**ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**
**БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

*На правах рукописи*

**ГАДЖИЕВА НАЗИЛЕ САХАВАТ КЫЗЫ**

# ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ

3338.01 – Системный анализ, управление и обработка информации

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

**БАКУ - 2016**

Работа выполнена в Институте Систем Управления НАН Азербайджана.

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук, академик **Ф.А. Алиев**

**Официальные оппоненты:**

Доктор физико-математических наук, профессор **В.Б.Ларин**

Доктор физико-математических наук, профессор **А. К.Керимов**

**Ведущая организация:** Институт Математики и Механики НАНА.

Защита диссертации состоится **«16» февраля** 2016 г. в $14^{00}$ часов на заседании диссертационного совета FD.02.017 при Бакинском Государственном Университете.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

**Адрес:** ул. З. Халилова, 23, AZ 1148, г. Баку.

Автореферат разослан 15 января 2016 года.

**Ученый секретарь**
**Диссертационного Совета**
**FD.02.017** **д.т.н. М.М.Муталлимов**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Одним из эффективных методов решения задачи граничного управления является нахождение оптимального решения для задачи граничного управления. В качестве примера такого рода математических задач можно показать нахождение управления при добыче нефти газлифтным способом. Очевидно, что чем ниже пластовое давление, метод фонтан заканчивается, и эксплуатация нефтяных скважин переходит к новому этапу. Экономически метод газлифта является одним из самых прибыльных методов. В этой области есть много исследований авторов , например Шуров В.И., Нуриев Н.Б., Юсифов С. И., Мирзаджанзаде А., Эйкрем Г.О. и др. В этих работах, в основном, изучены некоторые технические вопросы, но в работах Эйкрема Г.О. рассмотрены различные задачи, в которых движение жидкости идентифицируется движением материальных точек. Так как здесь идентификация не обоснована, возникают определенные недостатки при определении оптимального режима и решении задач стабилизации. Например, при построении оптимальных регуляторов известные стандартные методы являются не приемлемыми.

Отметим, что впервые в 2008 году в работах Алиева Ф.А., Ильясова М.Х., Джамалбекова М.А. была предложена идеальная математическая модель, характеризующая движение газа и газожидкостной смеси при газлифтном процессе. Позже, в работах Алиева Ф.А., Ильясова М.Х., Нуриева Н.Б., согласно этой модели, решение некоторых задач сводилось к решению линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Были сделаны работы, устраняющие некоторые трудности, возникающие при эксплуатации нефтяных скважин методом газлифта. В качестве примера можно показать работу Нуриева Н.Б. В работах Ларина В.Б., Алиева Ф.А., Ильясова М.Х., Джамалбекова М.А., Исмайлова Н.А., Юсифова С.И. были рассмотрены задачи оптимального управления газлифтного процесса. Кроме того, в работах Aamo O.M., Eikrem G.O., Siahaan H.B., Foss B.A. и др. были предложны математические модели газлифтного процесса. В работах Алиева Ф.А., Ильясова М.Х., Нуриева Н.Б. приведены уравнения движения газа и газожидкостной смеси при газлифтном процессе и сведение задачи к линейно-квадратичной задаче оптимального управления решается до конца.

**Цель работы.** Целью работы является:

1) Постановка задач оптимального граничного управления в непрерывном и дискретном случаях, и разработка новых алгоритмов;
2) Исследование решения задачи оптимального граничного управления при газлифтном процессе в непрерывном и дискретном случаях и предложение эффективных алгоритмов;
3) Исследование решения задачи оптимального граничного управления с неразделенными краевыми условиями в непрерывном и дискретном случаях, и предложение новых алгоритмов;
4) Решение задачи идентификации для определения коэффициента гидравлического сопротивления, используя метод прямых в непрерывном и дискретном случаях и предложение эффективных алгоритмов;
5) Определения коэффициента гидравлического сопротивления с помощью асимптотического метода при газлифтном процессе;

**Методы исследования.** В работе использованы современные методы теории оптимального управления, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории матриц, математического моделирования.

**Научная новизна.** Выполненная диссертационная работа выключает следующие результаты:

1) Приведено аналитическое решение уравнения, описывающее задачу оптимального граничного управления при газлифтном процессе, и графически найдено оптимальное решение с помощью интерактивного метода;
2) Найдено оптимальное решение для задачи оптимального граничного управления при газлифтном процессе с использованием градиентного метода и предложены численные алгоритмы данной задачи;
3) Решена задача оптимального граничного управления с неразделенными краевыми условиями с помощью метода квазилинеаризации, и приведены эффективные алгоритмы;

4) Определен коэффициент гидравлического сопротивления с помощью асимптотического метода при газлифтном процессе и разработаны алгоритмы;

**Теоретическая и практическая ценность.** Практическая и научная значимость диссертационной работы заключается в разработке алгоритмов для решений различных оптимальных задач управлений. Разработанные вычислительные методы позволили создать математическое обеспечение решения задачи оптимального граничного управления.

