НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ФАТАИ АБДУЛГАМИД оглы ИСАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУХВЕСОВЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2015

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

FƏTAYİ ABDULHƏMİD OĞLU İSAYEV

FURYE-BESSEL İNTEQRAL OPERATORLARI ÜÇÜN İKİÇƏKİLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN TƏDQİQİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2015

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Идеи и методы теории потенциалов и сингулярных интегральных операторов в настоящее время применяются не только в математической физике, но и в теории функций, в функциональном анализе, в теории вероятностей, в задачах теории приближений и в гармоническом анализе. При решении многочисленных краевых задач, встречающихся в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в задачах теории аналитических функций, а также в задачах механики метод теории потенциалов имеет богатую историю и успешную практику. Свойства потенциалов Рисса и сингулярных интегралов были исследованы в работах М. Рисса, Г. Харди, Дж. Литтлвуд, С.Л. Соболева, И.М. Стейна, Г. Вейса, О.В.Бесова, П.И. Лизоркина, С.Г. Самко, В. Кокилашвили, Б. Рубин и др. Из азербайджанских же математиков в этом направлении результаты принадлежат авторам А.Д. Гаджиев, С.К. Абдуллаев, Е.Г. Гусейнов, Р.Г. Сейфуллаев, В.С. Гулиев, И.А. Алиев, Р.М. Рзаев и др. Изложение ряда свойств потенциалов Рисса и сингулярных интегралов содержатся в монографиях И.М. Стейна[1], С.Г. Самко[2] и Б. Рубина[3].

Диссертация посвящена исследованиям некоторых задач теории Гармонического Анализа, ассоциированного с $\Delta_{B_{k,n}}$ дифференци-альным оператором Лаплас-Бесселя (Гармонического Анализа Бесселя), где $\Delta_{B_{k,n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},\ \gamma_i > 0,\ 1 \le k \le n$.

В отличие от классического случая, когда объектом исследования служат операторы типа свертки, порожденные обычным сдвигом $\tau^h,\ h \in R^n$ ($\tau^h \varphi(x) = \varphi(x-h)$), в работе рассматриваются сверточные структуры, порожденные обобщенным сдвигом ($B_{k,n}$-сдвигом), приспособленным к преобразованию Фурье-Бесселя.

Еще И.А. Киприяновым, Л.А. Ивановым[4] было показано, что объемный потенциал

$$u(x) = \int_{R_+^n} |y|^{2-n-|\gamma|} T^y f(x) (y')^\gamma \, dy$$

является решением $\Delta_{B_{k,n}}$ эллиптического уравнения

$$\Delta_{B_{k,n}} u(x) = f(x),$$

где $R_{k,+}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n;\ x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0\}$, $y' = (y_1, \ldots, y_k) \in R_+^k$.

Решение этой задачи содержит оператор преобразования, в одномерном случае введенный Б.М. Левитаном[5] и называемый оператором обобщенного сдвига или Бесселева сдвига (коротко ООС). Метод операторов преобразования своим широким применением, обязан работам Ж. Дельсарта[6], Ж.-Л. Лионса, Б.М. Левитана и других. Ряд важных результатов в этом направлении для гиперболических уравнений получен И.А. Киприяновым, Л.А. Ивановым.

Получение решения задачи в виде объемного потенциала подтверждает необходимость изучения различных свойств потенциалов, являющихся решением некоторых сингулярных дифференциальных уравнений.

В диссертации рассматриваются задачи об ограниченности $B_{k,n}$- максимального и дробно-максимального операторов, а также $B_{k,n}$-потенциалов Рисса и $B_{k,n}$-сингулярных интегральных операторов в весовых пространствах $L_{p,w,\gamma}(R_{k,+}^n)$. В диссертации

---

[1] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.:Мир, 1973, 342 с.
[2] Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Изд. Ростовского ун.-та, 1984, 208 с.
[3] Rubin B. Fractional integrals and potentials. Addison Wesley Longman Limited, Essex, 1996.
[4] Киприянов И.А., Иванов Л.А. Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями. Труды семинара С.Л.Соболева, № 1, Новосибирск, 1983г., с. 55-77.
[5] Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. УМН, 1951, т.6, №2, с.102-143.
[6] Delsarte J. Sur une extension de la formule of Taylor. J.Math.Pure appl., 1938, v.17, no.9, p.219-231.

доказаны двухвесовые неравенства для $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов и $(p,q)-$допустимых $B_{k,n}$-потенциальных операторов в весовых пространствах $L_{p,w,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Цель работы. Исследование ограниченности $B_{k,n}$-максимального и дробно-максимального операторов, $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов и $(p,q)-$допустимых $B_{k,n}$-потенциальных операторов в весовых пространствах $L_{p,w,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Общая методика исследований. В диссертационной работе ис-пользованы методы теории интегральных операторов, гармонического анализа, теории функциональных пространств и функционального анализа.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- Доказана весовая $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)-$ограниченность $B_{k,n}$-дробно-максимальных функций, $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$.

- Получен аналог неравенств типа Велланда $B_{k,n}$ - потенциала Рисса.

- Доказана весовая $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)-$ограниченность $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов для весов из класса Макенхаупта.

- Получены двухвесовые $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов.

- Получены двухвесовые слабые $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{1,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов.

- Получены двухвесовые $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $(p,q)-$допустимых $B_{k,n}$-потенциальных операторов.

- Получены двухвесовые слабые $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $(p,q)-$допустимых $B_{k,n}$-потенциальных операторов.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в априорных оценках весовых пространств при решении $\Delta_{B_{k,n}}$ эллиптического уравнения, а также в некоторых задачах математической физики и механики. Результаты диссертации являются новыми в теории потенциалов и сингулярных интегралов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела «Математический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. В.С. Гулиев), на семинарах отдела «Негармонический анализ» (рук. чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. Б.Т. Билалов), на семинарах отдела «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Г.И. Асланов), на семинарах отдела «Теория функций» (рук. д.ф.-м.н. В.Э. Исмаилов), на семинарах отдела «Дифференциальные уравнения» (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б. Алиев), на семинарах кафедры «Математический анализ» БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. С.К. Абдуллаев), на семинарах кафедры «Математический анализ» АГПУ (рук. д.ф.-м.н., проф. В.М. Курбанов), а также на Республиканской конференции по математике и механике, посвященной 100-летнему юбилею ак. И.И. Ибрагимова (2012), на международной конференции по математике «Operators in Morrey-type Spaces and Applications», посвященной 70-летнему юбилею проф. В.И. Буренкова (2011 г., Киршеир, Турция).

Публикации. Полное содержание диссертации опубликовано в 7 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающий 124 наименования. Объем диссертации составляет 124 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована ее цель и дан краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, а также краткое содержание самой работы.

Первая глава диссертации состоит из шести параграфов.

В первой главе получены ограниченность $B_{k,n}$- дробно-максимальных операторов $M_{B_{k,n}}^{\alpha}$, $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$, получен аналог неравенств типа Велланда $B_{k,n}$ - потенциала Рисса $I^{\alpha}_{B_{k,n}}$, доказана весовая $\left(L_{p,\gamma}, L_{p,\gamma}\right)$– ограниченность p – допустимых $B_{k,n}$ -сингулярных операторов для весов из класса Макенхаупта.

В 1.1. приводятся общие сведения: обозначения, определения и необходимые факты.

Прежде чем, перейти к приведению результатов 1.2, приведем необходимые обозначения и понятия.

Положим R^n, $x\cdot\xi = x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n$, $|x| = (x\cdot x)^{1/2}$, $x=(x'\cdot x'')$, $x'=(x_1,\ldots,x_k)\in R^k$, $x''=(x_{k+1},\ldots,x_n)\in R^{n-k}$, $E(x,r)=\left\{y\in R^n_{k,+};|x-y|<r\right\}$, $R^n_{k,+}=\left\{x\in R^n; x_1>0, x_2>0,\ldots,x_k>0\right\}$, $R^k_{+,+}=\left\{x\in R^k; x_1>0, x_2>0,\ldots,x_k>0\right\}$, ${}^{C}E(x,r)=R^n_{k,+}\setminus E(x,r)$ мы обозначим дополнение, $E'(x',r)=\left\{y'\in R^k_{+,+};|x'-y'|<r\right\}$ ${}^{C}E'(x',r)=R^k_{+,+}\setminus E'(x',r)$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$, $\gamma_1>0,\gamma_2>0,\ldots,\gamma_k>0$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_k$, $(x')^{\gamma}=x_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{\gamma_k}$. Пусть $S_{k,+}=\left\{x\in R^n_{k,+};|x|=1\right\}$. Для измеримого множества $E\subset R^n_{k,+}$, пусть $|E|_{\gamma}=\int\limits_E (x')^{\gamma}dx$, тогда $|E(0,r)|_{\gamma}=\omega(n,k,\gamma)r^{n+|\gamma|}$, где $\omega(n,k,\gamma)=|E(0,1)|_{\gamma}$.

