AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ÇİNGİZ MƏMMƏD oğlu HƏŞİMOV

SƏRHƏD ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN KƏSİLƏN DİFERENSİAL OPERATORUN MƏXSUSİ FUNKSİYALARININ ÜMUMİLƏŞMİŞ LEBEQ FƏZALARINDA BAZİSLİK XASSƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2016

Dissertasiya işi **Gəncə Dövlət Universitetinin** «Riyazi analiz» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. **Bilal T. Bilalov**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Vəli M. Qurbanov**

(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti)

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru **Əli A. Hüseynli**

(Xəzər Universiteti)

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti

«Ali riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 09 dekabr 2016-cı il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9.

Avtoreferat göndərilib 08 noyabr 2016-cı il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **r.e.d., dos. Rövşən Bəndəliyev**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Topoloji fəzanın elementlərinin müəyyən sistem üzrə ayrılış məsələləri riyaziyyatın approksimasiya nəzəriyyəsi, xətti operatorların spektral nəzəriyyəsi, tənliklər nəzəriyyəsi və digər bir çox istiqamətlərində çox mühüm əhəmiyyətə malikdir. Ayrılış məsələləri approksimasiya nəzəriyyəsinin, bazislər və freymlər nəzəriyyəsinin ayrılmaz bir hissəsidir. Ayrılış və bazislərin qurulması üçün bir çox metodlar mövcuddur. Hilbert fəzalarında freymlər onlar üzrə ayrılışın mövcudluğu ilə xarakterizə olunur. Banax fəza halında ayrılış həmişə mövcud deyil və Banax fəzalarında freym üzrə ayrılış vacib məsələlərdən biridir. Elementlərin ayrılışı riyazi fizika və mexanikanın çoxsaylı tənliklərinin həlli zamanı da xüsusi rol oynayır. Belə ki, bir çox xüsusi törəməli tənliklərin Furye metodu ilə həlli müəyyən banax fəzasının elementlərinin uyğun diferensial operatorların qoşma və məxsusi elementləri üzrə ayrılış məsələsinin öyrənilməsinə gətirilir. Adətən bu fəzalar funksiyaların Lebeq fəzası və ya diferensiallanan funksiyaların Sobolev fəzaları olur. Çox vaxt ənənəvi fəzalardan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənən funksiyalar fəzaları (və ya bu cür fəzalarda bu məsələləri öyrənmək zərurəti yaranır) meydana gəlir. Belə fəzalardan biri dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasıdır. Görünür ki, bu fəza keçən əsrin 30-cu illərində Nakano tərəfindən daxil edilmişdir. Mexanikada tətbiqlə əlaqədar olaraq bu fəzalarda riyazi analizin müxtəlif məsələlərinin öyrənilməsinə olan maraq artmışdır. Buna aşkar nümunə olaraq $p(\cdot)$-Laplas adlanan tənliyi göstərmək olar. Bu tənliyin həlli ümumiləşmiş Lebeq və Sobolev fəzalarının bir çox xassələrinin öyrənilməsini tələb edir. Dissertasiya işi yuxarıda sadalanan məsələlərə həsr olunmuşdur. Bu səbəbdən dissertasiya işinin mövzusu aktualdır və müəyən elmi maraq kəsb edir.

Dissertasiya işi iki hissədən ibarətdir. Birinci hissə Banax fəzalarında ayrılış məsələlərinə həsr olunmuşdur. İkinci hissədə dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında eyni məsələlərə ikinci tərtib kəsilən diferensial operatorun qoşma və məxsusi elementlərinə nəzərən baxılmışdır. Ayrılış məsələləri dərin tarixə malikdir. Klassik triqonometrik sistemlər üzrə ayrılış çoxdan məlumdur və çox zəngin tarixə malikdir. Bir çox funksional fəzalarda bu sistemlər üzrə ayrılış məsələləri kifayət qədər yaxşı öyrənilmiş və A. Ziqmund, N.K.Bari, Kaçmaj, Şteynqauz, Edvards və başqalarının monoqrafiyalarında işıqlandırılmışdır. Spektral nəzəriyyənin tələbatı həyəcanlanmış triqonometrik sistemlərə də baxmağı vadar edir. Oxşar sistemlərin bazislik xassələrinin (tamlıq, minimallıq, bazislik, Riss bazisliyi və s.) öyrənilməsinə görünür ki, Peli, Viner və N.Levinsonun işlərində başlanılmışdır. Xətti həyəcanlanmaya malik triqonometrik sistemlər bir çox qarışıq tip xüsusi törəməli tənliklərin həlli zamanı meydana çıxır. Bu məlumatlarla bağlı С.М. Пономарев, Е.И. Моисеев və başqalarının işlərinə baxmaq olar. Oxşar sistemlərin bazislik xassələri funksiyaların Lebeq və çəkili Lebeq (bəzi hallarda hətta Sobolev) fəzalarında Ю.А. Казьмин, А.Н. Барменков, А.М.Седлецкий, Е.И.Моисеев, Г.Г.Девдариани, А.Н.Барменков, Б.Т.Билалов, С.Г.Велиев və digər müəlliflərin işlərində kifayət qədər yaxşı öyrənilmişdir. Qeyd edək ki, məşhur «$\frac{1}{4}$-Kadets» teoremi bu istiqamətlə əlaqədardır. Bu teorem Hilbert fəza halına aiddir, daha doğrusu, o, L_2 fəzasında doğrudur. Lakin $p \neq 2$, olduqda bu teoremin müəyyən analoqları mövcuddur. Bu konteksdə dəyişən $p(\cdot)$ halına baxılmamışdır. Bu səbədən dissertasiya işində alınan nəticələri ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında «$\frac{1}{4}$-Kadets» teoreminin analoqları hesab etmək olar.