**Достоверность полученных результатов.** Все результаты диссертации математически строго доказаны. Предложенные численные методы проверены на тестовых примерах. Результаты вычислительных экспериментов, проведенных на конкретных прикладных задачах, сравнены с результатами, полученными из практики.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1) Семинарах Института Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета (Баку, 2012-2015);
2) Международной конференции "Актуальные проблемы математики и информатики" (Баку, 2013);
3) Международной азиатской Десятой школе-семинаре "Проблемы оптимизации сложных систем" (Иссык-Куль, 2014);
4) 5-й Международной конференции “Control and Optimization with Industrial Applications”, (Баку, 2015).

**Публикация.** По теме диссертации опубликовано 6 статей и 2 тезиса, список которых приводится в конце автореферата.

**Структуры и объем диссертации**: Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения, приложения, 85 наименований цитируемой литературы. Содержание работы изложено на 101 страницах, включает 6 рисунков и 2 таблицы.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель исследований и проведенные исследования анализированы с другими исследованиями в этой области.

В 1.1. движение газа в кольцевом пространстве, а ГЖС в вертикальных трубах, т.е. в подъемнике газлифтной скважины с постоянным поперечным сечением, описываются следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial(\rho_i \omega_c^i)}{\partial t} + 2a_i \rho_i \omega_c^i, \\ -\dfrac{\partial P}{\partial t} = c_i^2 \dfrac{\partial(\rho_i \omega_c^i)}{\partial x}, \ i = 1, 2, \end{cases} \tag{1}$$

где $P = P(x,t) -$ давление соответственно газа и газожидкостной смеси, $c_i$ - скорость звука в газе и ГЖС соответственно; $2a_i = \dfrac{g}{\omega_c^i} + \dfrac{\lambda_c^i \omega_c^i}{2D_i}$ $(i = 1,\ 2)$; $g$, $\lambda_c^i, (i=1,\ 2)$ - ускорение свободного падения и гидравлического сопротивления в газе и ГЖС соответственно; $\omega_c^i, (i=1,\ 2)$ - усредненная по сечению скорость движения смеси и газа в кольцевой зоне и подъемнике соответственно. $D_i,\ i=1,2\ -$ внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства.

Используя метод осреднения, эти системы уравнений сводятся к двум нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка, описывающих давление и объем газа:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{2a_i \rho_i F_i Q^2}{c_i^2 \rho_i^2 F_i^2 - Q^2}, \ Q(0) = u, \\ \dot{P} = -\dfrac{2a_i c_i^2 \rho_i^2 F_i Q}{c_i^2 \rho_i^2 F_i^2 - Q^2}, \ \ P(0) = P_0, \ i = 1, 2. \end{cases} \tag{2}$$

Условие на забое скважины (т.е. при $x = l$) может быть задано в виде:

$$Q(l+0) = \gamma Q(l-0) + \gamma_1(Q(l-0)), \qquad (3)$$

$$\gamma_1(Q(l-0)) = (-\delta_3(Q(l-0) - \delta_2)^2 + \delta_1)\overline{Q},$$

где $\gamma$ и $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ - постоянные действительные числа и выбирается для каждой конкретной скважины отдельно, по ее истории, $\overline{Q}$ - объем флюидов в зоне смешивания.

Потом приведем аналитическое решение первого уравнения (2) с начальным условием $Q(0)$:

при $0 \le x < l - 0$

$$Q(x) = \rho_1 F_1\left[-a_1\left(x - \frac{(Q(0))^2 + c_1^2\rho_1^2F_1^2}{2a_1\rho_1F_1Q(0)}\right) - \sqrt{a_1^2\left(x - \frac{(Q(0))^2 + c_1^2\rho_1^2F_1^2}{2a_1\rho_1F\,Q(0)}\right)^2 - c_1^2}\right]$$

и при $l + 0 < x \le 2l$

$$Q(x) = \rho_2 F_2\left[-a_2\left(x - \frac{(Q(l+0))^2 + c_2^2\rho_2^2F_2^2}{2a_2\rho_2F_2Q(l+0)}\right) - \sqrt{a_2^2\left(x - \frac{(Q(l+0))^2 + c_2^2\rho_2^2F_2^2}{2a_2\rho_2F_2Q(l+0)}\right)^2 - c_2^2}\right].$$

Используя эти формулы и по графику с помощью интерактивного метода найдено решение уравнения (2).