Весом называется почти всюду положительная и локально интегрируемая функция $\omega: R^n_{k,+}\to R$. Через $L_{p,w,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ обозначим множество измеримых на $R^n_{k,+}$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)}\equiv\|f\|_{p,\omega,\gamma}=\left(\int\limits_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\omega(x)(x')^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty.$$

При $\omega=1$ пространство $L_{p,w,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ обозначим через $L_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ и норма в этом случае определяется как $\|f\|_{L_{p,1,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)}\equiv\|f\|_{L_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)}$.

$B_{k,n}$ оператор обобщенного сдвига определим следующим образом:

$$T^y f(x)=C_{\gamma,k}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi} f\left((x',y')_{\beta}, x''-y''\right)d\nu(\beta),$$

где
$$C_{\gamma,k}=\pi^{-\frac{k}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{|\gamma|}{2}\right)\prod_{i=1}^{k}\Gamma\left(\frac{\nu_i+1}{2}\right),$$

$(x',y')_{\beta}=\left((x_1,y_1)_{\beta_1}\ldots(x_k,y_k)_{\beta_k}\right)$,

$(x_i,y_i)_{\beta_i}=\left(x_i^2-2x_iy_i\cos\beta_i+y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $1\le i\le k$, $d\nu(\beta)=\prod\limits_{i=1}^{k}\sin^{\gamma_i-1}\beta_i d\beta_i$, $1\le k\le n$.

Заметим, что оператор сдвига тесно связан с $B_{k,n}$ сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

В 1.2 с помощью оператора обобщенного сдвига бесселя определены и исследованы максимальные и дробно-максимальные функции.

Определим $B_{k,n}$ -максимальную функцию:

$$M_{B_{k,n}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\omega(n,k,\gamma)r^{n+|\gamma|}}\int\limits_{E(0,r)}T^y|f(x)|(y')^{\gamma}dy$$

и $B_{k,n}$ дробно-максимальную функцию

$$M^{\alpha}_{B_{k,n}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\omega(n,k,\gamma)r^{n+|\gamma|-\alpha}}\int\limits_{E(0,r)}T^y|f(x)|(y')^{\gamma}dy,$$
$$0\le\alpha<n+|\gamma|.$$

Отметим, что при $\alpha=0$ $M^0_{B_{k,n}}f(x)=M_{B_{k,n}}f(x)$.

Аналогично известному классу Макенхаупта A_p, рассмотрим для $1\le p<\infty$ следующий класс $A_{p,\gamma}$:

Определение 1. Скажем, что весовая функция принадлежит классу $A_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ для $1<p<\infty$, если

$$\sup_{x\in R^n_{k,+},r>0}|E(x,r)|^{-1}_{\gamma}\int\limits_{E(x,r)}\omega(y)(y')^{\gamma}dy\left(|E(x,r)|^{-1}_{\gamma}\int\limits_{E(x,r)}\omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)(y')^{\gamma}dy\right)^{p-1}<\infty$$

,

и принадлежит классу $A_{1,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$, если существует постоянная C такая, что для любого $x \in R_{k,+}^{n}$ и $r > 0$

$$\left|E(x,r)\right|_{\gamma}^{-1} \int_{E(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)(y')^{\gamma}\, dy \le C \operatorname*{ess\,sup}_{y\in E(x,r)} \omega(y).$$

Далее доказана теорема, являющаяся весовой $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)$ ограниченностью $B_{k,n}$ - дробно-максимальных операторов.

Теорема 1. Пусть $0 \le \alpha < n+|\gamma|$, $1 < p < \dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(i) Существует постоянная C, такая, что для всех $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{R_{k,+}^{n}} \left(M_{B_{k,n}}^{\alpha}\left(f\omega^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}}\right)(x)\right)^{q} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(ii) $\omega \in A_{1+\frac{q}{p'},\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Теорема 2. Пусть $q = \dfrac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha}$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(i) $$\int_{\left\{x\in R_{k,+}^{n}:\ M_{B_{k,n}}^{\alpha}\left(f\omega^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}}\right)(x)>\lambda\right\}} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx \le C\lambda^{-q}\left(\int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|\omega(x)(x')^{\gamma}\, dx\right)^{q},$$

где постоянная C не зависит от f и $\lambda > 0$.

(ii) $\omega \in A_{1,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(i) Существует постоянная $C > 0$, такая, что для всех $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ справедливо неравенство

$$\int_{R_{k,+}^{n}} \left(M_{B_{k,n}}(f)(x)\right)^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx \le C \int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx.$$

(ii) $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Следствие 2. Следующие условия эквивалентны:

(i) Существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $f \in L_{1,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ справедливо неравенство

$$\int_{\left\{x\in E(0,r):\ M_{B_{k,n}} f(x)>\lambda\right\}} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx f \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_{1,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)},$$

где постоянная C не зависит от f и $\lambda > 0$.

(ii) $\omega \in A_{1,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

В параграфе 1.3 рассмотрен $B_{k,n}$ дробный интеграл

$$I_{B_{k,n}}^{\alpha} = \int_{R_{k,+}^{n}} T^{y}|x|^{\alpha-n-|\gamma|} f(y)(y')^{\gamma}\, dy,\ 0 < \alpha < n+|\gamma|.$$

В этом параграфе дано полное описание мер, для которых пользуясь методом G.Wellanda можно доказать справедливость весовых оценок для дробного интеграла $I_{B_{k,n}}^{\alpha}$.

Теорема 3. Положим, что $1 < p < \dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Тогда неравенство

$$\left(\int_{R_{k,+}^{n}} \left|I_{B_{k,n}}^{\alpha}\left(f\omega^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}}\right)(x)\right|^{q} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

справедливо для всех $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ с постоянной $c>0$, не зависящей от f тогда и только тогда, когда $\omega \in A_{1+\frac{q}{p'},\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Замечание 1. Для потенциала Рисса, теорема 3 получена в работе B.Muckenhoupt и R.L.Wheeden[7]. Эти результаты были доказаны с использованием метода, описанного G.Welland[8].

Главная цель 1.4 установить весовые L_p-оценки для норм сингулярного интегрального оператора, порожденного оператором обобщенного сдвига ($B_{k,n}$ сингулярного оператора):

$$A_{B_{k,n}} f(x) = p.v. \int_{R_{k,+}^{n}} \frac{\Omega(\theta)}{|y|^{n+|\gamma|}} \left[T^{y} f(x)\right](y')^{\gamma}\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R_{k,+}^{n}\setminus E(0,\varepsilon)} \frac{\Omega(\theta)}{|y|^{n+|\gamma|}} \left[T^{y} f(x)\right](y')^{\gamma}\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x), \tag{1}$$

где $\theta = y/|y|$, характеристика $\Omega(\theta)$ принадлежит некоторому функциональному пространству на полушарии $S_{k,+}$ и удовлетворяет условию «сокращения»

$$\int_{S_{k,+}} \Omega(\theta)(\theta')^{\gamma}\, d\sigma(\theta) = 0$$

($d\sigma(\theta)$является областью элемента сферы $|\theta| = 1$).

В 1.4 нами доказана следующая теорема.

Теорема 5. Предположим, что характеристика $\Omega(\theta)$ $B_{k,n}$ сингулярного интеграла (1) удовлетворяет условиям

$$\int_{S_{k,+}} \Omega(\theta)(\theta')^{\gamma}\, d\sigma(\theta) = 0, \quad \sup_{\theta\in S_{k,+}} \Omega(\theta) < \infty .$$

Пусть также ω положительная функция, для которой существует постоянная $c_1 > 0$, такая, что

$$\sup_{2^{k-2}\le|x|<2^{k+1}} \omega(x) \le c_1 \inf_{2^{k-2}\le|x|<2^{k+1}} \omega(x), \tag{2}$$

$k \in Z$ и $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$. Тогда

i₁) существует постоянная C_1, независящая от f и ε, такая, что для всех $f \in L_{p,\omega}\left(R_{k,+}^{n}\right)$, $1<p<\infty$

$$\int_{R_{k,+}^{n}} \left|A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)\right|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx \le C_1 \int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx .$$

i₂) предел $\lim_{\varepsilon\to 0} A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)$, который будет обозначен через $A_{B_{k,n}} f$, существует в $L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$, $1<p<\infty$ и

$$\int_{R_{k,+}^{n}} \left|A_{B_{k,n}} f(x)\right|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx \le C_1 \int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|^{p} \omega(x)(x')^{\gamma}\, dx .$$

ii₁) существует постоянная C_2, независящая от f, ε и λ такая, что для всех $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right), \lambda > 0$

$$\int_{\left\{x\in R_{k,+}^{n}:\, \left|A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)\right|>\lambda\right\}} \omega_1(x)(x')^{\gamma}\, dx \le \frac{C_2}{\lambda} \int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|\omega(x)(x')^{\gamma}\, dx .$$

ii₁) предел $\lim_{\varepsilon\to 0} A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)$, который будет обозначен через $A_{B_{k,n}} f$, существует в $L_{1,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$, и

$$\int_{\left\{x\in R_{k,+}^{n}:\, \left|A_{B_{k,n}} f(x)\right|>\lambda\right\}} \omega_1(x)(x')^{\gamma}\, dx \le \frac{C_2}{\lambda} \int_{R_{k,+}^{n}} |f(x)|\omega(x)(x')^{\gamma}\, dx .$$

В 1.5 доказана ограниченность сублинейных операторов, порожденных $B_{k,n}$ дифференциальным оператором Бесселя.

