

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ  
BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ  
TƏTBİQİ RİYAZİYYAT ELMİ TƏDQIQAT İNSTİTUTU**

---

*Əlyazması hüququnda*

**HÜSEYNOVA NƏRGİZ ŞAMİL QIZI**

**ELEMENTAR ZƏRRƏCIKLƏRLƏ BAĞLI MODELƏR  
VƏ ONLARIN İDARƏ EDİLMƏSİ**

3338.01 – Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün  
təqdim edilmiş dissertasiyanın

**AVTOREFERATI**

**BAKİ - 2016**

Dissertasiya işi Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri İnstitutunda və BDU-nun Tətbiqi Riyaziyyat Elmi Tədqiqat İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

**Elmi rəhbər:**

Texnika elmləri doktoru

**M.M. Mütəllibov**

**Rəsmi opponentlər:**

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

**H.F. Quliyev**

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

**Ş.M. Nağıyev**

**Aparıcı təşkilat:** Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti, “İstehsal proseslərinin avtomatlaşdırılması” kafedrası

Müdafiə “01” mart 2016-cı il tarixdə saat 14<sup>00</sup>-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.017 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1148, Bakı ş., Zahid Xəlilov küçəsi, 23.

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat 29 yanvar 2016-cı il tarixində göndərilmişdir.

**FD.02.017 Dissertasiya  
Şurasının elmi katibi**

**t.e.d. M.M. Mütəllibov**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı:** Nəzəri fizikanın və eləcə də kvant mexanikasının əsas məsələlərindən biri bəzi fiziki maraq kəsb edən potensiallar üçün dalğa tənliklərinin analitik həll edilməsidir. Belə ki, dalğa tənliklərini həll etməklə əldə olunan dalğa funksiyalarından kvant obyektləri haqqında mühüm məlumatları almaq mümkündür. Ona görə də Şredinger və Klein-Fok-Qordon tənliklərinin analitik və ədədi həlli ciddi əhəmiyyət kəsb edir. Belə məsələlərin həlli istiqamətində S.Fluggenin işini qeyd etmək olar.

Xarici sahələrdə, xüsusilə xarici maqnit sahəsində dalğa tənliklərinin analitik və ədədi həllərinin tapılması və onların üzərində kvant ədədlərindən asılılığı müəyyənləşdirən optimal həllərin qurulması, enerji spektrinin optimal idarə olunması olduqca vacib və maraqlı məsələlərdəndir.

Müxtəlif potensiallı sahələr üçün enerji spektri praktiki maraq kəsb etdiyindən ixtiyari parametərə nəzərən enerjinin məxsusi qiymətlərinin xassələrinin öyrənilməsi çox vacib və aktualdır.

Digər tərəfdən belə tənliklər üçün qoyulmuş müxtəlif tip tərs məsələlər ciddi praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Dalğa tənliyinin potensialının qurulması ilə bağlı tərs məsələnin həlli ciddi problemlərdən biridir. Qeyd edək ki, bu tip məsələlərin həlli ilə F.Ə.Əliyev, A.A.Niftiyev, Y.S.Qasimov və b. məşğul olmuşlar.

Optimal idarəetmə məsələləri, xüsusilə dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələləri tətbiqi fizikanın, riyazi fizikanın, yüksək texnologiyanın və eləcə də nano texnologiyanın əsasında dayanan mühüm məsələlərdən biridir. Hal-hazırda yüksək texnologiyada kvant nöqtələrinin alınması və onların idarə olunması optimal idarəetmənin aktual problemlərindəndir. Bu tip məsələlərin həlində S.V. Yemelyanov, İ.E. Kazakov, K.A. Rıbakov, C.A. Ağayeva və Q.U. Abışovun işlərini qeyd etmək olar.

Dissertasiya işində qarşıya qoyulan problemi həll etmək üçün müxtəlif metodlardan və yanaşmalardan istifadə olunur.

Bunları nəzərə alaraq dissertasiya işi yuxarıda qeyd etdiyimiz yüksək və həssas texnologiyalar üçün olduqca vacib olan atomlar sisteminin alınması və onların tətbiq olunan sistemlərdə enerji spektrlərinin və dalğa

funksiyalarının optimal idarə olunması baxımından kifayət qədər aktual problemə həsr olunub.

**İşin əsas məqsədi:** Dissertasiya işinin məqsədi aşağıdakı əsas məsələlərin həllindən ibarətdir:

- Vud-Sakson, Manninq-Rozen və Rinq-Şaped potensiallı sahələrdə Şredinger tənliyini, həmçinin sabit bircins maqnit sahəsində hərəkət edən zərrəcik üçün Klein-Fok-Qordon tənliyini həll edərək enerji spektrinin və dalğa funksiyalarının alınması;
- Radial dalğa tənliyinin həlli vasitəsi ilə enerjinin məxsusi qiymətinin parçanın uclarından asılılığın öyrənilməsi;
- Xarici maqnit sahəsində dalğa tənliklərinin enerji spektrinin kvant ədədlərindən asılılığını müəyyənləşdirən optimal həllərin qurulması;
- Potensiala nəzərən tərs məsələ həll edilməklə optimal potensial üçün analitik ifadənin alınması;
- Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinin həllinin qurulması və əks əlaqənin öyrənilməsi;
- Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həlli üçün həll alqoritmlərinin işlənilib hazırlanması.