Далее рассматривается минимизация функционала

$$J = \frac{1}{2}\alpha Q^2(2l) + \frac{1}{2}\beta u^2 \qquad (4)$$

при условии (3) относительно начального условия $Q(0)$ в первом уравнении системы (2), где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ постоянные весовые коэффициенты.

При решении задачи (2)-(4) сначала, добавив к задаче соответствующий расширенный функционал, получены уравнения Эйлера-Лагранжа и граничные условия в соответствии с сопряженными множителями. Далее, с помощью известных методов было найдено решение задачи.

В 1.2. используя метод, данный в 1.1, уравнение, описывающее движения жидкости и газожидкостной смеси во внутренней и внешней трубах в непрерывном случае, в дискретном случае, задается в виде:

$$\begin{cases} Q(j+1) = \dfrac{2a_1\rho_1F_1Q^2(j)\cdot\Delta}{c_1^2\rho_1^2F_1^2 - Q^2(j)} - Q(j), & 0 \le j \le N-1, \\ Q(j+1) = \dfrac{2a_2\rho_2F_2Q^2(j)\cdot\Delta}{c_2^2\rho_2^2F_2^2 - Q^2(j)} - Q(j), & N+1 \le j \le 2N, \\ Q(0) = u. \end{cases} \qquad (5)$$

В точке - $N$ уравнения (5) соединяют друг с другом следующее условие:

$$Q(N+1) = \gamma Q(N-1) + (-\delta_3(Q(N-1) - \delta_2)^2 + \delta_1)\overline{Q}. \qquad (6)$$

Требуется найти такое управление $u$, которое удовлетворяет (5), (6) и доставляет функционалу

$$J = \frac{1}{2}\alpha\cdot Q^2(2N) + \beta u^2 \qquad (7)$$

минимальное значение.

Аналогично непрерывному случаю для решения задачи написан расширенный функционал. Отсюда получены уравнения Эйлера-Лагранжа и соответствующие граничные условия в дискретном случае. Задача была решена аналогично непрерывному случаю. Далее, проводятся расчеты их сравнения на конкретном примере, данном в непрерывном случае.

В 1.3. движение объекта описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y(x)), & 0 \le x < l-0, \\ \dot{y} = f_2(y(x)), & l+0 < x \le 2l, \\ y(0) = u \end{cases} \qquad (8)$$

и конечно- разностным уравнением в точке разрыва $l$:

$$y(l+0) = \gamma\, y(l-0) + \gamma_1(y(l-0))\,\overline{y}, \qquad (9)$$

где $y$ - $n$-мерный вектор, определяющий координаты объекта, $u$- неизвестные начальные условия размерности n (управление), $\overline{y}$-

скалярное внешнее возмущение размерности $n$, $\gamma$ - постоянная матрица размерности $n\times n$, $\gamma_1(y(l-0))$ - $n$ -мерный вектор.

Требуется найти такое управление $u$, которое удовлетворяет (8), (9) и доставляет квадратичному функционалу

$$J=\frac{1}{2}y'(2l)\widetilde{R}y(2l)+\int\limits_0^{2l}y'(x)R(x)y(x)dx+u'\beta u \tag{10}$$

минимальное значение, где $\widetilde{R}<0, \beta>0-$ симметричные матрицы размерности $n\times n$, $R(x)$ - $n\times n$ -мерная матрица.

Для решения задачи (8)-(10) сначала, добавив к задаче соответствующий расширенный функционал, получены уравнения Эйлера-Лагранжа и граничные условия в соответствии с сопряженными множителями. С помощью градиентного метода, решив данную задачу, найдено решение общей задачи.

Отсюда следует теорема для существования решения задачи (8)-(10).

**Теорем 1.1.** Пусть задана задача (8)-(10), где функции $f_1(y(x))$, $\frac{\partial f^1(x)}{\partial y(x)}$, $f_2(y(x))$, $\frac{\partial f^2(x)}{\partial y(x)}$ непрерывны на интервалах $0\le x<l-0$ и $l+0<x\le 2l.$ Тогда решение задачи оптимизации (8)-(10) есть и сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{y}=f_1(y(x)), & 0\le x<l-0,\\ \dot{y}=f_2(y(x)), & l+0<x\le 2l,\\ \dot{\lambda}(x)=-\left[\frac{\partial f_1(y(x))}{\partial y}\right]^T\lambda(x)-2y(x)R(x), & 0\le x<l-0,\\ \dot{\lambda}(x)=-\left[\frac{\partial f_2(y(x))}{\partial y}\right]^T\lambda(x)-2y(x)R(x), & l+0<x\le 2l\end{cases}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = u,$$
$$\lambda(2l) = \widetilde{R} y(2l),$$
$$y(l+0) = \gamma\, y(l-0) + \gamma_1(y(l-0))\overline{y},$$
$$\lambda(l-0) = \gamma \lambda(l+0) + \frac{\partial \gamma_1(y(l-0))}{\partial y(l-0)} \lambda(l+0)\overline{y}.$$