Elementlərin ayrılış məsələləri əsasən approksimasiya, bazislər və freymlər nəzəriyyəsində öyrənilir. Təbiət elmlərinin müxtəlif sahələrində tətbiq nöqteyi nəzərdən freymlərə olan maraq son zamanlar xeyli artmışdır. Freym anlayışı öz başlanğıcını Duffin və Schaeffer işindən götürmüşdür. Bu işdə həyəcanlanmış eksponent sistemindən ibarət freymlər öyrənilmiş, eləcə də abstrakt Hilbert fəzasında freym anlayışı daxil edilmiş və onun əsas xassələri öyrənilmişdir. Freymlər haqqında daha geniş məlumatı Ch. Heil, Young R., O.Christensen və digər monoqrafiyalardan əldə etmək olar.

İşin məqsədi. Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan müəyyən kəsilən diferensial operatorun məxsusi funksiyalarından ibarət sistemlərin bazisliyinin, eləcə də banax fəzalarında ayrılış məsələlərinin öyrənilməsindən ibarətdir.

Elmi yenilik. İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- tam və minimal sistemin doğurduğu bir Banax fəzasına baxılmış, bu sistemin həmin fəzada monoton bazis təşkil etdiyi isbat edilmişdir;

- $L_p(-\pi,\pi)$ fəzasına kəsilməz daxil olan $L_p(l_r)$ Banax fəzasına baxılmış, $E \equiv \{e^{\text{int}}\}_{n\in Z}$ eksponent sisteminin $p \in (1,+\infty)$ olduqda $L_p(l_r)$ fəzasında bazis təşkil etməsi; $p=1$ və $\forall r \in [1,+\infty]$ olduqda isə tam və minimal sistem olması isbat edilmişdir;
- əgər Banax fəzasının ixtiyari elementi müəyyən sistem üzrə ayrılırsa və sonlu sayda element çıxarıldıqdan sonra bu sistem tamdırsa, onda istənilən elementin də yeni sistem üzrə ayrılışa malik olduğu isbat edilmişdir;

- Banax fəzalarının düz hasilində freym əmələgətirmənin bir üsulu təklif olunmuşdur;

- Banax fəzasında atomar ayrılışa baxılmış, Banax fəzasının alt fəzalarının atomar ayrılışından çıxış edərək Banax fəzasının atomar ayrılışının bir əmələgətirmə üsulu təklif olunmuşdur;
- dəyişən dərəcə və həyəcanlanma üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında həyəcanlanmış kosinus sisteminin bazisliyi isbat olunmuşdur;
- $\mathscr{K}^*$-yaxınlıq anlayışı daxil edilmiş, $\mathscr{K}^*$-yaxın kosinus sistemlərinin ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında bazisliyinin stabilliyi isbat edilmişdir;
- əvvəlki nəticələrdən istifadə edərək ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan bir diferensial operatorun məxsusi funksiyalarından ibarət sistemin bazisliyi isbat edilmişdir.

Tədqiqat metodu. Əsas nəticələrin alınmasında funksional analiz, bazislər, yaxın bazislər və freymlər nəzəriyyəsinin, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin və diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edilmişdir.

Nəzəri və təcrübi əhəmiyyəti. Dissertasiya işinin nəticələri nəzəri xarakter daşıyır. Onlardan yaxınlaşmalar nəzəriyyəsində, freymlər nəzəriyyəsində, diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, diferensial tənliklərin həlli üçün Furye metodunun əsaslandırılması zamanı istifadə etmək olar.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işinin əsas nəticələri: Gəncə Dövlət Universietinin Riyaziyyat-informatika fakültəsinin "Riyazi analiz" kafedrasında (rəhbər f.-r.e.n., dos. B.A. Mustafayev), AMEA RMİ-nin «Qeyri-harmonik analiz» (rəhbər AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. B.T.Bilalov) şöbəsində, AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş "On Actual Problem of Mathematics and Mechanics" beynəlxalq konfransda (Bakı, 2014), Riyazi Analiz, Diferensial Tənliklər və onların Tətbiqləri MADEA-7″ üzrə VII Beynəlxalq Konfrans (Bakı, 2015), "International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators "beynəlxalq konfransda (Bakı, 2016) məruzə olunmuşdur.

Nəşrləri. Dissertasiya işinin əsas nəticələri avtoreferatın sonunda siyahısı verilmiş 8 işdə nəşr edilmişdir.

İşin həcmi və strukturu. Dissertasiya işi girişdən, iki fəsil və 92 adda olan ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin həcmi 125 səhifə təşkil edir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, iki fəsildən və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə dissertasiya işinin mövzusunun aktuallığı əsaslandırılır, aidiyyatı nəticələrin qısa tarixi şərh oluunur və dissertasiyada alınan nəticələrin qısa xülasəsi verilir.