**Tədqiqat üsulları:** İşdə diferensial tənliklər, Pekeris yaxınlaşması, Nikiforov-Uvarov üsulu, hesablama üsulları nəzəriyyələrinin metodlarından, müasir proqramlaşdırma və hesablama texnologiyalarından və tətbiqi proqram paketlərindən istifadə olunmuşdur.

#### **Elmi yenilik:**

- Vud-Sakson potensial sahəsində Şredinger tənliyinin əlaqəli hallarının enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaları analitik şəkildə tapılmışdır.
- Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün standart Vud-Sakson potensialı sahəsində enerjinin məxsusi qiymətlərinin sayının məhdud olduğu tapılmışdır.
- Maninnq-Rosen və Rinq-Şaped potensialının mərkəzi hissəsinə yeni yaxınlaşma sxemi tətbiq edərək, orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  qiymətləri üçün Şredinger tənliyini Nikiforov–Uvarov üsulu ilə həll edərək, radial, azimutal dalğa funksiyaları və enerjinin məxsusi qiymətləri tapılmışdır.
- Göstərilmişdir ki, Maninnq-Rosen və Rinq-Şaped potensialı  $\beta = \beta' = 0$  olduqda Manninq-Rosen potensialına,  $\alpha = 0$  və ya  $\alpha = 1$

olduqda isə  $\delta = 1/b$ ,  $A = 2b$  şərtində  $l \geq |m|$  halları üçün Hülten potensialına çevrilir.

- Sabit bircins maqnit sahəsində hərəkət edən ikiölçülü pion atomunun relyativistik enerji spektrinə maqnit sahəsinin əlavəsinin qeyri-relyativistik enerji spektrinə olan düzəlişdən fərqli olduğu müəyyən edilmişdir.
- Hissəciyin neytral sahədə hərəkəti zamanı enerjinin parçanın uclarına nəzərən məxsusi qiymətlərinin xüsusiyyətləri öyrənilmiş və törəmə üçün düstur tapılmışdır. Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi tədqiq edilmiş, funksionalın birinci variasiyası və onun artımı hesablanmışdır. Funksionalın gradiyenti üçün analitik ifadə alınmış və göstərilmişdir ki, müəyyən şərtlər daxilində funksional diferensiallandıdır.
- Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həlli üçün həll alqoritmləri qurulmuş və qradiyentin proyeksiyası üsulu ilə baxılan məsələ həll edilmişdir.

**İşin elmi və praktiki əhəmiyyəti:** Dissertasiya işində alınmış nəticələr müxtəlif optimal idarəetmə məsələlərinin, xüsusilə dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələlərinin analitik və ədədi həllərində; tətbiqi fizikanın, riyazi fizikanın, o cümlədən kvant nöqtələrinin enerji spektrlərinin və dalğa funksiyalarının hesablanmasında, həmçinin kvant nöqtələrinin tədqiqində və nanotexnologiyanın əsasında dayanan mühüm məsələlərin həllində istifadə oluna bilər.

**Alınmış nəticələrin dürüstlüyü:** Dissertasiyanın bütün əsas nəticələri riyazi olaraq ciddi isbat olunub. Təklif olunan alqoritmlər misallar üzərində realizə olunub və məlum nəticələrlə müqayisə olunaraq, onların dürüstlüyü və effektivliyi nümayiş etdirilib.

**İşin aprobeasiyası:** Dissertasiyada alınmış nəticələr aşağıdakı seminar və konfranslarda məruzə edilmişdir:

- The Third International Conference “Differential Equations and Applications”, June 12-17, 2000, Saint-Petersburg.
- Conference on “Modern Problems in Applied Mathematics” dedicated to the 90-th anniversary of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University (TSU) and 40-th anniversary of I. Vekua Institute of Applied Mathematics (VIAM) of TSU, 2008.

- 16<sup>th</sup> International Conference on Computational Mechanics and Advanced Applied, Alushta, 2009.
- Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, 2009.
- International Conference on Functional Analysis Dedicated of 90<sup>th</sup> Anniversary of V.E. Lyantse, Lvov, Ukraine, November 17-21, 2010.
- International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russia, 2010.
- International Conference of Applied Mathematics, North University of Baia-Mare, Romania Faculty of Science, Department of Mathematics and Computer Science, 2010.
- The 4<sup>th</sup> Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), Baku, Azerbaijan, 2011.
- V Congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2014.
- V International Conference on Optimization Methods and Applications, Petrovac, Montenegro, September 2014.
- BDU-nun Tətbiqi Riyaziyyat İnstitutunun elmi seminarı.

