abstracts, Skhidnytsia, Ukraine, may 13-17, 2013, pp.18.
9. Gadjiev T.S., Aliyev O.S. On removable sets of solutions of Neuman problem for quasilinear elliptic equations of divergent form // Applied Mathematics, 2013, v.4, pp.290-298.
10. Aliyev O.S., Aliyev Kh.H., Shikhmamedov A. On removable set's of solutions for non uniformly elliptic equations. On actual problems of mathematics and mechanics proceedings of the International conference devoted to the 55-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, 2014, pp.82-83.

ORXAN SOLTAN oğlu ƏLIYEV

ÇƏKİLİ FƏZALARDA ELLİPTİK VƏ PARABOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN ARADAN QALDIRILA BİLƏN ÇOXLUQLARI

XÜLASƏ

Dissertasiya işində çəkili fəzalarda elliptik və parabolik tənliklərin həllərinin aradan qaldırıla bilən çoxluqları məsələləri tədqiq edilmişdir.

İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- Məhdud funksiyalar sinfində cırlaşmış elliptik tənliklər üçün kompaktın aradan qaldırılması kriteriyası alınmışdır;
- Elliptik tənliyin əmsalları üzərinə tutum termini ilə bağlı hər hansı şərt qoyduqda kompaktın aradanqaldırılması üçün kafi şərt alınmışdır;
- Tutumun qiymətləndirilməsi, Qrin funksiyasının qiymətləndirilməsi alınmışdır;
- Məhdud funksiyalar sinfində cırlaşmış parabolik tənliklər üçün kompaktın aradanqaldırılması kriteriyası alınmışdır;
- Hausdorf ölçüsü termini mənasında kompaktın aradanqaldırılması üçün kafi şərt alınmışdır;
- Cırlaşmış parabolik tənliklər üçün ikinci sərhəd məsələsinin həlli üçün kompaktın aradanqaldırılmasının kafi şərti alınmışdır.

ORKHAN SOLTAN oglu ALIEV

REMOVABLE SET OF SOLUTIONS IN WEIGHTED SPACES OF ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS

SUMMARY

In this thesis in weighted spaces removable sets of solutions of elliptic and parabolic equations is investigated.

The following main results are obtained in the thesis:

- In classes of bounded functions for degenerated elliptic equations criteria removable of compact is obtained;
- Under some conditions for coefficients of equation connected with capacity sufficiently condition for removability is obtained;
- The estimates of capacity and Green function is obtained;
- In classes of bounded functions for degenerated parabolic equations criteria removable of compact is obtained;
- In termins of Hausdorf measure sufficiently condition for removability is obtained;
- For solutions second boundary problem degenerated parabolic equations sufficiently condition for removable compact is obtained.