I Fəsil əsasən Banax fəzasında ayrılış məsələlərinə həsr olunmuşdur. Əvvəlcə bu fəsildə növbəti şərhlər üçün lazım olacaq əsas anlayış və faktlar daxil edilmişdir. Müəyyən Banax fəzasında müəyyən tam və ω-xətti asılı olmayan sistemin doğurduğu Banax fəzaları təyin olunmuşdur. Bu fəzalarda bazislik məsələlərinə baxılmışdır. Eləcə də Lebeq fəzasında bütün oxda eksponent sisteminin bazislik məsələsinə baxılmışdır. Banax fəzasının elementinin bu fəzada tam olan sistem üzrə ayrılışı haqqında abstrakt teoremlər isbat olunmuşdur.

1.1 yarımfəslində dissertasiyada istifadə olunacaq zəruri anlayış və məlumatlar, bazislər və yaxın bazislər nəzəriyyəsinin müəyyən əsas anlayış və faktlarları daxil edilmişdir. Dissertasiyanın oxunaqlığı üçün bu istiqamətin bəzi anlayışlarını daxil edək.

X B-fəzalarında $\{x_n\}_{n\in N}$ bazisi üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödəndikdə

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n\right\| \le \left\|\sum_{n=1}^{m+p}\lambda_n x_n\right\|, \ \forall m, p \in N,$$

$\{x_n\}_{n\in N}$ monoton bazis adlanır.

Tutaq ki, X müəyyən B-*fəza və* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ – $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ qoşma sisteminə malik minimal sistemdir. Tutaq ki, $\mathscr{K}$ – skalyarlardan təşkil olunmuş ardıcıllıqların müəyyən B-fəzasıdır.

Əgər $\forall x \in X$, $\{x_n^*(x)\}_{n\in N} \in \mathscr{K}$ olarsa, onda deyəcəyik ki, $\{x_n\}_{n\in N}$ sistemi $\mathscr{K}$-xassəsinə malikdir.

Freymlər nəzəriyyəsindən bəzi anlayış və faktları daxil edək. Əvvəlcə atomar ayrılış anlayışını müəyyən edək.

Tərif 1. *Tutaq ki, X $B-$fəzadır və $\mathscr{K}$ skalyarlardan təşkil olunmuş ardıcıllıqların $B-$fəzasıdır. Tutaq ki, $\{f_k\}_{k\in N} \subset X$, $\{g_k\}_{k\in N} \subset X^*$. Aşağıdakı şərtlər ödəndikdə $(\{g_k\}_{k\in N}; \{f_k\}_{k\in N})$ sistemi X fəzasının $\mathscr{K}$-ya nəzərən atomar ayrılışı adlanır:*

(i) $\{g_k(f)\}_{k\in N} \in \mathscr{K}$, $\forall f \in X$;

(ii) $\exists A, B > 0 : A\|f\|_X \le \left\|\{g_k(f)\}_{k\in N}\right\|_{\mathscr{K}} \le B\|f\|_X$, $\quad \forall f \in X$;

(iii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(f) f_k$, $\forall f \in X$.

Freym anlayışı atomar ayrılış anlayışının ümumiləşməsidir.

Tərif 2. *Tutaq ki, X $B-$fəzadır və $\mathscr{K}$ skalyarlardan təşkil olunmuş ardıcıllıqların $B-$fəzasıdır. Tutaq ki, $\{g_k\}_{k\in N} \subset X^*$ və $S : \mathscr{K} \to X$ müəyyən məhdud operatordur. Aşağıdakı şərtlər ödəndikdə, $(\{g_k\}_{k\in N}; S)$ cütünə X fəzasında $\mathscr{K}$-ya nəzərən Banax freymi deyilir:*

(i) $\{g_k(f)\}_{k\in N} \in \mathscr{K}$, $\forall f \in X$;

(ii) $\exists A, B > 0 : A\|f\|_X \le \left\|\{g_k(f)\}_{k\in N}\right\|_{\mathscr{K}} \le B\|f\|_X$, $\quad \forall f \in X$;

(iii) $S\left[\{g_k(f)\}_{k\in N}\right]=f, \ \forall f\in X$.

1.2 yarımfəslində müəyyən Banax fəzasının cırlaşmayan sisteminin doğurduğu Banax fəzasına baxılır. Göstərilmişdir ki, baxılan fəzada bu sistemin tam və minimal olduğu halda (hətta əgər bu sistem bazis təşkil etmirsə) o, onun vasitəsilə qurulan fəzada bazis təşkil edir. Eləcə də bütün oxda çəkili fəzada eksponent sistemdən ibarət bazis misalına baxılmışdır. Bu yarımfəsildə alınan bəzi nəticələri daxil edək. Bizə elementlər sisteminin əmsallar fəzası anlayışı lazım olacaqdır.