Определение 2. ($p-$допустимый $B_{k,n}$-сингулярный оператор). Пусть $1<p<\infty$. Сублинейный оператор T мы будем называть $p-$допустимым $B_{k,n}$-сингулярным оператором, если:

1) T удовлетворяет неравенству

---

[7] Muckenhoupt B., Wheeden R. Weighted norm inequalities for fractional integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 1974, v.192, p.261-274.

[8] Welland G. Weighted norm inequalities for fractional integrals. Proc. Amer. Math. Soc. 51, no.1 (1975), p.143-148.

$$\chi_{E(x,r)}(z)\left|T\left(f\chi_{R^n_{k,+}\setminus E(x,2r)}\right)(z)\right|\le C\chi_{E(x,r)}(z)\int\limits_{R^n_{k,+}\setminus E(x,2r)} T^z|y|^{-n-|\gamma|}|f(y)|(y')^\gamma\,dy \tag{3}$$

для $x\in R^n_{k,+}$ и $r>0$;

2) T ограниченно действует на пространстве $L_{p,\gamma}$.

Определение 3. (слабый $p-$допустимый $B_{k,n}$-сингулярный оператор). Пусть $1\le p<\infty$. Сублинейный оператор T мы будем называть слабым $p-$допустимым $B_{k,n}$-сингулярным оператором, если:

1) T удовлетворяет неравенству (3);

2) T ограниченно действует из пространства $L_{p,\gamma}$ в $WL_{p,\gamma}$.

Определение 4. ($(p,q)-$допустимый $B_{k,n}$-потенциальный оператор). Пусть $1<p<\infty$. Сублинейный оператор T_α, $0<\alpha<n+|\gamma|$, мы будем называть $(p,q)-$допустимым $B_{k,n}$-потенциальным оператором, если:

1) T_α удовлетворяет неравенству

$$\chi_{E(x,r)}(z)\left|T_\alpha\left(f\chi_{R^n_{k,+}\setminus E(x,2r)}\right)(z)\right|\le$$

$$\le C\chi_{E(x,r)}(z)\int\limits_{R^n_{k,+}\setminus E(x,2r)} T^z|y|^{\alpha-n-|\gamma|}|f(y)|(y')^\gamma\,dy \tag{4}$$

для $x\in R^n_{k,+}$ и $r>0$;

2) T_α ограниченно действует из пространства $L_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ в $L_{q,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$.

Определение 5. (слабый $(p,q)-$допустимый $B_{k,n}$-потенциальный оператор). Пусть $1\le p<\infty$. Сублинейный оператор T_α, $0<\alpha<n+|\gamma|$, мы будем называть слабый $(p,q)-$допустимым $B_{k,n}$-потенциальным оператором, если:

1) T_α удовлетворяет неравенству (4);

2) T_α ограниченно действует из пространства $L_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ в $WL_{q,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$.

Теорема 6. Пусть ω положительная функция, удовлетворяющая условию (2). Тогда следующие утверждения справедливы:

(a) Если оператор T является $p-$допустимым $B_{k,n}$-сингулярным оператором, $1<p<\infty$ и $\omega\in A_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$, тогда оператор T ограниченно действует на пространстве $L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$, т.е., существует постоянная c_3, независящая от f, такая, что для всех $f\in L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$

$$\int\limits_{R^n_{k,+}}|Tf(x)|^p\,\omega(x)(x')^\gamma\,dx\le c_3\int\limits_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\,\omega(x)(x')^\gamma\,dx.$$

(b) Если оператор T является слабым $p-$допустимым $B_{k,n}$-сингулярным оператором, $1\le p<\infty$, и $\omega\in A_{p,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$, тогда оператор T ограниченно действует из $L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ в $WL_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$, т.е., существует постоянная c_4, независящая от f и λ, такая, что для всех $f\in L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$

$$\int\limits_{\left\{x\in R^n_{k,+}:\,|Tf(x)|>\lambda\right\}}\omega(x)(x')^\gamma\,dx\le\frac{c_4}{\lambda^p}\int\limits_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\,\omega(x)(x')^\gamma\,dx.$$

Определение 6. Функцию K, определенную на $R^n_{k,+}$, будем называть $B_{k,n}$ сингулярным ядром в пространстве $R^n_{k,+}$, если

i) $K\in C^\infty\left(R^n_{k,+}\right)$;

ii) $K(rx)=r^{-n-|\gamma|}K(x)$ для каждого $r>0$, $x\in R^n_{k,+}$;

iii) $\int\limits_{S_{k,+}}K(x)(x')^\gamma\,d\sigma(x)=0$, где $d\sigma$ является элементом области $S_{k,+}$.

Следствие 3. Пусть $p \in (1,\infty)$, T является $B_{k,n}$ сингулярным оператором (1) с $B_{k,n}$ сингулярным ядром, $\omega(x)$ весовая функция на $R^n_{k,+}$, $\omega \in A_{p,\gamma}(R^n_{k,+})$ и удовлетворяет условию (2). Тогда оператор T ограниченно действует на $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$.

Следствие 4. Пусть $p \in [1,\infty)$, T является $B_{k,n}$ сингулярным оператором (1) с $B_{k,n}$ сингулярным ядром, $\omega(x)$ весовая функция на $R^n_{k,+}$, $\omega \in A_{p,\gamma}(R^n_{k,+})$ и удовлетворяет условию (2). Тогда оператор T ограниченно действует из $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ в $WL_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$.

Во второй главе рассмотрены двухвесовые неравенства для $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов и $(p,q)-$допустимых $B_{k,n}$-потенциальных операторов.

В 2.1 получены весовые L_p-оценки для норм $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных интегральных операторов.

Теорема 7. Пусть $p \in (1,\infty)$ и оператор T является $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ являются весовыми функциями на $R^n_{k,+}$ и удовлетворяют следующим трем условиям:

(a) существует $b>0$ такое, что

$$\sup_{|x|/8\le|y|<8|x|} \omega_1(y) \le b\omega(x) \text{ для п.в. } x \in R^n_{k,+},$$

(b)

$$A \equiv \sup_{r>0}\left(\int_{{}^C E(0,2r)} \omega_1(x)|x|^{-(n+|\gamma|)p}(x')^\gamma\, dx\right)\left(\int_{E(0,r)} \omega^{1-p'}(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{p-1} < \infty,$$

(c)

$$B \equiv \sup_{r>0}\left(\int_{E(0,r)} \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx\right)\left(\int_{{}^C E(0,2r)} \omega^{1-p'}(x)|x|^{-(n-|\gamma|)p'}(x')^\gamma\, dx\right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда существует постоянная c, независящая от f, такая, что для любой функции $f \in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$

$$\int_{R^n_{k,+}} |Tf(x)|^p \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx \le c \int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma\, dx.$$

Теорема 8. Пусть $p \in [1,\infty)$ и оператор T является слабым $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ являются весовыми функциями на $R^n_{k,+}$ и выполняются условия *(a)* , *(b)* ,*(c)*.