В 1.4. уравнения движения объекта в непрерывном случае были заменены следующими конечно-разностными уравнениями, и заданные задачи были решены до конца:

$$\begin{cases} y(i+1) = f_1(y(i)), & 0 \le i \le N-1, \\ y(i+1) = f_2(y(i)), & N+1 \le i \le 2N, \\ y(0) = u. \end{cases} \tag{11}$$

Условие связки уравнений в системе (11) в дискретном случае задается в виде:

$$y(N+1) = \gamma\, y(N-1) + \gamma_1(y(N-1))\overline{y}. \tag{12}$$

Требуется найти такое управление $u$, которое удовлетворяет (11), (12) и доставляет функционалу

$$J = \frac{1}{2} y^T(2N)\widetilde{R} y(2N) + \sum_{i=0}^{2N-1} y^T(i)R(i)y(i) + u^T \beta u \tag{13}$$

минимальное значение.

Здесь тоже для решения задачи написан расширенный функционал. Отсюда получены уравнения Эйлера-Лагранжа и соответствующие граничные условия. Аналогично непрерывному случаю, задача была решена, используя градиентный метод. В конце были найдены решения общей задачи.

**Теорем 1.2.** Пусть задана задача (11)-(13), где функции $f_1(y(i))$ и $f_2(y(i))$ непрерывны на интервалах $0 \le i \le N-1$ и $N+1 < i \le 2N$. Тогда решение задачи оптимизации (11)-(13) есть и сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y(i+1) = f_1(y(i)), \qquad 0 \le i \le N-1, \\ y(i+1) = f_2(y(i)), \qquad N+1 \le i \le 2N, \\ \lambda^T(i) = 2y^T(i)\cdot R(i) + \lambda^T(i+1)\dfrac{\partial f_1(y(i))}{\partial y(i)} = 0, \quad 0 \le i \le N-1, \\ \lambda^T(i) = 2y^T(i)\cdot R(i) + \lambda^T(i+1)\dfrac{\partial f_2(y(i))}{\partial y(i)} = 0, \;\; N+1 \le i \le 2N \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0) = u, \\ \lambda(2N) = \widetilde{R}y(2N), \\ \lambda(N+1) - 2y^T(N+1)\cdot R(i) - \lambda^T(N+1)\dfrac{\partial f(y(N+1))}{\partial y(N+1)} = 0, \\ \lambda(N-1) = \gamma^T\lambda(N+1) + \lambda^T(N+1)\dfrac{\partial\gamma_1(y(N-1))}{\partial y(N-1)}\cdot\bar{y}, \\ 2\beta u + \lambda(0) = 0, \\ y(N+1) = \gamma\, y(N-1) + \gamma_1(y(N-1))\bar{y}. \end{cases}$$

Во второй главе рассматривается задача оптимального граничного управления с неразделенными краевыми условиями. Здесь, движение объекта описывается, аналогично первой главе, системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующими начальными условиями.

В 2.1 при условии

$$\chi Q(l+0) = Q(2l), \quad 0 < \chi < 1 \tag{14}$$

Функционал (4) принимает следующий вид:

$$J = \frac{1}{2}\alpha\chi^2 Q^2(l+0) + \frac{1}{2}\beta u^2 \to \min. \tag{15}$$

В 2.1 первое уравнение системы (2) и уравнение (3) получены с помощью линеаризации номинального решения $Q^k(x)$:

$$\dot{Q}(x) = A_i(Q^k(x))Q(x) + B_i(Q^k(x)), \; i = 1, 2, \tag{16}$$

$$Q(0) = u, \tag{17}$$

$$Q(l+0) = \eta(Q^k(l-0))Q(l-0) + \mu(Q^k(l-0)), \tag{18}$$

где

$$A_1(Q^k(x)) = \frac{4c_1^2 a_1 \rho_1^3 F_1^3 Q^k(x)}{(Q^{k^2}(x) - c_1^2 \rho_1^2 F_1^2)^2}, \quad 0 \le x < l-0,$$