**Çap olunmuş elmi əsərlər:** Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin 8 məqaləsində və 9 tezisində çap olunmuşdur.

**Dissertasiyanın həcmi və strukturu:** Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən, yekun nəticədən, istinad olunan 90 ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işi 119 çap vərəqindən ibarətdir.

## **DİSSERTASIYANIN MƏZMUNU**

Giriş hissəsində dissertasiya mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış və işin qısa xülasəsi verilmişdir.

Dissertasiyanın birinci fəslində bəzi dalğa tənliklərinin analitik və ədədi həlləri və onların həllində tətbiq olunmuş üsullar ətraflı şərhləndirilmişdir.

Birinci fəslin birinci yarımfəslində ikinci tərtib xüsusi törəmli diferensial tənliklərin həllində istifadə olunan Nikiforov-Uvarov üsulu geniş şərhləndirilmiş və onun tətbiq olunma meyarları göstərilmişdir. Dalğa tənliklərinin mərkəzi və qeyri mərkəzi potensiallar üçün analitik və ədədi həllərində Nikiforov-Uvarov metodunun tətbiqi kifayət qədər ciddi və

dəqiq nəticə almağa imkan yaradır. Bu üsul ikinci tərtib xətti differensial tənliklərin ümumiləşmiş hiperhəndəsi tip tənliklərə gətirilməsinə əsaslanır və belə ki, alınan ikinci tərtib bircins diferensial tənliyin çoxhədlilərinin dərəcəsi başlanğıc tənliyin tərtibini aşmır.

Nəzəri və riyazi fizikanın bir sıra mühüm məsələləri aşağıdakı dəyişən əmsallı xətti diferensial tənliklə təsvir olunur

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0. \quad (1)$$

Müxtəlif əyrixətli koordinat sistemlərində Laplas və Helmholtz tənlikləri, bəzi potensial sahələrdə - sferik-simmetrik sahədə, Kulon potensial sahədə, maqnit sahəsində kvant harmonik ossilyatoru məsələləri zərrəciyin hərəkətini öyrənən Şredinger, Dirak, Kleyn-Qordon tənlikləri (1) tənliyinə gətirilir.

Dissertasiyanın birinci fəslinin ikinci yarımfəslində Vud-Sakson potensial sahə üçün radial Şredinger tənliyini analitik həll edərək enerji spektri və sistemin dalğa funksiyası tapılmışdır. Belə məsələlərin həlli istiqamətində S. Fluggenin işini qeyd etmək olar. S. Flugge orbital kvant ədədinin ixtiyari  $l=0$  qiymətlərində tənliyin analitik həllini almış, enerji spektrini isə qrafiki yolla tapmışdır.  $l \neq 0$  halında bu tənliyi analitik həll etmək mümkün deyil, ona görə də hesablamalar orbital kvant ədədinin ixtiyari  $l \neq 0$  qiymətlərində Pekeris yaxınlaşmasından istifadə etməklə mərkəzəqaçma potensialına Nikiforov-Uvarov üsulunun tətbiqi ilə aparılmışdır. Enerjinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaları  $n_r$  və  $l$  kvant ədədlərinin müxtəlif qiymətləri üçün tapılmışdır. Radial kvant ədədi  $n_r$  üçün alınmış bərabərsizlik enerji spektri üçün müəyyən məhdudiyətlər qoyur, yəni məhdud sayda enerji spektri alınır.

Birölcülü Şredinger tənliyi Nikiforov-Uvarov üsulundan istifadə edilərək aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$\psi''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\psi'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\psi(z) = 0. \quad (2)$$

$$\psi(z) = \Phi(z)y(z) \quad (3)$$

əvəzləməsini aparsaq

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad (4)$$

şəkilli hiperhəndəsi tənliyi alırıq.

Vud -Sakson potensialı üçün radial Şredinger tənliyi

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E + \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} \right] R - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (5)$$

şəkindədir. Yeni  $u(r) = rR(r)$  funksiyası daxil etsək

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E + \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u(r) = 0 \quad (6)$$

olar.

Effektiv Vud - Sakson potensialı aşağıdakı kimidir:

$$V_{eff}(r) = V_l(r) + V_{ws}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}. \quad (7)$$

Mərkəzəqaçma potensialını  $r = R_0$  nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayıraraq, Pekeris yaxınlaşmasından alınmış  $\tilde{V}_{eff}(r)$  effektiv potensialı üçün radial Şredinger tənliyini alırıq:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \delta C_0 + \frac{V_0 - \delta C_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\delta C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right] u = 0. \quad (8)$$

Vud-Sakson potensialı üçün yazılmış Şredinger tənliyində enerjinin dəqiq məxsusi qiymətləri aşağıdakı analitik ifadə ilə təyin olunur:

$$E_{n,r,l} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \left( 1 + \frac{12 a^2}{R_0^2} \right) -$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left\{ \frac{\left[ \sqrt{1 + \frac{192l(l+1)a^4}{R_0^4}} - 2n_r - 1 \right]^2}{16} + \frac{4 \left[ \frac{\mu a^2 V_0}{\hbar^2} - \frac{4l(l+1)a^3}{R_0^3} \right]^2}{\left[ \sqrt{1 + \frac{192l(l+1)a^4}{R_0^4}} - 2n_r - 1 \right]^2} + \frac{\mu V_0 a^2}{\hbar^2} \right\}. \quad (9)$$

Beləliklə, enerji spektri məhduddur, yəni enerjinin məxsusi qiymətləri sonlu saydadır.