Тогда существует постоянная c, независящая от f и $\lambda>0$, такая, что для всех $f \in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$

$$\int_{\{x\in R^n_{k,+}:\, |Tf(x)|>\lambda\}} \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx \le \frac{c}{\lambda^p}\int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma\, dx.$$

Теорема 9. Пусть $p \in [1,\infty)$, $1 \le m < k \le n$, для $p>1$ оператор T является $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором и для $p \ge 1$ оператор T является слабым $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x_{1,m})$, $\omega_1(x_{1,m})$ являются весовыми функциями на R^m_{++} и удовлетворяют следующим трем условиям:

$(a_{m,k})$ существует $b>0$ такое, что

$$\sup_{|x_{1,m}|/8\le|y_{1,m}|<8|x_{1,m}|} \omega_1(y_{1,m}) \le b\omega(x_{1,m}) \text{ для п.в. } x_{1,m} \in R^m_{+,+},$$

$$(b_{m,k})\quad A_{m,k} \equiv \sup_{r>0}\left(\int_{{}^C E_m(0,2r)} \omega_1(x_{1,m})|x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)p} x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dx_{1,m}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{E_m(0,r)} \omega^{1-p'}(x_{1,m}) x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dx_{1,m}\right)^{p-1} < \infty$$

$$(c_{m,k})\quad B_{m,k} \equiv \sup_{r>0}\left(\int_{E_m(0,r)} \omega_1(x_{1,m}) x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dx_{1,m}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{{}^{C}E_m(0,2r)}\omega^{1-p'}(x_{1,m})|x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)p'}x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}dx_{1,m}\right)^{p-1}<\infty .$$

Тогда для $p>1$ оператор T ограниченно действует из пространства $L_{p,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$ в $L_{p,\omega_1,\gamma}(R_{k,+}^n)$ и для $p\ge 1$ из $L_{1,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$ в $WL_{1,\omega_1,\gamma}(R_{k,+}^n)$.

Следствие 5. Пусть $p\in[1,\infty)$, $1\le m<k\le n$ и T является $B_{k,n}$ максимальным или $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x_{1,m})$, $\omega_1(x_{1,m})$ являются весовыми функциями на $R_{+,+}^m$ и удовлетворяют условиям *($a_{m,k}$)*, *($b_{m,k}$)*, *($c_{m,k}$)*. Тогда для $p>1$ оператор T ограниченно действует из пространства $L_{p,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$ в $L_{p,\omega_1,\gamma}(R_{k,+}^n)$ и для $p\ge 1$ из $L_{p,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$ в $WL_{p,\omega_1,\gamma}(R_{k,+}^n)$.

Теорема 10. Пусть $p\in[1,\infty)$, $1\le m<k\le n$, для $p>1$ оператор T является $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором и для $p\ge 1$ оператор T является слабым $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x_{m+1,n})$, $\omega_1(x_{m+1,n})$ являются весовыми функциями на $R_{k-m,+}^{n-m}$ и удовлетворяют следующим трем условиям:

($a_{m+1,k}$) существует $b>0$ такое, что

$$\sup_{|x_{m+1,n}|/8\le|y_{m+1,n}|<8|x_{m+1,n}|}\omega_1(y_{m+1,n})\le b\omega(x_{m+1,n}) \text{ для п.в. } x_{m+1,n}\in R^{n-m},$$

($b_{m+1,k}$) $$A_{m+1,k}\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E_{n-m}(0,r)}\omega^{1-p'}(x_{m+1,n})x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}\right)^{p-1}\times$$

$$\times\int_{{}^{C}E_{n-m}(0,2r)}\omega_1(x_{m+1,n})|x_{m+1,n}|^{-(n-m+|\gamma_{m+1,k}|)p}x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}<\infty ,$$

($c_{m+1,k}$) $$B_{m+1,k}\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E_{n-m}(0,r)}\omega_1(x_{m+1,n})x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{{}^{C}E_{n-m}(0,2r)}\omega^{1-p'}(x_{m+1,n})|x_{m+1,n}|^{-(n-m+|\gamma_{m+1,k}|)p'}x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}\right)^{p-1}<\infty .$$

Тогда для $p>1$ оператор T ограниченно действует из пространства $L_{p,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$ в $L_{p,\omega_1,\gamma}(R_{k,+}^n)$ и для $p\ge 1$ из $L_{p,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$ в $WL_{p,\omega_1,\gamma}(R_{k,+}^n)$.

Теорема 11. Пусть $p\in(1,\infty)$ и оператор T является $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(t)$ весовая функция на $(0,\infty)$, $\omega_1(t)$ положительная, возрастающая на $(0,\infty)$ весовая функция и весовая пара $(\omega(|x|),\omega_1(|x|))$ удовлетворяет условиям *(a), (b)* . Тогда существует постоянная c , такая, что для любой функции $f\in L_{p,\omega,\gamma}(R_{k,+}^n)$

$$\int_{R_{k,+}^n}|Tf(x)|^p\omega_1(|x|)(x')^\gamma dx\le c\int_{R_{k,+}^n}|f(x)|^p\omega(|x|)(x')^\gamma dx . \qquad (6)$$

Теорема 12. Пусть $p\in(1,\infty)$ и пусть T является $p-$допустимым $B_{k,n}$ сингулярным оператором. Кроме того, пусть $\omega(t)$ весовая функция на $(0,\infty)$, $\omega_1(t)$ положительная, убывающая на $(0,\infty)$ и весовая пара $(\omega(|x|),\omega_1(|x|))$ удовлетворяет условиям *(a) , (c)* . Тогда выполняется неравенство (6).

В 2.2 доказываются двухвесовые неравенства для $(p,q)-$допустимых $B_{k,n}$ потенциальных операторов.

Теорема 13. Пусть $1<p<q<\infty$ и оператор T_α является $(p,q)-$допустимым $B_{k,n}$ потенциальным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ являются весовыми функциями на $R_{k,+}^n$ и удовлетворяют следующим трем условиям:

(a_1) существует $b>0$ такое, что

$$\sup_{|x|/8\le|y|<8|x|}\omega_1(y)^{1/q}\le b\omega(x)^{1/p} \text{ для п.в. } x\in R_{k,+}^n ,$$

(b_1)

$$A \equiv \sup_{r>0}\left(\int_{{}^C E(0,2r)} \omega_1(x)|x|^{-(n+|\gamma|+\alpha)q}(x')^\gamma\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{E(0,r)} \omega^{1-p'}(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

(c_1)

$$B \equiv \sup_{r>0}\left(\int_{E(0,r)} \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{{}^C E(0,2r)} \omega^{1-p'}(x)|x|^{-(n-|\gamma|-\alpha)(1-p')}(x')^\gamma\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

.

Тогда существует постоянная c, независящая от f, такая, что для любой функции $f \in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$

$$\left(\int_{R^n_{k,+}} |T_\alpha f(x)|^p \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{1/p}.$$

Теорема 14. Пусть $1 \le p < q < \infty$ и оператор T_α является слабым (p,q)–допустимым $B_{k,n}$ потенциальным оператором. Кроме того, пусть $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ являются весовыми функциями на $R^n_{k,+}$, для которых выполняются условия *(a1),(b1), (c1)*.

Тогда существует постоянная c, независящая от f, такая, что для всех $f \in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$

$$\left(\int_{\{x\in R^n_{k,+}:\,|T_\alpha f(x)|>\lambda\}} \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{1/q} \le \frac{c}{\lambda^p}\left(\int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma\, dx\right)^{1/p}.$$

Следствие 6. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n+|\gamma|$ и $1/p - 1/q = \alpha/(n+|\gamma|)$. Кроме того, пусть $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ являются весовыми функциями на $R^n_{k,+}$, для которых выполняются условия *(a1),(b1), (c1)*. Тогда оператор $I^\alpha_{B_{k,n}}$ ограниченно действует из пространства $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ в $L_{q,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$.

Следствие 7. Пусть $1 \le p < q < \infty$, $0 < \alpha < n+|\gamma|$ и $1/p - 1/q = \alpha/(n+|\gamma|)$. Кроме того, пусть $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ являются весовыми функциями на $R^n_{k,+}$, для которых выполняются условия *(a1),(b1),(c1)*. Тогда оператор $I^\alpha_{B_{k,n}}$ ограниченно действует из пространства $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ в $WL_{q,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$.