$$A_2(Q^k(x)) = \frac{4c_2^2 a_2 \rho_2^3 F_2^3 Q^k(x)}{(Q^{k^2}(x) - c_2^2 \rho_2^2 F_2^2)^2}, \quad l+0 < x \le 2l,$$

$$B_1(Q^k(x)) = -\frac{2c_1^2 a_1 \rho_1^3 F_1^3 Q^{k^2}(x) + 2a_1 \rho_1 F_1 Q^{k^3}(x)}{(Q^{k^2}(x) - c_1^2 \rho_1^2 F_1^2)^2}, \quad 0 \le x < l-0,$$

$$B_2(Q^k(x)) = -\frac{2c_2^2 a_2 \rho_2^3 F_2^3 Q^{k^2}(x) + 2a_2 \rho_2 F_2 Q^{k^3}(x)}{(Q^{k^2}(x) - c_2^2 \rho_2^2 F_2^2)^2}, \quad l+0 < x \le 2l,$$

$$\eta(Q^k(l-0)) = \gamma - 2\delta_3 \overline{Q}(Q^k(l-0) - \delta_2),$$

$$\mu(Q^k(l-0)) = 2\delta_3 \overline{Q} Q^k(l-0)[Q^k(l-0) - \delta_2] - [\delta_3[Q^k(l-0) - \delta_2]^2 - \delta_1]\overline{Q}.$$

Для задачи (14)-(18) написан расширенный функционал и получены уравнения Эйлера-Лагранжа и соответствующие граничные условия в соответствии с сопряженными множителями.
Объединяя все эти уравнения и условия, получены линейные алгебраические уравнения:

$$\begin{bmatrix} & & K & & \\ \Phi(l,0) & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(2l,l) & -E & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} q \\ -N(l,0) \\ -N(2l,l) \end{bmatrix}.$$

Далее предложен вычислительный алгоритм и решена данная задача.

В 2.2. рассматривается задача (8)-(10). При условии

$$\chi y(l+0) = y(2l), \; 0 < \chi < 1 \tag{19}$$

функционал (10) принимает следующий вид:

$$J = \frac{1}{2}\chi^2 y'(l+0) N y(l+0) + \int_0^{2l} y'(x) R(x) y(x) dx + u'Cu \to \min. \tag{20}$$

Эта задача решается аналогично 2.1.

**Теорем 2.1.** Пусть задана задача (8), (9), (19), (20) где функции $f_1(y^k(x))$, $\frac{\partial f^1(y^k(x))}{\partial y^k(x)}$, $f_2(y^k(x))$, $\frac{\partial f^1(y^k(x))}{\partial y^k(x)}$ непрерывны на интервалах $0 \le x < l-0$ и $l+0 < x \le 2l$. Тогда решение задачи оптимизации (8), (9), (19), (20) есть и сводится к решению линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(x) \\ \dot{\lambda}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i(y^k(x)) & 0 \\ -8lR(x) & -4lA_i(y^k(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i(y^k(x)) \\ 0 \end{bmatrix}, \ i = 1,\ 2$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0) = u, \\ y(l+0) = \eta(y^k(l-0))y(l-0) + \mu(y^k(l-0)), \\ (\dfrac{1}{4l} - 1)\lambda(l+0) + \chi N y(2l) - \dfrac{\chi}{4l}\lambda(2l) = 0, \\ \dfrac{1}{4l}\lambda(0) + \delta + 2Cu = 0, \\ \lambda(l-0) = 4l\eta(y^k(l-0))\lambda(l+0). \end{cases}$$

В 2.3. рассматривается задача (5)-(7). Пусть заданы некоторые номинальные решения $Q^k(i)$ задачи (5)- (7). Тогда, линеаризуя дифференциальные уравнения (5), (6) около этой номинальной траекторий, имеем следующие линейные дифференциальные уравнения для $(k+1)$ итераций:

$$Q(i+1) = A_j(Q^k(i))Q(i) + B_j(Q^k(i)), \ \ j = 1,\ 2, \tag{21}$$

$$Q(0) = u, \tag{22}$$

$$Q(N+1) = \eta(Q^k(N-1))Q(N-1) + \mu(Q^k(N-1)). \tag{23}$$

После некоторых преобразования имеем алгебраические уравнения:

$$\begin{bmatrix} & K & & \\ \Phi(N-1,0) & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(2N, N+1) & -E \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} q \\ -N(N-1,0) \\ -N(2N, N+1) \end{bmatrix}.$$

Далее предложен вычислительный алгоритм и решена данная задача.

В 2.4. рассматривается задача (11)-(13) и на основе (2.3.) рассматривается задача оптимизации граничного управления с неразделенным краевым условием в дискретном случае.