Tutaq ki, $X-B$-fəza və $\vec{x}\equiv\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ müəyyən sistemdir. $x_n\neq 0, \forall n\in N \Leftrightarrow \vec{x}\neq 0$ olduqda bu sistemi cırlaşmayan adlandıracağıq. Fərz edək ki

$$\mathscr{K}_{\vec{x}}\equiv\left\{\vec{\lambda}\equiv\{\lambda_n\}_{n\in N}\subset K: \ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n \ \ X\text{-da yığılır}\right\}.$$

$\mathscr{K}_{\vec{x}}$ *-da norma təyin edək*

$$\left\|\vec{\lambda}\right\|_{\mathscr{K}_{\vec{x}}}=\sup_m\left\|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n\right\|.$$

Tutaq ki, X müəyyən B-fəzadır, $\vec{x}\equiv\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ isə bu fəzada $\vec{x}^*\equiv\{x_n^*\}_{n\in N}\subset X^*$ tam qoşma sisteminə malik tam və minimal sistemdir. Fərz edək ki

$$\widetilde{X}_p\equiv\left\{x\in X:\{x_n^*(x)\}_{n\in N}\in l_p\right\}, 1\leq p\leq+\infty .$$

Asanlıqla görmək olar ki, $\widetilde{X}_p$:

$$\|x\|_p=\left\|\{x_n^*(x)\}_{n\in N}\right\|_{l_p}\equiv\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^*(x)\right|^p\right)^{1/p}, 1\leq p<+\infty ,$$

$$\|x\|_\infty\equiv\sup_n\left|x_n^*(x)\right|, \ p=\infty ,$$

normasına malik normalı fəzadır. $\widetilde{X}_p$ fəzasının $\|\cdot\|_p$ normasına nəzərən doldurulmasını X_p ilə işarə edək. Aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem 3. *Tutaq ki,* $\vec{x}$ X B*-fəzasında tam və tam qoşmaya malik minimal sistemdir,* X_p- *onun doğurduğu* $\|\cdot\|_p$, $1\leq p<+\infty$, *normasına malik* B *-fəzadır . Onda bu sistem* X_p *fəzasında monoton bazis təşkil edir.*

Aşağıdakı teorem həmçinin doğrudur.

Teorem 4. *Tutaq ki,* $\vec{x}$ X B *-fəzasında tam və minimal sistemdir,* X_p *− onun doğurduğu* B *-fəzadır,* $p \in [1, +\infty)$*. Onda:*

$$X \subset X_p \Rightarrow \mathcal{K}_{\vec{x}} \subset l_p \text{, } u \ \ X_p \subset X \Rightarrow l_p \subset \mathcal{K}_{\vec{x}} .$$

Əgər $X \equiv X_p$ *olarsa, onda aydındır ki,* $\mathcal{K}_{\vec{x}} \equiv l_p$ *və* $\vec{x}$ *sistemi* X *fəzasında bazis təşkil edir.*

1.3 yarımfəslində $L_p(-\pi, \pi)$ fəzasına kəsilməz daxil olan $L_p(l_r)$ funksional fəzasına baxılır. Tutaq ki, $L_p \equiv L_p(-\pi, \pi)$, $1 \le p \le +\infty$, funksiyaların adi Lebeq fəzasıdır. $\hat{f} \equiv \{f_n\}_{n \in Z}$, ilə $f \in L_p$ funksiyasının Furye obrazını işarə edəcəyik, yəni

$$f_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{int}} dt, n \in Z .$$

Tutaq ki, $l_r \equiv \left\{ \{a_n\}_{n \in Z} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^r < +\infty \right\}$. Fərz edək ki

$$L_p(l_r) \equiv \left\{ f \in L_p : \hat{f} \in l_r \right\},$$

harada ki, $r \in [1, +\infty]$ − müəyyən ədəddir və $L_p(l_r)$ fəzasında $\|\cdot\|_{r;p}$ normasını qəbul edək:

$$\left\|\hat{f}\right\|_{r;p} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^r \right)^{1/r} + \|f\|_p \equiv \left\|\hat{f}\right\|_{l_r} + \|f\|_p ,$$

burada $\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$. Tamamilə aşkardır ki, $L_p(l_r)$ fəzası xətti, normalı fəzadır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Теорема 5. $E \equiv \left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n \in Z}$ *eksponent sistemi* $p \in (1, +\infty)$ *olduqda* $L_p(l_r)$ *fəzasında bazis təşkil edir;* $p = 1$, $\forall r \in [1, +\infty]$ *olduqda isə tam və minimaldır.*

Aşağıdakı teorem də doğrudur.

Teorem 6. *Eksponent sistemi $r \in [1,2]$ olduqda $L_1(l_r)$ fəzasında bazis təşkil edir.*

Tamamilə aşkardır ki, $L_2(l_2) \equiv L_2$.

1.4 yarımfəslində $\|\cdot\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\cdot\|_{(k)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < +\infty$, normasına malik $X_{(k)}$ hesabi sayda Banax fəzalarının düz cəminə baxılır.

Bu yanaşmanın

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_R |f(t)|^p \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

normasına malik $L_{p,\rho}(R)$ çəkili Lebeq fəzası misalında realizasiyasına baxacağıq, burada $\rho -$müəyyən çəki funksiyasıdır. Fərz edək ki, $I_n = [2n\pi, 2(n+1)\pi)$, $n \in Z$, və $\chi_n(t) = \chi_{I_n}(t) - I_n$ yarımintervalının xarakteristik funksiyasıdır. Tutaq ki

$$e_{nk}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_n(t) e^{ikt} \ , \ n,k \in Z .$$

Fərz edək ki, $\rho(t)$ çəki funksiyası Makenhoupt tip şərti ödəyir

$$\exists M_n > 0 : \sup_{I \subset I_n} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \rho^{-\frac{q}{p}}(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} < M_n, \ \forall n \in Z , \quad (1)$$

burada $|I| - I \subset [0,2\pi]$ çoxluğunun Lebeq ölçüsüdür. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 7. *Əgər ρ funksiyası (1) Makenhoupt şərtini ödəyərsə, onda $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_n(t) e^{ikt} \right\}_{n,k \in Z}$ sistemi $L_{p,\rho}(R)$, $1 < p < +\infty$, fəzasında bazis təşkil edir.*

1.5 yarımfəslində ixtiyari elementin verilmiş sistem üzrə ayrılma məsələsinə baxılmışdır. İsbat edilmişdir ki, əgər ixtiyari element bu sistem üzrə ayrılırsa və sonlu sayda element çıxarıldıqdan sonra bu sistem tamdırsa, onda istənilən element alınan sistem üzrə də ayrılışa malikdir.