Birinci fəslin üçüncü yarımfəslində Şredinger tənliyi Manning-Rozen və Rinq-Şaped potensialı üçün orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  qiymətlərində analitik və ədədil həll edilmişdir.

Bu potensial üçün radial Şredinger tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$x''(r) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{b^2} \frac{Ae^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} - \frac{\lambda}{b^2} \right] \left[ C_0 + \frac{e^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right] \chi(r) = 0.$$

Burada  $s = e^{-r/b}$  əvəzləməsini aparsaq

$$\chi''(s) + \chi'(s) \frac{(1-s)}{s(1-s)} + \left[ \frac{1}{s(1-s)} \right]^2 - \left[ \varepsilon^2(1-s)^2 + As(1-s) - \alpha(\alpha-1)s^2 - (1-s)^2 \lambda \left( C_0 + \frac{s}{(1-s)^2} \right) \right] \chi(s) = 0$$

alarlıq. Nikiforov-Uvarov üsulunu tətbiq edərək enerji spektri

$$E_{n_r, l} = \frac{-\hbar^2}{2\mu b^2} \left[ \left[ n_r + 1/2 + \frac{(l - n_r)(l + n_r + 1) - A}{2\Lambda + 1 + 2n_r} \right]^2 - l(l+1)C_0 \right],$$

və normallaşma sabiti

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{n_r! 2\sqrt{c}(n_r + K + \sqrt{c})\Gamma(2(K + \sqrt{c}) + n_r)}{b(n_r + K)(n_r + 2\sqrt{c} + 1)\Gamma(n_r + 2K)}}$$

tapılır.

Beləliklə, Nikiforov-Uvarov üsulunu tətbiq etməklə Manning-Rozen və Rinq-Şaped potensialı üçün orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  halında, Şredinger tənliyini analitik və ədədi həll edərək, enerji spektri, onun məxsusi qiymətləri və həmçinin məxsusi dalğa funksiyaları tapılmışdır.

Birinci fəslin dördüncü yarımfəslində sabit bir cins maqnit sahəsində hərəkət edən ikiölçülü pion atomu üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyi analitik həll olunmuşdur.  $B$  - maqnit sahəsinin induksiyası və bucaq momentinin hər hansı bir qiymətində relyativistik enerjinin spektri hesablanmışdır.

İki ölçülü məsələyə baxdığımız üçün hesablamaları polyar koordinat  $(r, \theta)$  sistemində aparırıq. Şredinger tənliyini atom vahidlərində ( $\hbar=M=e=1$ ) aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$H\Psi = \frac{1}{2} \left( -i\vec{\nabla} + \frac{1}{2} [\vec{H} \cdot \vec{r}] \right)^2 \Psi - \frac{Z}{r} \Psi = i\partial_t \Psi = E\Psi. \quad (10)$$

Məxsusi funksiyaları aşağıdakı şəkildə daxil etsək

$$\Psi(r) = \frac{\exp(im\theta)}{\sqrt{2\pi}} \frac{R(r)}{\sqrt{r}} \quad (11)$$

və (11) ifadəsini (10)-da nəzərə alsaq, aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \left( m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{\omega_L^2 r^2}{2} - \frac{Z}{r} + m\omega_L - E \right] R(r) = 0.$$

$R(r)$  radial funksiyası maqnit sahəsi olmadığı halda enerji spektri

$$E = c^2 \left[ 1 + \frac{Z^2}{c^2 \left( n - \frac{1}{2} + \sqrt{m^2 - \frac{Z^2}{c^2}} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

maqnit sahəsi olduğu halda enerji spektri

$$\frac{E^2}{c^2} - c^2 = \frac{H}{c} (2n + m + |m| + 1)$$

kimi təyin olunur. Buradan  $E$  - enerjisi üçün

$$E = c^2 \left[ 1 - \frac{4Z^2 \left( 2 + m + \sqrt{m^2 - \frac{Z^2}{c^2}} \right)}{c^2 \left( 2\sqrt{m^2 - \frac{Z^2}{c^2}} + 1 \right)} \right]^{-1/2} \quad (12)$$

ifadəsini alırıq.  $B$  - maqnit sahəsinin induksiyası üçün

$$B = \frac{4E^2 Z^2}{c^3 \left( 1 + 2\sqrt{m^2 - \frac{Z^2}{c^2}} \right)}$$

ifadəsini almış olarıq.