В третьей главе рассматривается задача нахождения коэффициента гидравлического сопротивления для уравнений, описывающих движения жидкости и газожидкостной смеси во внутренней и внешней трубах в непрерывном случае при газлифтном процессе. В 3.1, используя метод прямых, система уравнений (1) сводится к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_k}{dt} = -\dfrac{c_i^2}{F_i l}(Q_k - Q_{k-1}), \\ \dfrac{dQ_k}{dt} = -\dfrac{F_i}{l}(P_k - P_{k-1}) - 2a_i Q_k. \end{cases} \tag{24}$$

После некоторых преобразований уравнения (24) сводятся к уравнению

$$\dot{x} = A(\lambda_c)x + Bu + V \tag{25}$$

с начальным условием $x_0$.

Требуется найти такие значения коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_c$, при которых система (25) будет описывать движение ГЖС в подъемнике более близко к практике (адекватная математическая модель).

Для решения этой задачи требуется минимизировать функционал:

$$f(a_2(\lambda_c)) = \sum_{i=1}^{N}\left[\tilde{Q}_{2n}^i - Q_{2n}^i\right]^2. \tag{26}$$

Общее решение уравнения (0,20) показывается в следующем виде:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bud\sigma + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Vd\sigma = e^{At}x_0 + A^{-1}(e^{At} - E)Bu +$$

$$+ A^{-1}(e^{At} - E)V$$

и учитывается в функционале (26). Далее находится градиент функционала и приравнивается к нулю. Из этого уравнения находится гидравлическое сопротивление и предлагается вычислительный алгоритм. В 3.2. аналогично 3.1. решается задача в дискретном случае и уравнение (23) принимает следующий вид:

$$x(i+1) = \Phi\, x(i) + \Gamma u(i) + \mathrm{H},\ x(0) = x_0,\ i = \overline{0, N-1}. \tag{27}$$

В дискретном случае функционал будет в виде

$$f(a_2(\lambda_c)) = \sum_{j=1}^{n}\left[\widetilde{Q}_j(N) - Q_j(N)\right]^2 \to \min. \qquad (28)$$

$x(N)$ определяется из (25) следующим образом:

$$x(N) = \Phi^N x(0) + \sum_{i=0}^{N-1}\Phi^i \Gamma u + \sum_{i=0}^{N-1}\Phi^i H.$$

Учитывая решение $x(N)$ в функционале (28) , градиент функционала определяется и приравнивается нулю. Отсюда определяется коэффициент гидравлического сопротивления. В 3.3. обратное значение глубины скважин принимается как малый параметр $\varepsilon = \dfrac{1}{|2L|}$ в системе уравнений с частными производными гиперболического типа, описывающего движения жидкости и газожидкостной смеси во внутренней и внешней трубах при газлифтном процессе. Обозначив $z = \dfrac{x}{|2L|} = \varepsilon x$, система сводится к системе, зависящей от малого параметра:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = -\dfrac{c^2}{F}\dfrac{\partial Q}{\partial z}\varepsilon, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} = -F\dfrac{\partial P}{\partial z}\varepsilon - 2aQ. \end{cases} \qquad (29)$$

Применяя метод прямых и обозначив $l = \dfrac{1}{n}$, при $n$=2 из (29) получим:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -\dfrac{c_1^2 \varepsilon}{F_1 l} Q_1 + \dfrac{c_1^2 \varepsilon}{F_1 l} Q_0, \\ \dot{Q}_1 = -\dfrac{F_1 \varepsilon}{l} P_1 + \dfrac{F_1 \varepsilon}{l} P_0 - 2a_1 Q_1, \\ \dot{P}_1 = -\dfrac{c_2^2 \varepsilon}{F_2 l} Q_2 + \dfrac{c_2^2 \varepsilon}{F_2 l} Q_1 + \dfrac{c_2^2 \varepsilon}{F_2 l} Q_{pl}, \\ \dot{Q}_1 = -\dfrac{F_2 \varepsilon}{l} P_2 + \dfrac{F_2 \varepsilon}{l} P_1 - 2a_2 Q_2 + \dfrac{F_2 \varepsilon}{l} P_{pl}. \end{cases} \tag{30}$$

После некоторых преобразований систему (30) можно привести к виду

$$\dot{x} = (A_0(\lambda_c) + A_1 \varepsilon) x + B\varepsilon u + V\varepsilon.$$