B-fəzalarında ayrılış haqqında freymlərlə bilavasitə əlaqəli olan və müstəqil xarakter daşıyan aşağıdakı teoremi daxil edək.

Teorem 8. *Tutaq ki, X müəyyən B-fəzadır və istənilən X elementi $\{x_n\}_{n\in Z_+}\subset X$ sistemi üzrə ayrılışa malikdir. Əgər $\{x_n\}_{n\in N}$ sistemi X fəzasında tamdırsa, onda istənilən X elementi $\{x_n\}_{n\in N}$ sistemi üzrə ayrılışa malikdir.*

II Fəsil ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında atomar ayrılış və bazis məsələlərinə həsr olunmuşdur. Banax fəzasının alt fəzalarının atomar ayrılışlarından fəzanın atomar ayrılışının alınması üçün bir üsul verilir. Bu fəsildə Kadets tip bir nəticə verilir, məhz $\mathscr{K}$-dan olan skalyarlar ardıcıllığının müəyyən Banax fəzasının doğurduğu $\mathscr{K}$-yaxınlıq anlayışı müəyyən edilir. Ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında kosinus sistemlərindən ibarət bazislərin ekvivalentlik məsələlərinə baxılır. Fəsilin sonunda ümimiləşmiş Lebeq fəzasında ikinci tərtib kəsilən diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş elementlərindən ibarət sistemin bazisliyi qurulur.

2.1 yarımfəslində Banax fəzasında atomar ayrılışa baxılmışdır. Banax fəzasının alt fəzalarının atomar ayrılışından çıxış edərək Banax fəzasının atomar ayrılışının bir əmələgəlmə üsulu təklif olunur. Onlar arasında müəyyən əlaqələr qurulur.

2.2 yarımfəslində həyəcanlanmış kosinus sisteminə baxılır. $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəsi və həyəcanlanma üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ Lebeq fəzalarında bu sistemin bazisliyi isbat olunur. Alınan nəticələr $p(\cdot)=p=const$ halı üçün analoji nəticələri ümumiləşdirir.

Tutaq ki, $p:[-\pi,\pi]\to[1,+\infty)$ – Lebeq mənada ölçülən müəyyən funksiyadır. Fərz edək ki

$$WL_0 \overset{def}{\equiv} \left\{p:\exists C>0,\quad \forall t_1,t_2\in[0,\pi]:|t_1-t_2|\le\frac{1}{2}\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow|p(t_1)-p(t_2)|\le\frac{C}{-\ln|t_1-t_2|}\right\}.$$

$q(\cdot)$ ilə hər yerdə $p(\cdot)$ funksiyasına qoşma funksiyanı işarə edəcəyik: $\frac{1}{p(t)}+\frac{1}{q(t)}\equiv 1$. Qəbul edək $p^{-}=\inf\limits_{[-\pi,\pi]} vrai\, p(t)$.

Aşağıdakı tərifi qəbul edək.

Tərif 9. *İstənilən sonlu $\{c_n\}$ yığımı üçün əgər elə $\delta>0$ varsa ki*

$$\delta\left\|\{c_n\}\right\|_{\mathscr{K}}\leq\left\|\sum c_n\varphi_n\right\|_{L_{p(\cdot)}},$$

bərabərsizliyi ödənsin, onda $\{\varphi_n\}_{n\in Z_+}\subset L_{p(\cdot)}$ sistemi $\mathscr{K}$-Hilbert sistemi adlanır.

Tutaq ki, $\mathscr{K}$ $\|\cdot\|_{\mathscr{K}}$ normasına malik müəyyən K-fəzadır. Fərz edək ki, $\|\cdot\|_{\mathscr{K}}$ norması aşağıdakı şərti ödəyir.

α) *istənilən* $\pi:N\rightarrow N$ *yerdəyişməsi üçün* $\left\|\{\lambda_k\}_{k\in N}\right\|_{\mathscr{K}}=\left\|\{\lambda_{\pi(k)}\}_{k\in N}\right\|_{\mathscr{K}}$.

Eksponent sisteminin tamlığı haqqında məşhur Levinson teoreminin analoqu bu halda da doğrudur.

Teorem 10. *Tutaq ki, $1<p^{-}\leq p^{+}<+\infty$. Əgər $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ fəzasında tam olan $\{e^{i\lambda_k x}\}$ funksiyalar sistemindən n sayda ixtiyari funksiyaları atsaq və onların əvəzinə n sayda digər $e^{i\mu_j x}$, $j=\overline{1,n}$, funksiyalarını əlavə etsək, burada μ_k, $k=\overline{1,n}-\lambda_k$ ədədlərindən heç birinə bərabər olmayan, ixtiyari cüt-cüt müxtəlif kompleks ədədlərdir, onda yeni sistem də $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ fəzasında tam olacaqdır.*

Aşağıdakı teorem həmçinin doğrudur.