Aparılmış hesablamaların təhlili belə nəticə çıxarmağa imkan verir ki, Kleyn-Fok-Qordon tənliyi Şredinger tənliyindən fərqli olaraq hissəcik maqnit sahəsində olanda enerjinin  $s=0$  (orbital kvant ədədinin  $l=0$ ) halını təsvir edə bilmir. Aparılan hesablamalar və təhlillər onu deməyə əsas verir ki, sabit maqnit sahəsinin enerjinin relyativist səviyyəsinə düzəlişi maqnit sahəsi  $B > 100qs$  olduqda nəzərə çarpır.

Dissertasiya işinin ikinci fəslində radial dalğa tənlikləri üçün müxtəlif identifikasiya məsələlərinə baxılmışdır.

İkinci fəslin birinci yarımfəslində enerjinin məxsusi qiymətlərinin parçanın uclarından asılılığı öyrənilmişdir. Daha doğrusu, hissəciyin neytral sahədə hərəkəti zamanı enerjinin məxsusi qiymətlərinin parçanın uçlarına nəzərən diferensiallanan olub-olmaması öyrənilmiş və törəmənin düsturu tapılmışdır. Bu düstur enerjinin məxsusi qiymətlərinin müxtəlif ekstremal xüsusiyyətlərini tədqiq etməyə imkan verir.

Zərrəciyin mərkəzi sahədə hərəkəti aşağıdakı tənliklə təsvir olunur:

$$-\frac{a}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{bR}{r^2} + q(r)R = ER.$$

Tənliyi  $r^2$ -ə vurub,  $Q(r)=b+q(r)r^2$  əvəzləməsini qəbul etsək, onda aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$-a \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + Q(r)R = Er^2 R. \quad (13)$$

(13) tənliyini məhdud  $0 < s_1 < s_2$   $[s_1, s_2]$  parçasında  $R(s_1)=0$ ,  $R(s_2)=0$  sərhəd şərtləri ilə nəzərdən keçirsək, spektral məsələ alırıq.

Qeyd edək ki, enerjinin məxsusi qiymətləri aşağıdakı kimi hesablanır:

$$E(s) = \inf_R \frac{J_1(s)}{J_2(s)}, \quad J_1(s) = \int_{s_1}^{s_2} \left[ ar^2 \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 + Q(r)R^2 \right] dr, \quad J_2(s) = \int_{s_1}^{s_2} r^2 R^2(r) dr. \quad (14)$$

**Teorem 1.**  $E = E(s_1, s_2)$  funksiyası  $S$  parçasında  $s_1$  və  $s_2$  -yə görə diferensiallandıdır və

$$\frac{\partial E}{\partial s_1} = as_1^2 \left( \frac{\partial R(s_1)}{\partial r} \right)^2, \quad \frac{\partial E}{\partial s_2} = -as_2^2 \left( \frac{\partial R(s_2)}{\partial r} \right)^2 \quad (15)$$

ifadəsi doğrudur.

**Teorem 2.** Əgər  $Q(r) = b + r^2 q(r) = const$ ,  $q(r) = \frac{c}{r^2}$  olarsa, onda

(13) məsələsinin  $[s_1, s_2]$  parçasında birinci energetik məxsusi ədədi üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$E(s_1, s_2) = \frac{a}{2} \left[ s_2^2 \left( \frac{dR(s_2)}{dr} \right)^2 - s_1^2 \left( \frac{dR(s_1)}{dr} \right)^2 \right].$$

İkinci fəslin ikinci yarımfəslə potensiala nəzərən bir tərs məsələyə həsr olunmuşdur. Burada qoyulan məsələ variational qoyuluşa gətirilərək həll olunur. Tapılan həlldən optimalıq şərti alınır və funksionalın qradienti üçün düstur tapılır. (13) tənliyinə  $[r_1, r_n]$  intervalında baxaq. Burada əsas məqsəd  $[r_1, r_n]$  intervalında  $Q(r)$  potensialını tapmaqdır. (13) tənliyinin həlli  $R(r)$  funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$R(r_0) = z_0, R(r_1) = z_1, R(r_2) = z_2, \dots, R(r_n) = z_n. \quad (16)$$

(13) tənliyini həll etmək üçün (16) şərtlərini variasiya formasında yazaq.

$$J(Q) = \sum_{i=1}^{n-1} [R(r_i) - z_i]^2 \rightarrow \min, \quad (17)$$

onda (16) və (17)-dən aşağıdakı şərtləri alırıq:

$$R(r_0) = z_0, R(r_n) = z_n. \quad (18)$$

Əgər  $Q^* = Q^*(r)$  (13) və (16) məsələlərinin həllidirsə, onda  $Q^* = Q^*(r)$  (13), (17) və (18) variasiya məsələlərinin də həllidir. Həmçinin bunun tərsi də doğrudur.