Далее строится задача, аналогичная задаче (24), (26) и решается одинаковым методом. Здесь предлагаются вычислительные алгоритмы задач. В 3.3. выбирается некоторая номинальная траектория $Q^0(x)$ и параметр $a^0$, предполагая, что $k$-я итерация уже выполнена. Линеаризуем около этих данных уравнение (2) и получим

$$\dot{Q}^k(x) = A_i\left(Q^{k-1}, a^{k-1}\right) \cdot Q^k(x) + B_i\left(Q^{k-1}, a^{k-1}\right) a^k + C_i\left(Q^{k-1}, a^{k-1}\right), \quad i = 1, 2. \tag{31}$$

Функционал для $k$-й итерации имеет следующий вид:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{5} \left| (\widetilde{Q}_{2n}^{i_1})^k - (Q_{2n}^{i_1})^k \right|^2 \to \min. \tag{32}$$

Таким образом, представляем решение уравнение (31) на концах интервала в следующем виде:

$$Q^k(x_{2N}) = \left( \prod_{i=2N-1}^{N+1} \left( E + A\left(Q^{k-1}(x_i), a^{k-1}\right) h \right) \right) Q^k(x_{N+1}) +$$

$$+ \sum_{i=N+2}^{2N-1} \left( \prod_{i=2N-1}^{j} \left( E + A\left(Q^{k-1}(x_i), a^{k-1}\right) h \right) \right) B\left(Q^{k-1}(x_{j-1}), a^{k-1}\right) ah +$$

$$+ \sum_{j=N+2}^{2N-1} \left( \prod_{i=2N-1}^{j} \left( E + A\left(Q^{k-1}(x_i), a^{k-1}\right) h \right) \right) C\left(Q^{k-1}(xj-1), a^{k-1}\right) h + \tag{33}$$

$$+B\left(Q^{k-1}(x_{2N-1}), a^{k-1}\right)ah + C\left(Q^{k-1}(x_{2N-1}), a^{k-1}\right)h.$$

Далее, подставив (33) в (32) для решения исходной задачи оптимизаций (31)-(32), находим градиент функционала $f(a_2(\lambda_c))$ и, приравнивая нулю , определяем гидравлическое сопротивление $\lambda_c$. Далее предлагается вычислительный алгоритм.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику Ф.А. Алиеву за постановку задачи, постоянное внимание к выполнению работы и заведующему отделом "Математические задачи системного анализа" научно-исследовательского Института Прикладной Математики БГУ к.ф.-м.н. Н.А. Исмаилову за помощь при создании вычислительных программ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЯ

В диссертации рассмотрены методы решения задачи идентификации и граничного управления. Приведем основные результаты проведенных в диссертации исследований:

1) Приведено аналитическое решение уравнения, описывающее задачу оптимального граничного управления в непрерывном и дискретном случаях, и графически найдено оптимальное решение с помощью интерактивного метода;
2) Найдено оптимальное решение для задачи оптимального граничного управления при газлифтном процессе с использованием градиентного метода и предложены численные алгоритмы данной задачи;
3) Решена задача оптимального граничного управления с неразделенными краевыми условиями с помощью метода квазилинеаризации, и приведены эффективные алгоритмы;
4) Определен коэффициент гидравлического сопротивления с помощью асимптотического метода при газлифтном процессе и разработаны алгоритмы.

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:**


1. Исмайлов Н.А., Мухтарова Н.С. Метод решения дискретной задачи оптимизации с граничным управлением // Proceedings of IAM, 2013, v.2, No 1, c.20-27.
2. Исмаилов Н.А., Аскеров И.М., Мухтарова Н.С. и др. Алгоритм решения задачи оптимизации с граничным управлением. Актуальные проблемы математики и информатики /ТЕЗИСЫ Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, Баку, 2013, с.283-284.
3. Исмайлов Н.А., Мухтарова Н.С., Аскеров И.М. и др. Алгоритм решения задачи оптимизации с граничным управлениям // Докл. НАНА, 2013, №1, с.37-46.
4. Mukhtarova N.S., Ismailov N .A. Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control // TWMS J. Pure Appl. Math., 2014, v.5, No 1, pp.130-137.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.S. Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control / Десятая Международная Азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» , Кыргызская Республика, Иссык-Кульская область, санаторий "Иссык-Куль Аврора", 2014, с.31-32.
6. Aliev F.A, Ismailov N.A., Mukhtarova N.S. Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem // Automation and Remote Control, 2015, v.76, No 4, pp.97-104.
7. Aliev F.A., Mukhtraova N.S., Safarova N.A. et. al. Determination the hydraulic resistance coefficient in gas-lift process by the straight line method / The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 2015, pp.242-244.
8. Мухтарова Н.С. Алгоритм решения задачи идентификации для нахождения коэффициента гидравлического сопротивления газлифтного процесса // Proceedings of IAM, 2015, v.4, No 2, с. 152-157.