Teorem 11. *Tutaq ki, $\{\lambda_n\}_{n\in N}\subset C-$ müxtəlif ədədlərdən ibarət ixtiyari ardıcıllıqdır və $1<p^{-}\leq p^{+}<+\infty$. $\{\cos\lambda_n x\}_{n\in N}$ sistemi $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ fəzasında yalnız və yalnız o zaman tamdlr ki, $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}_{n\in N}$ sistemi $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ fəzasında tam olsun. Əgər müəyyən k_0* üçün *$\lambda_{k_0}=0$, olarsa, onda $e^{i\lambda_{k_0}x}$ və $e^{-i\lambda_{k_0}x}$ funksiyaları əvəzinə uyğun olaraq 1 və x funksiyalarını götürmək lazımdır.*

İndi isə işin əsas nəticəsini şərh edək.

Teorem 12. *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$, *və* $\{\lambda_n ; \mu_n\}_{n \in Z_+} \subset R -$ *müxtəlif ədədlərdən ibarət müəyyən ardıcıllıqdır, hansı ki, müəyyən* $\alpha \in (1, p_0]$ *üçün*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - \mu_n|^{\alpha} < +\infty,$$

doğrudur, burada $p_0 = \min\{2; p^-\}$. *Əgər* $\{\cos \lambda_n x\}_{n \in Z_+}$ *sistemi* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\cos nx\}_{n \in Z_+}$ *sisteminə ekvivalent bazis təşkil edirsə, onda* $\{\cos \mu_n x\}_{n \in Z_+}$ *sistemi də* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\cos nx\}_{n \in Z_+}$ *bazisinə ekvivalent bazis təşkil edir.*

Analoji üsulla aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat olunur.

Teorem 13. *Tutaq ki,* $\{\lambda_n\}_{n \in N}$ *və* $\{\mu_n\}_{n \in N}$ *ardıcıllıqlarına nəzərən Teorem 12-nin bütün şərtləri ödənir. Əgər* $\{\sin \lambda_n x\}_{n \in N}$ *sinus sistemi* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzaasında* $\{\sin nx\}_{n \in N}$ *bazisinə ekvivalent bazis təşkil edirsə, onda* $\{\sin \mu_n x\}_{n \in N}$ *sistemi də* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\sin nx\}_{n \in N}$ *bazisinə ekvivalent bazis təşkil edir.*

2.3 yarımfəslində həyəcanlanmış kosinus sisteminə baxılır. Müəyyən $\mathscr{K}$ əmsallar fəzasının doğurduğu $\mathscr{K}^*$-yaxın sistem anlayışı daxil edilir. Baxılan sistem və $\mathscr{K}$ fəzası üzərinə müəyyən şərtlər daxilində bu sistemlərdən ibarət bazislərin dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında ekvivalentliyi qurulur.Bu nəticə bu istiqamətdə olan məlum nəticələri ümumiləşdirir.

Tutaq ki, $\mathscr{K}$ $\|\cdot\|_{\mathscr{K}}$ normasına malik müəyyən K-fəzadır, bütün finit ardıcıllıqların xətti fəzasını l_0 ilə işarə edəcəyik, daha doğrusu, tutaq ki

$$l_0 \equiv \left\{\{\lambda_n\}_{n \in N} : \exists n_0 \in N \Rightarrow \lambda_k = 0, \forall k \ge n_0\right\}.$$

Fərz edək ki, $\mathscr{K}$ fəzasına qoşma $\mathscr{K}^*$ fəzası da K-fəzadır və *istənilən* $\vec{v} = \{v_n\}_{n \in N} \in \mathscr{K}^*$ funksionalı

$$\vec{v}(\vec{\lambda}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vec{v}_n, \ \forall \vec{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n \in N} \in \mathscr{K},$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Qarşıda fərz edəcəyik ki, $\mathscr{K}$ fəzası aşağıdakı şərtləri ödəyir.

$i)$ istənilən $\pi : N \to N$ *yerdəyişməsi* *üçün* $\left\| \{\lambda_k\}_{k\in N} \right\|_{\mathscr{K}} = \left\| \{\lambda_{\pi(k)}\}_{k\in N} \right\|_{\mathscr{K}}$.

$ii)$ $l_0 \subset \mathscr{K} \wedge l_0 \subset \mathscr{K}^*$.

$iii)$ $\forall \vec{v} = \{v_n\}_{n\in N} \in \mathscr{K}^*$ üçün

$$\left\| \{0;...;v_n;v_{n+1};...\} \right\|_{\mathscr{K}^*} \to 0,\ n \to \infty,$$

doğrudur.