**Teorem 3.** Fərz edək ki,  $Q^* = Q^*(r)$  (13), (17) və (18) məsələləri üçün optimal potensialdır. Onda ixtiyari  $Q = Q(r) \in U$  üçün aşağıdakı münasibət ödəyir:

$$Q^*(r) \psi^*(r) R^*(r) = \min Q(r) \psi^*(r) R^*(r), \quad \forall r \in [r_0, r_n], \quad Q_0 \leq Q(r) \leq Q_1, \quad (19)$$



edək) parçasında (21) tənliyinin təsvir etdiyi proses müxtəlif rejimlə işləyir. Rejimin dəyişmə nöqtəsini,  $s_1$  elə seçmək lazımdır ki,  $R(r)$  funksiyası əvvəldə verilən  $Z(r)$ -ə yaxın olsun. Aşağıdakı funksionalı minimallaşdıraq:

$$J(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} |R_i(r) - Z_i(r)|^2 dr \rightarrow \min. \quad (26)$$

Burada  $s_0 = r_0$ ,  $s_{n+1} = r$ ,  $s(s_1, s_2, \dots, s_n) \forall \theta \ r_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < r_1$ .  $S$  çoxluğunu bu şəkildə işarə edək:  $S = \{s = (s_1, s_2, \dots, s_n) : r_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < r_1\}$ .

Beləliklə, biz (23)-(25) şərtləri daxilində  $S$  çoxluğunda (26) funksionalının minimallaşdırılması məsələsini almış oluruq.  $n=1$  halında funksional aşağıdakı şəkildə olar:

$$J(s_1) = \alpha_0 \int_{r_0}^{s_1} |R_0(r) - Z_0(r)|^2 dr + \alpha_1 \int_{s_1}^{r_1} |R_1(z) - Z_1(r)|^2 dr \rightarrow \min. \quad (27)$$

**Teorem 5.** Qoyulan şərtlər daxilində (27) funksionalı diferensiasionandır və onun qradienti üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$J'(s_1) = \alpha_0 [R_0(s_1) - z_0(s_1)]^2 + \alpha_1 [R_1(s_1) - z_1(s_1)]^2 - as_1^2 \psi_0(s_1) [R_1''(s_1) - R_0''(s_1)].$$

Beləliklə,  $J(s_1)$  funksionalının birinci variasiyası və artımı hesablanmış, funksionalın qradienti üçün analitik ifadə alınmışdır. Həmçinin  $J'(s)$  funksionalı üçün analitik ifadə alınmışdır.

Dissertasiyanın üçüncü fəslində, ikinci fəsilə baxılan müxtəlif identifikasiya məsələlərinin ədədi həll alqoritmləri işlənmişdir.

Bu fəslin birinci yarımfəslində potensiala nəzərən bir tərs məsələnin ədədi həll alqoritmı verilir. Alqoritm 7 addımdan ibarətdir.

Dissertasiyanın üçüncü fəslinin ikinci yarımfəslə dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həll alqoritmının işlənməsinə həsr olunmuşdur. Alqoritm 6 addımdan ibarətdir və hər addımda müəyyən məsələ ədədi olaraq həll edilir.

Dissertasiyanın üçüncü fəslinin üçüncü yarımfəsli isə ədədi alqoritmlərin yerinə yetirilməsi zamanı alınan nəticələrin təhlilinə həsr olunmuşdur. Model məsələ kimi

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + Q(r)R = r^2 R, \quad 1 \leq r \leq 3,$$

$$R(1) = 2, \quad R(2) = 5, \quad R(3) = 10$$

məsələsinin həllinə baxaq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu məsələnin həlli

$$R(r) = r^2 + 1,$$

müvafiq potensial isə

$$Q^*(r) = \frac{6r^2}{r^2 + 1} + r^2$$

şəklindədir.

Nəticələrin qrafik olaraq müqayisə edilməsi təklif olunan alqoritmlərin effektivliyindən xəbər verir.

## ƏSAS NƏTİCƏLƏR

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Vud-Sakson potensial sahəsində Şredinger tənliyinin əlaqəli hallarının enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaları analitik şəkildə tapılmışdır.
- Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün standart Vud-Sakson potensialı sahəsində enerjinin məxsusi qiymətlərinin sayının məhdud olduğu tapılmışdır.
- Maninnq-Rosen və Rinq-Şaped potensialının mərkəzi hissəsinə yeni yaxınlaşma sxemi tətbiq edərək, orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  qiymətləri üçün Şredinger tənliyini Nikiforov–Uvarov üsulu ilə həll edərək, radial, azimutal dalğa funksiyaları və enerjinin məxsusi qiymətləri tapılmışdır.
- Göstərilmişdir ki, Maninnq-Rosen və Rinq-Şaped potensialı  $\beta = \beta' = 0$  olduqda Manninq-Rosen potensialına,  $\alpha = 0$  və ya  $\alpha = 1$  olduqda isə  $\delta = 1/b$ ,  $A = 2b$  şərtində  $l \geq |m|$  halları üçün Hülten potensialına çevrilir.
- Sabit bir cins maqnit sahəsində hərəkət edən ikiölçülü pion atomunun relyativistik enerji spektrinə maqnit sahəsinin əlavəsinin qeyri-relyativistik enerji spektrinə olan düzəlişdən fərqli olduğu müəyyənənmişdir.
- Hissəciyin neytral sahədə hərəkəti zamanı enerjinin parçanın uçlarına nəzərən məxsusi qiymətlərinin xüsusiyyətləri öyrənilmiş və törəmə üçün düstur tapılmışdır. Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi tədqiq edilmiş, funksionalın birinci variyasiyası və onun artımı hesablanmışdır. Funksionalın qradienti üçün analitik ifadə alınmış və göstərilmişdir ki, müəyyən şərtlər daxilində funksional diferensiallandıdır.
- Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həlli üçün həll alqoritmləri qurulmuş və qradientin proyeksiyası üsulu ilə baxılan məsələ həll edilmişdir.