Теорема 15. Пусть $1 < p < q < \infty$ и оператор T_α является (p,q)–допустимым $B_{k,n}$ потенциальным оператором. Кроме того, пусть $\omega(t)$ весовая функция на $(0,\infty)$, $\omega_1(t)$ положительная, возрастающая на $(0,\infty)$ функция и весовая пара $(\omega(|x|),\omega_1(|x|))$ удовлетворяет условиям *(a1),(b1)*. Тогда существует постоянная $c > 0$, такая, что для любой функции $f \in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$

$$\left(\int_{R^n_{k,+}} |Tf(x)|^q \omega_1(|x|)(x')^\gamma\, dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p \omega(|x|)(x')^\gamma\, dx\right)^{1/p}. \qquad (7)$$

Теорема 16. Пусть $1 < p < q < \infty$ и оператор T_α является (p,q)–допустимым $B_{k,n}$ потенциальным оператором. Кроме того, пусть $\omega(t)$ весовая функция на $(0,\infty)$, $\omega_1(t)$ положительная, убывающая на $(0,\infty)$ функция и весовая пара $(\omega(|x|),\omega_1(|x|))$ удовлетворяет условиям *(a1),(c1)*. Тогда справедливо неравенство (7).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, чл.-корр. НАН Азербайджана, доктору физико-математических наук, профессору В.С. Гулиеву за постановку задачи, обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. **Isayev F.A. and Safarov Z.V.** Two-weighted inequality for some sublinear operators in Lebesgue spaces, associated with the Laplase-Bessel differential operators. Operators in Morrey-type spaces and applications OMTSA, 2011. Dedicated to 70th birthday of prof. V.I. Burenkov, Ahi Evran University, Kirsheir, Turkey, 2011, may 20-27, p.63,
2. **Isayev F.A. and Safarov Z.V.** Two -weighted inequality for some $B_{k,n}$ -singular operators in weighted Lebesgue spaces. “Functions theory and problems of hormonic analysis ”. Proceedings of the International conferanct devoted to the 100-th anniversary of academician İ.İ.İbrahimov, Baku, 2012, p.117-120.
3. **Guliyev V.S. and Isayev F.A.** The two-weighted inequalities for sublinear operators generated by singular integrals in weighted Lebesgue spaces. Acta Applicandae Mathematicae. 2013,v.127, No.1,p.1-16 .
4. **Isayev F.A. and Safarov Z.V. W**eighted inequality for singular integrals in Lebesgue spaces, associated with the Laplase-Bessel differential operators. Proceedings of NAS of Azerbaijan, 2012, v.36, No.1, p.61-68.
5. **Isayev F.A. and Safarov Z.V. W**eighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals in the bessel setting. News APU, Baki, 2013, No.4, p.19-24.
6. **Isayev F.A. W**eighted inequality for sublinear operators, associated wit the Laplase-bessel differential operators. News APU, Baki, 2014, No.3, p.23-29.
7. **Guliyev V.S., Isayev F.A. and Safarov Z.V.** Two -weighted inequality for *p*-admissible $B_{k,n}$ -singular operators in weighted Lebesgue spaces. Proceedings of NAS of Azerbaijan, 2014, v.40, No.1, p.122-146.

FƏTAYİ ABDULHƏMİD oğlu İSAYEV

FURYE-BESSEL İNTEQRAL OPERATORLARI ÜÇÜN İKİÇƏKİLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi Bessel diferensial operatorunun doğurduğu maksimal funksiya, kəsr maksimal funksiya, Riss potensialı, sinqulyar inteqral və subxətti inteqralların bəzi xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakılardır:

- $B_{k,n}$ kəsr maksimal funksiyalar üçün çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)$ $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$ bərabərsizlikləri isbat edilmişdir.
- $B_{k,n}$ Riss potensialı üçün Velland tipli bərabərsizliklərinin analoqu alınmışdır.
- $p-$tipli $B_{k,n}$ sinqulyar operatorların Makenxaupt sinfindən olan çəkilər üçün çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)$ məhdudluğu isbat edilmişdir.
- $p-$tipli $B_{k,n}$ sinqulyar operatorlar üçün ikiçəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizlikləri alınmışdır.
- $p-$tipli $B_{k,n}$ sinqulyar operatorlar üçün zəif ikiçəkili $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{1,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizlikləri alınmışdır.
- $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$ potensial operatorlar üçün ikiçəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizlikləri alınmışdır.
- $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$ potensial operatorlar üçün zəif ikiçəkili $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizlikləri alınmışdır.

FATAI ABDULHAMID oglu ISAYEV

INVESTIGATIONS TWO-WEIGHTED INEQUALITIES FOR FURYE-BESSEL INTEGRAL OPERATORS

SUMMARY

In the dissertation are stidied the some properties of maximal functions, fractional maximal functions and Riesz potentials, associated by the Bessel differential operators. The principal results of dissertation are as follows:

- For the $B_{k,n}$ fractional maximal functions weighted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)$, $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$ inequalities is proved.
- Analogue of theorems of Welland for the $B_{k,n}$ Riesz potensials is obtained.
- For the p-admissible $B_{k,n}$ singular operators weighted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)$ boundedness with weights from Muchenhoupt classes is proved.
- For the p-admissible $B_{k,n}$ singular operators two-weihted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is obtained.
- For the p-admissible $B_{k,n}$ singular operators two-weihted weak $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{1,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is proved.
- For the $(p,q)-$admissible $B_{k,n}$ potensial operators two-weihted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is obtained.
- For the $(p,q)-$admissible $B_{k,n}$ potensial operators two-weihted weak $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is proved.

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Sinqulyar inteqral operatorlar və potensiallar nəzəriyəsinin ideya və metodları hal hazırda təkcə riyazi fizika məsələlərinə deyil, həmçinin funksiyalar nəzəriyyəsinin, funksional analizin, ehtimal nəzəriyyəsinin, yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin və harmonik analizin bəzi məsələlərinə tətbiq edilir. Xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin bir sıra sərhəd məsələlərinin, analitik funksiyalar nəzəriyyəsinin məsələlərinin və eləcə də mexanikanın bəzi məsələlərinin həllində potensiallar nəzəriyyəsinin metodları tarixən praktik əhəmiyyət kəsb etmişdir. Riss potensialının və sinqulyar inteqralların xassələri M.Riss, Q.X.Hardi, C.E.Littlvud, S.L.Sobolev, İ.M. Steyn, Q. Veys, O.V.Besov, P.İ. Lizorkin, S.Q.Samko, V.M.Кокilaşvili, B. Rubin və başqalarının işlərində tədqiq edilmişdir. Azərbaycan riyaziyyatçılarından da bu istiqamətdə A.C. Haciyev, S.K.Abdullayev, E.Q.Hüseynov, R.Q.Seyfullayev, V.S.Quliyev, İ.A. Aliyev, R.M.Rzayev və başqa müəlliflərin işlərini qeyd etmək olar. Riss potensialının və sinqulyar inteqralların xassələri İ.M.Steyn[9], S.Q.Samko[10] və B. Rubin[11] monaqrafiyalarında ətraflı öz əksini tapmışdır.

Dissertasiya $\Delta_{B_{k,n}}$ Laplas-Bessel differensial operatoru ilə bağlı Harmonik Analizin bəzi məsələlərinnin tədqiqinə həsr olunmuşdur (Laplas-Bessel Harmonik Analizi)

$$,\Delta_{B_{k,n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},\ \gamma_i > 0,\ 1 \le k \le n .$$

Klassik haldan fərqli olaraq tədqiqat obyekti adi $\tau^h,\ h \in R^n$ ($\tau^h \varphi(x) = \varphi(x-h)$ sürüşmənin doğurduğu bürümə operatorları deyil,

9 Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.:Мир, 1973, 342 с.

10 Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Изд. Ростовского ун.-та, 1984, 208 с.

11 Rubin B. Fractional integrals and potentials. Addison Wesley Longman Limited, Essex, 1996.

Furye –Bessel çevirməsinə uyğun ümumiləşmiş sürüşmənin ($B_{k,n}$ - sürüşmə) doğurduğu bürünmə operatorlarıdır.

İ.A. Kipriyanov, L.A. İvanov[12] göstərmişdir ki,

$$u(x) = \int_{R^n_{k,+}} |y|^{2-n-|\gamma|} T^y f(x) (y')^{\gamma} dy$$

$B_{k,n}$ -həcm potensialı

$$\Delta_{B_{k,n}} u(x) = f(x),$$

sinqulyar diferensial tənliyin həllidir, burada

$R^n_{k,+} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n;\ x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0\}$,

$y' = (y_1, \ldots, y_k) \in R^k_+$.

Bu məsələnin həlli $B_{k,n}$ -sürüşmə operatorunun doğurduğu bürümə operatoru ilə ifadə edilir. Belə ki, bir ölçülü halda bu sürüşmə operatoru B.M.Levitan[13] daxil etmiş və bu operatoru ümumiləşmiş sürüşmə operatoru və ya Bessel sürüşməsi adlandırmışdır (ÜSO). J.Delsart[14], J-L.Lions, B.M.Levitan və s. işləri ümumiləşmiş sürüşmə operatorlar metodunun geniş tətbiq olunmasına imkan yaratmışdır. Hiperbolik tipli tənliklər üçün bu istiqamətdə mühüm nəticələr İ.A.Kipriyanov, L.A.İvanov tərəfindən alınmışdır.

Yuxarıdakı məsələnin həllinin $B_{k,n}$ -həcm potensialı şəklində olması bu kimi bəzi sinqulyar diferensial tənliklərin həlli üçün $B_{k,n}$ - potensialın müxtəlif xassələrini öyrənməyin zəruriliyini göstərir.