$iv)$ $|\alpha_n| \le |\beta_n|,\ \forall n \in Z_+ \Rightarrow \left\| \{\alpha_n\}_{n\in Z_+} \right\|_{\mathscr{K}^*} \le c \left\| \{\beta_n\}_{n\in Z_+} \right\|_{\mathscr{K}^*}$,

burada $c > 0 -$ *müəyyən sabitdir.*

Teorem 14. *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$; *və* $\{\lambda_n;\mu_n\}_{n\in Z_+} \subset R -$ *müxtəlif ədədlər ardıcıllığıdır. Tutaq ki,* $\mathscr{K}$ $i) - iv)$ *şərtlərini ödəyən müəyyən* K*-fəzadır və* $\{\cos\lambda_n x\}_{n\in Z_+}$ *kosinus sistemi* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\cos nx\}_{n\in Z_+}$ *bazisinə izomorf* $\mathscr{K}$*-Hilbert bazis təşkil edir. Əgər* $\{|\lambda_n - \mu_n|\}_{n\in Z_+} \in \mathscr{K}^*$ *olarsa, onda* $\{\cos\mu_n x\}_{n\in Z_+}$ *sistemi də* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\cos\lambda_n x\}_{n\in Z_+}$ *bazisinə ekvivalent bazis təşkil edir.*

Aşağıdakı nəticəni alırıq.

Nəticə 15. *Tutaq ki,* $p(\cdot) \in WL_0$, $p^- > 1$, *və* $\mathscr{K}$ $i) - iv)$ *şərtlərini ödəyən müəyyən* K*-fəzadır;* $\mathscr{K}_c$ $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\cos nx\}_{n\in Z_+}$ *bazisinin əmsallar fəzasıdır,* $\mathscr{K}_c \subset \mathscr{K}$ *kəsilməz daxilolması doğrudur. Əgər* $\{\cos\lambda_n x\}_{n\in Z_+}$ $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *fəzasında* $\{\cos nx\}_{n\in Z_+}$ *bazisinə izomorf* $\mathscr{K}$*-Hilbert bazis təşkil edirsə və* $\{|\lambda_n - \mu_n|\}_{n\in Z_+} \in \mathscr{K}^*$, *onda* $\{\cos\mu_n x\}_{n\in Z_+}$ *sistemi də* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$, *fəzasında* $\{\cos nx\}_{n\in Z_+}$ *bazisinə izomorf bazis təşkil edir.*

2.4 yarımfəslində sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill diferensial ifadəsinin doğurduğu spektral məsələyə baxılır. Diferensial ifadənin təyin oblastı törəmələri $x = 0$ nöqtəsində birinci növ kəsilməyə malik ola bilən hissə-hissə hamar funksiyalardan ibarətdir. Məhz fərz edəcəyik ki, $l -$ diferenaial ifadəsi

$$l\,y = -y'' + q(x)y,$$

şəkildədir, burada $q(\cdot)\in C[-1,1]-$ müəyyən kompleksqiymətli funksiyadır. Diferensial ifadəyə $p:[-1,1]\to(1,+\infty)$ dəyişən dərəcəli ümumiləşmiş $L_{p(\cdot)}(-1,1)$ Lebeq fəzasında baxılır. l ifadəsinin təyin oblastı olaraq

$$D_l \equiv W^1_{p(\cdot)}(-1,0)\times W^1_{p(\cdot)}(0,1),$$

başa düşəcəyik, burada $W^1_{p(\cdot)}-$ diferensiallanan funksiyaların dəyişən $p(\cdot)$ dərəcəli Sobolev fəzasıdır. l diferensial ifadəsinə nəzərən aşaıdakı spektral məsələyə baxılır

$$(l\,y)(x) = \lambda y(x),\ x\in(-1,0)\cup(0,1),$$

$$y(-1) = y(1) = 0,\quad y(-0) = y(+0),$$
$$y'(-0) - y'(+0) = \lambda m y(0),$$

burada $m\neq 0-$ müəyyən kompleks ədəd, $\lambda-$ spektral parametrdir. Əvvəllər klassik Lebeq fəzalarında bu məsələlərə T.B.Qasımov və Ə.A. Hüseynlinin işlərində baxılmışdır. Onlar tərəfindən bu məsələnin məxsusi funksiyaları və məxsusi qiymətləri üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır. Bundan əlavə onlar $L_p(-1,1), p\in(1,+\infty)$, fəzasında bu məsələnin məxsusi funksiyalarından ibatər sistemin bazis xassələrini öyrənmişlər. Bizim məqsədimiz bu nəticələri $L_{p(\cdot)}(-1,1)$ fəza halına köçürməkdir. Tutaq ki

$$\gamma_n = \left\{|\rho| = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ 0\le \arg\rho\le\pi\right\}.$$

Γ_n ilə $\lambda=\rho^2$ inikas zamanı γ_n konturunun obrazını işarə edək. Məxsusi qiymətlər üçün asimptotik düsturdan çıxır ki, n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində Γ_n çevrəsi L operatorunun requlyar nöqtələri çoxluğunda yerləşir və iki qonşu Γ_n və Γ_{n+1} çevrələri arasında L operatorunun dəqiq iki məxsusi qiyməti yerləşir (onların cəbri tam bölünməsini nəzərə almaqla).

Kifayət qədər böyük n üçün (o qədər böyük ki, Γ_n çevrəsi tamamilə requlyar nöqtələr çoxluğunda yerləşsin) Riss proyektoruna baxaq

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} R_\lambda d\lambda .$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 16. *L operatorunun* $\{P_n\}$ *Riss proyektorlar ardıcıllığı müntəzəm məhduddur, daha doğrusu* $\sup_n \|P_n\| < +\infty$.

Bu yarımfəslin əsas nəticəsini ifadə edək.