**Личный вклад соискателя в совместно опубликованных научных работах:**
[1], [2] – соавторы принимали участие в обсуждении задачи.
[3], [4] - соавторы принимали участие в проверке на адекватность предложенного алгоритма.
[5]- [7] - соавторы принимали участие в постановке и обсуждении задачи.

**Hacıyeva Nazilə Səxavət qızı**

**İdentifikasiya və sərhəd idarəetmə məsələlərinin effektiv həlli üsulları**

## XÜLASƏ

Dissertasiya işində sərhəd optimal idarəetmə məsələsinə, yəni maye-qaz qarışığının az itki sərf etməklə quyu çıxışına verilməsi məsələsinə baxılır və qradiyent üsulundan istifadə edərək baxılan məsələnin həlli üçün hesablama alqoritmi verilir. Daha sonra ayrılmayan sərhəd şərtli sərhəd idarəetmə məsələsinə baxılır. Qoyulmuş məsələnin həlli üçün kvazixəttiləşmə üsulu tətbiq olunur və verilmiş məsələ xətti kvadratik optimallaşdırma məsələsinə gətirilir. Qeyri-xətti adi diferensial tənliklər sisteminin sağ tərəfinə daxil olan parametrlərin təyini üçün tərs məsələyə baxılır. Qaz-lift prosesində kəsilməz və diskret halda hidravlik müqavimət əmsalının təyini üçün identifikasiya məsələsinə baxılır və hesablama alqoritmləri verilir. Hidravlik müqavimət əmsalının təyini üçün asimptotik hesablama alqoritmi verilir. "MATLAB" tətbiqi proqramlar paketindən istifadə edərək işdə təklif olunan alqoritmlərin proqram təminatı yaradılmışdır. Təklif olunan riyazi modellərin adekvatlığı və alqoritmlərin effektivliyi praktikadan gələn konkret misal üzərində illustrasiya edilmişdir.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. Qaz-lift prosesində optimal sərhəd idarəetmə məsələsinin həllini təsvir edən tənliyin analitik üsulla həll edilmiş və qrafik üzərində interaktiv üsuldan optimal həll tapılmışdır;
2. Qaz-lift prosesində optimal sərhəd idarəetmə məsələsi üçün qradiyent üsulundan istifadə edərək optimal həll tapılmış və məsələnin ədədi həll alqoritmləri verilmişdir;
3. Qaz-lift prosesində ayırıcı sərhəd şərtli optimal sərhəd idarəetmə məsələsinin kvazixəttiləşdirmə üsulu vasitəsilə həll edilərək effektiv həll alqoritmləri verilmişdir;
4. Qaz-lift prosesində asimptotik üsulla hidravlik müqavimət əmsalı təyin edilmiş və həll alqoritməri verilmişdir.

**Hajiyeva Nazila Sakhavat qizi**

## Efficient methods to solution for the boundary control problem and identification

## SUMMARY

In the thesis boundary optimal control problem, i.e. the problem of supplying the gas-liquid mixture at the end of the well with fewer losses is considered and using the gradient method the computing algorithm to the solution of the considered problem is given. Then the boundary control problem with non-separated boundary conditions is considered. The method of quasilinearization for the optimal solution is applied and the given problem is reduced to the linear quadratic optimal control problem. To determine the parameters including the right side of the system of nonlinear differential equations the inverse problem is considered. Then to determine the coefficient of hydraulic resistance in gas-lift process in continuous and discrete cases the identification problem is considered and also the asymptotical computing algorithm is also given. The programs are prepared for the given algorithms using applied program package of "MATLAB". The adequacy of the offered mathematical models and efficiency of the algorithms are illustrated on the concrete practical example.

The following main results are obtained in the thesis:

1. The analytical solution of the equation describing the problem of optimal boundary control in continuous and discrete cases is given, and graphically using an interactive method the optimal solution is found.
2. The optimal solution to the boundary optimal control problem in gas-lift process using the gradient method is found and the numerical algorithms for this problem is given.
3. The optimal boundary control problem with non-separated boundary conditions using the quasilinearization method is solved, and efficient algorithms are given.
4. Asymptotic solution method and software is proposed for the defining the coefficient of hydraulic resistance in gas-lift process.

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ**

**BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**

**TƏTBİQİ RİYAZİYYAT ELMİ TƏDQİQAT İNSTİTUTU**

*Əlyazması hüququnda*

**HACIYEVA NAZİLƏ SƏXAVƏT QIZI**

# İDENTİFİKASİYA VƏ SƏRHƏD İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN EFFEKTİV HƏLLİ ÜSULLARI

3338.01 – Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

**AVTOREFERATI**

**BAKI - 2016**