Dissertasiya işində $B_{k,n}$ - maksimal və kəsr maksimal operatorun, $B_{k,n}$ Riss potensialının və $B_{k,n}$ - sinqulyar inteqral operatorun $L_{p,w,\gamma}(R^n_{k,+})$ çəkili Lebeq fəzalarında məhdudluğu məsələlərinə baxılmışdır. Həmçinin dissertasiyada p-tipli $B_{k,n}$ - sinqulyar operator

12 Киприянов И.А., Иванов Л.А. Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями. Труды семинара С.Л.Соболева, № 1, Новосибирск, 1983г., с. 55-77.

13 Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. УМН, 1951, т.6, №2, с.102-143.

14 Delsarte J. Sur une extension de la formule of Taylor. J.Math.Pure appl., 1938, v.17, no.9, p.219-231.

və $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$- potensial operatorlar üçün $L_{p,w,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ çəkili Lebeq fəzalarında ikiçəkili bərabərsizliklər isbat edilmişdir.

İşin məqsədi. $B_{k,n}$-maksimal və kəsr maksimal operatoru, $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatoru, $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatoru çəkili $L_{p,w,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ fəzalarında tədqiq etmək.

Ümumi tədqiqat üsulları. Dissertasiya işində inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin, harmonik analizin, funksional fəzalar nəzəriyyəsinin və funksional analizin metodlarından istifadə edilmişdir.

Elmi yenilik. İşdə aşağıdakı yeni nəticələr alınmışdır:

- $B_{k,n}$-kəsr- maksimal operatorun çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)-$ məhdudluğu isbat edilmişdir, $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$.
- $B_{k,n}$-Riss potensialı üçün Velland tipli bərabərsizliyin anoloqu alınmışdır.
- $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatorun Makenxaupt sinifindən olan çəkilər üçün çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)-$ məhdudluğu isbat edilmişdir.
- $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator üçün ikiçəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizliyi alınmışdır.
- $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator üçün ikiçəkili zəif $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{1,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizliyi alınmışdır..
- $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatoru üçün ikiçəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizliyi alınmışdır.
- $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatoru üçün ikiçəkili zəif $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ bərabərsizliyi alınmışdır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işi nəzəri xarakter daşıyır. Alınmış nəticələr çəkili fəzalarda $\Delta_{B_{k,n}}$ elleptik tənliyinin həllinin aprior qiymətləndirilməsində, həmçinin riyazi fizikanın və mexanikanın bəzi məsələlərində istifadə oluna bilər. Dissertasiyada alınan nəticələr potensiallar və sinqulyar inteqrallar nəzəriyyəsində yenidir.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyadakı əsas nəticələr AMEA RMİ-nin «Riyazi analiz» şöbəsinin seminarında (rəhbər AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S. Quliyev), «Qeyri -harmonik analiz » şöbəsinin seminarında (rəhbər AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.T.Bilalov), «Funksional analiz» şöbəsinin seminarında (rəhbər f-r.e.d, prof. H.İ. Aslanov), «Funksiyalar nəzəriyyəsi» şöbəsinin seminarında (rəhbər f-r.e.d. V.E.İsmayılov), BDU-nun «Riyazi analiz» kafedrasının seminarında (rəhbər f-r.e.d, prof. S.K. Abdullayev), həmçinina akad. İ.İ.İbrahimovun 100- illik yubleyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə respublika konfrasında (2012), V.İ.Burenkovun 70-illik yubleyinə həsr olunmuş «Operators in Morrey-type Spaces and Applications» beynəlxalq konfransda (2011, Kırşehir, Türkiyə) məruzə edilmişdir.

Nəşrlər. Müəllifin avtoreferatın sonunda qeyd olunmuş 7 elmi işində dissertasiyanın tam məzmunu öz əksini tapmışdır.

İşin həcmi və strukturu. Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və 124 ədəbiyyat siyahısından təşkil olunmuşdur. Dissertasiyanın həcmi 124 səhifədən ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Girişdə dissertasiya işinin aktuallığı əsaslandırılmış, onun məqsədi qeyd olunmuş, dissertasiya ilə bağlı işlərin qısa xülasəsi və eləcə də dissertasiyanın qısa məzmunu verilmişdir.

Dissertasiyanın birinci fəsli altı paraqrafdan ibarətdir.

Birinci fəsildə $M^{\alpha}_{B_{k,n}}$ $B_{k,n}$-kəsr-maksimal operatorun çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)-$məhdudluğu, $I^{\alpha}_{B_{k,n}}$ $B_{k,n}$-Riss potensialı üçün Velland tipli bərabərsizliyin anoloqu alınmışdır $(1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|))$, $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatorun Makenxaupt sinifindən olan çəkilər üçün çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)-$məhdudluğu isbat edilmişdir.

1.1-də ümumi məlumatlar: işarələmələr, təriflər və zəruri faktlar verilmişdir.

1.2-də olan nəticələri qeyd etməzdən əvəl bəzi zəruri işarələmələri və anlayışları daxil edək.

R^n-də skalyar hasili $x\cdot\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n$, normanı $|x|=(x\cdot x)^{1/2}$ kimi götürək. $x=(x',x'')$, $x'=(x_1,\ldots,x_k)\in R^k$, $x''=(x_{k+1},\ldots,x_n)\in R^{n-k}$,
$E(x,r)=\left\{y\in R^n_{k,+}; |x-y|<r\right\}$, $R^k_{+,+}=\left\{x\in R^k; x_1>0, x_2>0,\ldots,x_k>0\right\}$,

${}^{C}E(x,r)=R^n_{k,+}\setminus E(x,r)$ ilə biz tamamlayıcı çoxluğu işarə edəcyik. $E'(x',r)=\{y'\in R^k_{+,+};|x'-y'|<r\}$, ${}^{C}E'(x',r)=R^k_{+,+}\setminus E'(x',r)$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$, $\gamma_1>0,\gamma_2>0,\ldots,\gamma_k>0$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_k$, $(x')^{\gamma}=x_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{\gamma_k}$. Tutaq ki, $S_{k,+}=\{x\in R^n_{k,+};|x|=1\}$. Ölçülən $E\subset R^n_{k,+}$ çoxluğu üçün, $|E|_{\gamma}=\int_E (x')^{\gamma}dx$, belə ki, $|E(0,r)|_{\gamma}=\omega(n,k,\gamma)r^{n+|\gamma|}$, $\omega(n,k,\gamma)=|E(0,1)|_{\gamma}$.

Sanki hər yerdə müsbət və lokal inteqrallanan $\omega:R^n_{k,+}\to R$ funksiyasını çəki funksiyası adlandıracağıq. $L_{p,w,\gamma}(R^n_{k,+})$ ilə $R^n_{k,+}$-da elə ölçülən f funksiyalar çoxluğunu işarə edəcəyik ki, bu f funksiyasının norması

$$\|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})}\equiv\|f\|_{p,\omega,\gamma}=\left(\int_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\omega(x)(x')^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty$$

sonlu olsun. $\omega=1$ olduqda, $L_{p,w,\gamma}(R^n_{k,+})$ fəzasını $L_{p,\gamma}(R^n_{k,+})$ kimi işarə edəcəyik, bu halda norma $\|f\|_{L_{p,1,\gamma}(R^n_{k,+})}\equiv\|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n_{k,+})}$ kimi təyin edilir .

$B_{k,n}$ ümumiləşmiş sürüşmə operatorunu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$T^y f(x)=C_{\gamma,k}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}f\left((x',y')_{\beta},x''-y''\right)d\nu(\beta),$$

$$C_{\gamma,k}=\pi^{-\frac{k}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{|\gamma|}{2}\right)\prod_{i=1}^{k}\Gamma\left(\frac{\nu_i+1}{2}\right),\ (x',y')_{\beta}=\left((x_1,y_1)_{\beta_1}\ldots(x_k,y_k)_{\beta_k}\right),$$

$$(x_i,y_i)_{\beta_i}=\left(x_i^2-2x_iy_i\cos\beta_i+y_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\ 1\le i\le k,\ d\nu(\beta)=\prod_{i=1}^{k}\sin^{\gamma_i-1}\beta_i d\beta_i,$$

$1\le k\le n$.

Qeyd edək ki, bu sürüşmə operatoru $B_{k,n}$ Laplas-Bessel sinqulyar differensial operatoru ilə sıx bağlıdır.

1.2-də ümumiləşmiş Bessel sürüşmə operatorunun vasitəsi ilə maksimal və kəsr-maksimal funksiya tədqiq edilir.