## Dissertasiya mövzusunə aid çap olunmuş əsərlərin siyahısı

1. Badalov V.H., Ahmadov H.I., Huseynova N.Sh. Analytical solutions of the Schrödinger equation with Woods-Saxon potentials for arbitrary  $l$  state, Application of Information Communication Technologies in Science and Education, 2007, pp. 332-340.
2. Huseynova N.Sh., Ahmadov H.I. The analytical solution of the equation of Klein-Fock-Gordon for two-dimensional pionic atom in presence of a constant homogeneous magnetic field, Conference on Modern Problems in Applied Mathem., dedicated to the 90-th anniversary of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University (TSU) and 40-th anniversary of I. Vekua Institute of Applied Mathematics (VIAM) of TSU, 2008, p. 46.
3. Ахмедов Х.И., Гусейнова Н.Ш. Аналитическое решения уравнения Клейна-Фока-Гордона для двумерного пионного атома, движущегося постоянном однородном магнитном поле, Известия ВУЗ России, 2009, No.3, с.321-327 (**İ F. 0.189**).
4. Niftiyev A.A., Huseynova N.Sh., Ahmadov H.I. Scattering of a Klein-Fock-Gordon particle by a Woods-Saxon potential, 16<sup>th</sup> International Conference on Computational Mechanics and Advanced Applied, Alushta, 25 -31 may, 2009, pp. 29-31.
5. Huseynova N.Sh., Ahmadov H.I. The energy eigenvalues of a two-dimensional screened hydrogenic donor in a constant magnetic field, Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, June 30-July 4, 2009, p. 145.
6. Huseynova N.Sh., Ahmadov H. I., Vekilov M.M. Analytical solution of the D-dimensional Schrodinger equation with the generalized Hulthen potential, International Conference of Functional Analysis Dedicated to 90<sup>th</sup> Anniversary of V.E. Lyantse, Lvov, Ukraine, November 17-21, 2010, p.5.
7. Huseynova N.Sh., Niftiyev A.A. On dependence of energy eigenvalue on the ends of the interval, Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Issue mathematics and mechanics, series of physical-technical and mathematical science, Vol. 31, No. 4, 2010, pp. 159-166.
8. Niftiyev A.A., Huseynova N.Sh. Investigation of the energy eigenvalue relatively to boundary parameter, The 4<sup>th</sup> Congress of the

- Turkic World Mathematical Society (TWMS), Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011, pp. 39-40.
9. Niftiyev A.A., Ahmadov H.I., Huseynova N.Sh. On a dependence of the energy eigenvalues on the ends of the interval, International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, June 29-July 4, 2012, pp. 14-15.
  10. Ahmadov H.I., Aydin C., Huseynova N.Sh., Uzun O. Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Manning-Rosen potential plus a Ring-Shaped like potential, International Journal of Modern Physics E, 2013, Vol. 22, No. 10, pp.1-16 (**İ F. 1.343**).
  11. Huseynova N.Sh., Ahmadov H.I., Niftiyev A.A. Analytical solutions of the Schrodinger equation with the Manning-Rosen potential plus a Ring-Shaped like potential, 4<sup>th</sup> International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, COIA 2013, Brovets, Bulgaria, pp. 39-40.
  12. Niftiyev A.A., Hüseynova N.Ş., Orucova M.Ş. Dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi, Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, 2013, Vol. 1, No. 2, s. 199-204.
  13. Niftiyev A.A., Huseynova N.Sh. Orucova M.Sh. An inverse problem relative potential and its solution, V Congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2014, p. 126.
  14. Niftiyev A.A., Hüseynova N.Ş. Potensiala nəzərən bir tərs məsələ və onun analitik həlli, Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fizika-Riyaziyyat elmləri seriyası, 2014, No. 1, s. 92-97.
  15. Ahmadov H.I., Niftiyev A.A., Huseynova N.Sh. Analytical solutions of the  $D$ -dimensional Schrödinger equation with the Manning-Rosen potential plus a Ring-Shaped like potential, Десятая Международная Азиатская Школа-Семинар "Проблемы оптимизации сложных систем", Кыргызская Республика, Иссык-Кульская область, 25 июля - 5 августа 2014, p.78-83.
  16. Huseynova N.Sh., Orucova M.Sh. Studing of the exact inverse problem in relative potential and it is solution, V International Conference on Optimization Methods and Applications, Petrovac, Montenegro, 2014, pp. 93-94.
  17. Гусейнова Н.Ш., Нифтиев А.А., Муталлимов М.М. Об одном численном алгоритме решения обратной задачи потенциала,