Teorem 17. *L operatorunun məxsusi və qoşulmuş elementlərindən ibarət sistem* $L_{p(\cdot)}(-1, 1)\oplus \mathbb{C}$ *fəzasında blok-bazis təşkil edir, daha dəqiq desək, cüt-cüt yaxın məxsusi qiymətlərə cavab verən məxsusi və qoşulmuş elementlərdən ibarət ikiölçülü fəza təşkil edir.*

Sonda müəllif elmi rəhbəri AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. Bilal T.Bilalova məsələnin qoyuluşu və işə olan daimi diqqətinə görə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Hashimov Ch.M. On bases in Banach spaces. American Journal of Mathematics and Statistics 2013, 3(6): 421-427
2. Bilalov B.T., Hashimov Ch.M. On Decomposition In Banach Spaces. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan Volume 40, Number 2, 2014, pp. 97–106
3. Ismailov A.I., Hashimov Ch.M. On Decomposition In Banach Spaces. On Actual Problem of Mathematics and Mechanics, International conference devoted to the 55-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, May 15-16, 2014, Baku, Azerbaijan, pp.193-194
4. Muradov T.R., Hashimov Ch.M. On bases from cosines in Lebesgue spaces with variable summability index. Journal of Inequalities and Applications 2016, 2016 :3 (4 January 2016)
5. Gasymov T.B., Hashimov Ch.M. On an atomic decomposition in Banach spaces. "Riyazi Analiz, Diferensial Tənliklər və onların Tətbiqləri MADEA-7″ üzrə VII Beynəlxalq Konfrans. 08-13 Sentyabr, 2015, s. 83-84.

6. Sadigova S.R., Hashimov Ch.M. Basicity of a part of exponential system with degenerate coefficients. International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators, May 25-27, 2016, Baku, Azerbaijan, pp. 98-99
7. Kasumov Z.A., Hashimov Ch.M. On the equivalent bases of cosines in generalized Lebesgue spaces. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan Volume 41, Number 2, 2015, pp.70–76
8. Gasymov T.B., Hashimov Ch.M. Atomic decomposition in a direct sum of Banach spaces and their application to discontinuous differential operators. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics V. 4, No 1, 2016, July, pp. 69-78.

ЧИНГИЗ МАМЕД оглы ГАШИМОВ

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО РАЗРЫВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, СОДЕРЖАЩЕГО СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ, В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа посвящена изучению базисности системы из собственных функций одного разрывного дифференциального оператора со спектральным параметром в граничных условиях в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, а также вопросы разложения в банаховых пространствах.

В работе получены следующие основные результаты:

- рассматривается одно банахово пространство, порожденное полной и минимальной системой, доказывается, что эта система образует монотонный базис в нем;
- рассматривается банахово пространство $L_p(l_r)$, которое непрерывно вложено в $L_p(-\pi,\pi)$ и доказана базисность системы экспонент $E \equiv \{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ в нем при $p \in (1,+\infty)$, а при $p=1$ и $\forall r \in [1,+\infty]$ ее полнота и минимальность в нем;
- доказано, что если произвольный элемент банахово пространства разлагается по некоторой системе, и после исключения конечного числа элементов она полна, то произвольный элемент тоже разлагается по новой системе;
- предлагается один способ образования фреймов в прямых произведениях банаховых пространств;
- при определенных условиях на показатель суммируемости и возмущение, доказана базисность возмущенной системы косинусов в обобщенных пространствах Лебега;

- введено понятие $\mathscr{K}^*$-близости и доказана стабильность базисности $\mathscr{K}^*$ -близких систем косинусов в обобщенных пространствах Лебега;
- используя предыдущие результаты, доказывается базисность системы из собственных функциях одного разрывного дифференциального оператора со спектральным параметром в граничных условиях в обобщенных пространствах Лебега.

CHİNGİZ MAMED oglu HASHİMOV

ON BASICITY OF EIGENFUNCTIONS OF ONE DISCONTINUOUS DIFFERENTIAL OPERATOR CONTAINING THE SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS IN GENERALİZED LEBESGUE SPACE

SUMMARY

This thesis is focused on the study of basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous differential operator with a spectral parameter in the boundary conditions in Lebesgue spaces with variable summability and also decomposition problems in Banach spaces.

The following results are obtained:

- considered a Banach space generated by the complete and minimal system, it is proved that this system forms a monotone basis therein;
- Banach space $L_p(l_r)$, which is continuously embedded in $L_p(-\pi,\pi)$ is considered and for $p \in (1,+\infty)$ the basicity of the system of exponents $E \equiv \{e^{\mathrm{int}}\}_{n \in Z}$ is proved in it , and for $p = 1$ and $\forall r \in [1,+\infty]$ its completeness and minimality are established in this space;
- it is proved that if the arbitrary element of a Banach space can be expanded with respect to some system and if this system becomes complete after exclusion of a finite number of elements, then the arbitrary element can be expanded with respect to the resulting system, too.
- a method for constructing frames in a direct products of Banach spaces is presented;
- under certain conditions on the summability index and perturbation, the basicity of perturbed system of cosines is proved in generalized Lebesgue spaces;
- the concept of $\mathscr{K}^*$-closeness is introduced and the stability of basicity of $\mathscr{K}^*$-close cosines systems is proved in generalized Lebesgue spaces;

- using previous results the basicity of systems of eigenfunctions of one discontinuous differential operator with a spectral parameter in the boundary conditions in generalized Lebesgue spaces is proved.