$B_{k,n}$-maksimal funksiyanı və $B_{k,n}$-kəsr-maksimal funksiyanı təyin edək:

$$M_{B_{k,n}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\omega(n,k,\gamma)r^{n+|\gamma|}}\int_{E(0,r)}T^y|f(x)|(y')^{\gamma}dy,$$

$$M^{\alpha}_{B_{k,n}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\omega(n,k,\gamma)r^{n+|\gamma|-\alpha}}\int_{E(0,r)}T^y|f(x)|(y')^{\gamma}dy,$$

$$0\le\alpha<n+|\gamma|.$$

Qeyd edək ki, $\alpha=0$ olduqda, $M^0_{B_{k,n}}f(x)=M_{B_{k,n}}f(x)$.

Məlum A_p Makenxaupt sinifinə analoji olaraq aşağıdakı $A_{p,\gamma}$ sinifinə baxaq ($1\le p<\infty$):

Tərif 1. Əgər $1<p<\infty$ üçün,

$$\sup_{x\in R^n_{k,+},r>0}|E(x,r)|_{\gamma}^{-1}\int_{E(x,r)}\omega(y)(y')^{\gamma}dy\left(|E(x,r)|_{\gamma}^{-1}\int_{E(x,r)}\omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)(y')^{\gamma}dy\right)^{p-1}<\infty$$

,

olarsa,deyəcəyik ki, çəki funksiyası $A_{p,\gamma}(R^n_{k,+})$ sinifinə daxildir.

Əgər istənilən $x\in R^n_{k,+}$ və $r>0$ üçün, elə C sabiti varsa ki,

$$|E(x,r)|_{\gamma}^{-1}\int_{E(x,r)}\omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)(y')^{\gamma}dy\le C\operatorname{ess}\sup_{y\in E(x,r)}\omega(y)$$

olsun, onda deyəcəyik ki, çəki funksiyası $A_{1,\gamma}(R^n_{k,+})$ sinifinə daxildir.

Daha sonra, $B_{k,n}$-kəsr-maksimal operatorun çəkili $(L_{p,\omega,\gamma},L_{q,\omega,\gamma})$– məhdudluğu haqqında teorem isbat edilmişdir.

Teorem 1. Tutaq ki, $0\le\alpha<n+|\gamma|$, $1<p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Onda aşağıdakı iki şərt ekvivalentdir:

(i) Elə C sabiti var ki, istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ üçün aşağıdakı bəərabərsizlik doğrudur :

$$\left(\int_{R_{k,+}^{n}}\left(M_{B_{k,n}}^{\alpha}\left(f\omega^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}}\right)(x)\right)^{q}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_{R_{k,+}^{n}}|f(x)|^{p}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(ii) $\omega \in A_{1+\frac{q}{p'},\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right),\ p' = \dfrac{p}{p-1}.$

Teorem 2. Tutaq ki, $q = \dfrac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha}$. Onda aşağıdakı iki şərt ekvivalentdir:

(i) $$\int_{\left\{x\in R_{k,+}^{n}:\ M_{B_{k,n}}^{\alpha}\left(f\omega^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}}\right)(x)>\lambda\right\}}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx \le C\lambda^{-q}\left(\int_{R_{k,+}^{n}}|f(x)|\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx\right)^{q},$$

C sabiti f и $\lambda > 0$ -dan asılı deyil.

(ii) $\omega \in A_{1,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Nəticə 1. Tutaq ki, $1 < p < \infty$. Onda aşağıdakı iki şərt ekvivalentdir:

(i) Elə $C > 0$ sabiti var ki, istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ üçün

$$\int_{R_{k,+}^{n}}\left(M_{B_{k,n}}(f)(x)\right)^{p}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx \le C\int_{R_{k,+}^{n}}|f(x)|^{p}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx.$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(ii) $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Nəticə 2. Aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

(i) Elə $C > 0$ var ki, istənilən $f \in L_{1,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ üçün

$$\int_{\{x\in E(0,r)\ M_{B_{k,n}}f(x)>\lambda\}}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dxf \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_{1,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)},$$

bərabərsizliyi doğrudur. Belə ki, C sabiti f və $\lambda > 0$ -dan asılı deyil.

(ii) $\omega \in A_{1,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$.

Paraqraf 1.3-də $B_{k,n}$ kəsr inteqralına baxılır:

$$I_{B_{k,n}}^{\alpha}f(x) = \int_{R_{k,+}^{n}}T^{y}|x|^{\alpha-n-|\gamma|}f(y)(y')^{\gamma}\,dy,\ 0<\alpha<n+|\gamma|.$$

Bu paraqrafda G.Welland metodundan istifadə edərək $I_{B_{k,n}}^{\alpha}f$ kəsr inteqralı üçün çəkili qiymətləndirmə isbat edilmişdir.

Teorem 3. Fərz edək ki, $1 < p < \dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Onda istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ üçün

$$\left(\int_{R_{k,+}^{n}}\left|I_{B_{k,n}}^{\alpha}\left(f\omega^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}}\right)(x)\right|^{q}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_{R_{k,+}^{n}}|f(x)|^{p}\omega(x)(x')^{\gamma}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

bərabərsizliyi yalnız və yalnız o vaxt doğru olar ki, $\omega \in A_{1+\frac{q}{p'},\gamma}\left(R_{k,+}^{n}\right)$ olsun, burada $c > 0$ sabiti f -dən asılı deyil.

Qeyd 1. Riss potensialı üçün, Teorem 3 B.Muckenhoupt və R.L.Wheeden[15]-nin işində alınmışdır. Yuxarıdakı nəticə G.Welland[16] tərəfindən verilmiş metodun köməyi ilə isbat olunmuşdur. Həmçinin, $k=1$ olduqda Teorem 1, 2 və 3 E.V. Quliyev[17]-in işində isbat edilmişdir.

---

[15] Muckenhoupt B., Wheeden R. Weighted norm inequalities for fractional integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 1974, v.192, p.261-274.

[16] Welland G. Weighted norm inequalities for fractional integrals. Proc. Amer. Math. Soc. 51, no.1 (1975), p.143-148.

[9] E.V. Guliyev, Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals, associated with the Laplace-Bessel differential operator. Trans. NAS of Azerbaijan, v.26 (2006), no. 1, 71-80.

1.4-də əsas məqsəd ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun doğurduğu sinqulyar inteqral operator ($B_{k,n}$ sinqulyar operator) üçün çəkili L_p -qiymətləndirmə almaqdır:

$$A_{B_{k,n}} f(x) = p.v. \int_{R_{k,+}^n} \frac{\Omega(\theta)}{|y|^{n+|\gamma|}} \left[T^y f(x)\right](y')^\gamma \, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R_{k,+}^n \setminus E(0,\varepsilon)} \frac{\Omega(\theta)}{|y|^{n+|\gamma|}} \left[T^y f(x)\right](y')^\gamma \, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x), \qquad (1)$$

$\theta = {y}/{|y|}$, $\Omega(\theta)$ xarakteristik funksiya $S_{k,+}$ yarımşarda təyin olunmuşdur və

$$\int_{S_{k,+}} \Omega(\theta)(\theta')^\gamma \, d\sigma(\theta) = 0$$

«ixtisar» şərtini ödəyir.

1.4-də aşağıdakı teoremi isbat etmişik.

Teorem 4. Fərz edək ki, $B_{k,n}$ sinqulyar operatorun $\Omega(\theta)$ xarakteristikası

$$\int_{S_{k,+}} \Omega(\theta)(\theta')^\gamma \, d\sigma(\theta) = 0, \quad \sup_{\theta \in S_{k,+}} \Omega(\theta) < \infty .$$

şərtlərini ödəyir.Həmçinin ω müsbət funksiyası üçün, elə $c_1 > 0$ var ki,

$$\sup_{2^{k-2} \le |x| < 2^{k+1}} \omega(x) \le c_1 \inf_{2^{k-2} \le |x| < 2^{k+1}} \omega(x), \qquad (2)$$

$k \in Z$ və $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$. Onda

i₁) f və ε -dan asılı olmayan elə C_1 sabiti var ki,
istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$, $1 < p < \infty$ üçün

$$\int_{R_{k,+}^n} \left|A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)\right|^p \omega(x)(x')^\gamma \, dx \le C_1 \int_{R_{k,+}^n} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma \, dx .$$

i₂) $L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$-da ,$1 < p < \infty$, $\lim_{\varepsilon \to 0} A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)$ limiti var, onu $A_{B_{k,n}} f$ ilə işarə edək və

$$\int_{R_{k,+}^n} \left|A_{B_{k,n}} f(x)\right|^p \omega(x)(x')^\gamma \, dx \le C_1 \int_{R_{k,+}^n} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma \, dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

ii₁) f və ε -dan asılı olmayan elə C_2 sabiti var ki,
istənilən $f \in L_{p,\omega}\left(R_{k,+}^n\right)$, $1 \le p < \infty$, $\lambda > 0$ üçün

$$\int_{\left\{x \in R_{k,+}^n : \left|A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)\right| > \lambda\right\}} \omega_1(x)(x')^\gamma \, dx \le \frac{C_2}{\lambda} \int_{R_{k,+}^n} |f(x)| \omega(x)(x')^\gamma \, dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

ii₁) $L_{1,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$-da ,$1 \le p < \infty$, $\lim_{\varepsilon \to 0} A_{B_{k,n},\varepsilon} f(x)$ limiti var, onu $A_{B_{k,n}} f$ ilə işarə edək və

$$\int_{\left\{x \in R_{k,+}^n : \left|A_{B_{k,n}} f(x)\right| > \lambda\right\}} \omega_1(x)(x')^\gamma \, dx \le \frac{C_2}{\lambda} \int_{R_{k,+}^n} |f(x)| \omega(x)(x')^\gamma \, dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

1.5-də $p-$tipli $B_{k,n}$ -sinqulyar operatorun Makenxaupt sinifindən olan çəkilər üçün çəkili $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)-$ məhdudluğu isbat edilmişdir.
.