**Həmmüəlliflərlə dərc olunmuş işlərdə iddiaçının şəxsi rolu:**

[1-4], [5, 7, 8], [6, 10, 11, 15], [9, 12-14], [16-17]- işlərində həmmüəlliflər məsələlərin qoyuluşunda və alınmış nəticələrin müzakirəsində iştirak etmişlər. Dalğa tənliklərinin analitik həlli, aparılan hesablamalar, həll alqoritmlərinin işlənməsi, uyğun proqram təminatının yaradılması və realizasiyası ilə bağlı bütün nəticələr iddiaçıya məxsusdur.

**Гусейнова Наргиз Шамиль кызы**  
**Модели связанные с элементарными частицами**  
**и их управление**

**РЕЗЮМЕ**

В диссертационной работе, используя приближение Пекериса и применяя метод Никифорова-Уварова, найдено аналитическое решение радиального уравнения Шредингера для потенциала Вуд-Саксона при произвольных значениях орбитального квантового числа  $l \neq 0$ . Для различных значений квантовых чисел  $l$  и  $n_r$  были найдены различные энергии связанных состояний и соответствующие им собственные функции. Применяя схему нового подхода к центральной части Манинг-Розен плюс Ринг-Шепед потенциала было решено радиальное уравнение Шредингера и найдены собственные радиальные и азимутальные волновые функции частицы. Были также вычислены собственные значения энергии решением уравнения Шредингера методом Никифорова-Уварова для различных орбитальных квантовых чисел  $l \neq 0$ .

Также определена нижняя граница интенсивности магнитного поля с учетом поправки магнитного поля к релятивистскому энергетическому спектру для двумерного атома пиона, движущегося в постоянном однородном магнитном поле.

Найдено аналитическое выражение для оптимального потенциала решением обратной задачи относительно потенциала.

Построена задача оптимального управления с переменной структурой, изучена обратная связь, для численного решения задачи оптимального управления с переменной структурой был предложен высокоточный вычислительный алгоритм, предложенная задача была решена также методом градиентной проекции. Было найдено аналитическое решение волнового уравнения в вариационной форме и получено аналитическое выражение для градиента функционала. Решая обратную задачу относительно потенциала, было также получено аналитическое выражение для оптимального потенциала и предложены численные алгоритмы для решения поставленных задач.

Изучена дифференцируемость собственных значений энергии относительно концов отрезок при движении частицы в нейтральном

поле и найдена формула для производной. Используя это, выявлены некоторые свойства собственных значений энергии, для которой получена новая формула.

## Huseynova Nargiz Shamil

### The elementary particle models and their control

#### SUMMARY

In the present thesis, using Pekeris approach and Nikiforov, Uvarov's method an analytic solution is found for the radial Schrödinger equation with Saxon-Wood potential by arbitrary values of orbital quantum number  $l \neq 0$ . For the different values of the quantum numbers  $l$  and  $n_r$ , different energies of the bound states and the corresponding eigen functions are found. Applying the scheme of the new approach to central Manning-Rosen plus Ring Shaped potential radial Schrödinger equation is solved and eigen radial and azimuthal wave functions of the particles are found. Also calculated the energy eigenvalues are calculated by the solving the Schrödinger equation by Nikiforov, Uvarov's method for the different orbital quantum numbers  $l \neq 0$ . It was also determined the lower limit of the intensity of the magnetic field considering its correction to the relativistic energy spectrum for the two-dimensional pion atoms moving in the constant homogeneous magnetic field. Analytical expression is found for the optimal potential by the solution of the inverse problem relative to the potential.

Optimal variable structure control problem is formulated, the feedback is studied. For the numerical solution of the optimal control problem with variable structure has been proposed high-precision numerical algorithm. The problem was also solved by the gradient projection method.

Analytical solution of the wave equation is found in the variational form and the analytical expression for the functional gradient is derived. Solving the inverse problem with respect to potential, an analytical expression is obtained for the optimal potential and the numerical algorithms are offered for the solution of these problems.

Differentiability of the energy eigenvalues with respect to the ends of the interval is studied in the motion of a particle in a neutral field, and the formula for the derivative is derived. Using this, some properties of the energy eigenvalues are investigated.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

---

*На правах рукописи*

**ГУСЕЙНОВА НАРГИЗ ШАМИЛЬ КЫЗЫ**

**МОДЕЛИ СВЯЗАННЫЕ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ  
ЧАСТИЦАМИ И ИХ УПРАВЛЕНИЕ**

3338.01- Системный анализ, управление  
и обработка информации

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора философии по математике

**БАКУ - 2016**