Tərif 2. ($p-$tipli $B_{k,n}$ -sinqulyar operator). Tutaq ki, $1 < p < \infty$. T subxətti operatorunu o vaxt $p-$tipli $B_{k,n}$ -sinqulyar operator adlandıracağıq ki,

1) istənilən $x \in R_{k,+}^n$ və $r > 0$ üçün T operatoru

$$\chi_{E(x,r)}(z) \left| T\left(f \chi_{R_{k,+}^n \setminus E(x,2r)}\right)(z) \right| \le C \chi_{E(x,r)}(z) \int_{R_{k,+}^n \setminus E(x,2r)} T^z |y|^{-n-|\gamma|} |f(y)| (y')^\gamma \, dy \qquad (3)$$

bərabərsizliyini ödəyir.

2) T operatoru $L_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasında məhdud təsir göstərir.

Tərif 3. (zəif $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator). Tutaq ki, $1 \le p < \infty$. T subxətti operatorunu o vaxt zəif $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator adlandıracağıq ki,

1) T operatoru (3) bərabərsizliyini ödəyir;

2) T operatoru $L_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasından $WL_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir.

Tərif 4. ($(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operator). Tutaq ki, $1 < p < q < \infty$. $T_\alpha, 0 < \alpha < n+|\gamma|$ subxətti operatorunu o vaxt $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operator adlandıracağıq ki,

1) istənilən $x \in R_{k,+}^n$ və $r > 0$ üçün T_α operatoru

$$\chi_{E(x,r)}(z)\left|T_\alpha\left(f\chi_{R_{k,+}^n \setminus E(x,2r)}\right)(z)\right| \le$$

$$\le C\chi_{E(x,r)}(z)\int_{R_{k,+}^n \setminus E(x,2r)} T^z|y|^{\alpha-n-|\gamma|}|f(y)|(y')^\gamma\, dy \tag{4}$$

bərabərsizliyini ödəyir.

2) T_α operatoru $L_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasından $L_{q,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir.

Tərif 5. (zəif $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operator). Tutaq ki, $1 \le p < q < \infty$. $T_\alpha, 0 < \alpha < n+|\gamma|$ subxətti operatorunu o vaxt zəif $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operator adlandıracağıq ki,

1) T_α operatoru (4) bərabərsizliyini ödəyir.

2) T_α operatoru $L_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzsından $WL_{q,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir.

Teorem 5. Tutaq ki ω funksiyası (2) şərtini ödəyən çəki funksiyasıdır. Onda :

(a) Əgər T operatoru $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator, $1 < p < \infty$ və $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ olarsa, onda T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasında məhdud təsir göstərir, belə ki, f-dən asılı olmayan elə c_3 sabiti var ki, istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ üçün

$$\int_{R_{k,+}^n}|Tf(x)|^p\,\omega(x)(x')^\gamma\, dx \le c_3\int_{R_{k,+}^n}|f(x)|^p\,\omega(x)(x')^\gamma\, dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(b) Əgər T operatoru zəif $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator, $1 \le p < \infty$ və $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ olarsa, onda T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasından $WL_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir, belə ki, f və λ-dan asılı olmayan elə c_4 sabiti var ki, istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ üçün

$$\int_{\left\{x\in R_{k,+}^n:\,|Tf(x)|>\lambda\right\}}\omega(x)(x')^\gamma\, dx \le \frac{c_4}{\lambda^p}\int_{R_{k,+}^n}|f(x)|^p\,\omega(x)(x')^\gamma\, dx.$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Tərif 6. Tutaq ki, K funksiyası $R_{k,+}^n$-da təyin olunmuşdur. Aşağıdakı şərtlər ödənərsə K-nı $B_{k,n}$ sinqulyar nüvə adlandıracağıq:

i) $K \in C^\infty\left(R_{k,+}^n\right)$;

ii) istənilən $r > 0$, $x \in R_{k,+}^n$ üçün $K(rx) = r^{-n-|\gamma|}K(x)$;

iii) $\int_{S_{k,+}} K(x)(x')^\gamma\, d\sigma(x) = 0$.

Nəticə 3. Tutaq ki, $p \in (1,\infty)$, T (1) bərabərliyi ilə təyin olunan $B_{k,n}$ sinqulyar nüvəli $B_{k,n}$ sinqulyar operatordur , $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ çəki funksiyası (2) şərtini ödəyir. Onda T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$-da məhdud təsir göstərir.

Nəticə 4. Tutaq ki, $p \in [1,\infty)$, T (1) bərabərliyi ilə təyin olunan $B_{k,n}$ sinqulyar nüvəli $B_{k,n}$ sinqulyar operatordur , $\omega \in A_{p,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ çəki funksiyası (2) şərtini ödəyir. Onda T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasından $WL_{p,\omega,\gamma}\left(R_{k,+}^n\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir.

İkinci fəsildə $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator və $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operator üçün ikiçəkili bərabərsizliklərə baxılmışdır.

2.1-də $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operator üçün çəkili L_p-qiymətləndirmələr alınmışdır.

Teorem 6. Tutaq ki, $p\in(1,\infty)$ və T operatoru $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur. Bundan başqa, $\omega(x),\omega_1(x)$, $x\in R^n_{k,+}$ çəki funksiyalarıdır və aşağıdakı üç şərti ödəyir:

(a) elə $b>0$ var ki, sanki bütün $x\in R^n_{k,+}$ üçün

$$\sup_{|x|/8\le|y|<8|x|}\omega_1(y)\le b\omega(x),$$

(b)

$$A\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{{}^{C}E(0,2r)}\omega_1(x)|x|^{-(n+|\gamma|)p}(x')^{\gamma}dx\right)\left(\int_{E(0,r)}\omega^{1-p'}(x)(x')^{\gamma}dx\right)^{p-1}<\infty,$$

(c)

$$B\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E(0,r)}\omega_1(x)(x')^{\gamma}dx\right)\left(\int_{{}^{C}E(0,2r)}\omega^{1-p'}(x)|x|^{-(n+|\gamma|)p'}(x')^{\gamma}dx\right)^{p-1}<\infty.$$

Onda c sabiti var ki, istənilən $f\in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ üçün

$$\int_{R^n_{k,+}}|Tf(x)|^p\omega_1(x)(x')^{\gamma}dx\le c\int_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\omega(x)(x')^{\gamma}dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 7. Tutaq ki, $p\in[1,\infty)$ və T operatoru zəif $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur. Bundan başqa, $\omega(x),\omega_1(x)$ funksiyaları $R^n_{k,+}$-da çəki funksiyalarıdır və *(a)*, *(b)*, *(c)* şərtlərini ödəyir. Onda elə c sabiti var ki, istənilən $f\in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ və $\lambda>0$ üçün

$$\int_{\{x\in R^n_{k,+}:|Tf(x)|>\lambda\}}\omega_1(x)(x')^{\gamma}dx\le\frac{c}{\lambda^p}\int_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\omega(x)(x')^{\gamma}dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 8. Tutaq ki, $1\le m<k\le n$, $p\in(1,\infty)$ üçün T operatoru $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur və $p\in[1,\infty)$ üçün T operatoru zəif $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur. Bundan başqa $\omega(x_{1,m})$, $\omega_1(x_{1,m})$ R^m_{++}-da çəki funksiyalarıdır və aşağıdakı üç şərti ödəyir:

($a_{m,k}$) elə $b>0$ var ki, sanki bütün $x_{1,m}\in R^n_{k,+}$ üçün,

$$\sup_{|x_{1,m}|/8\le|y_{1,m}|<8|x_{1,m}|}\omega_1(y_{1,m})\le b\omega(x_{1,m}),$$

($b_{m,k}$)

$$A_{m,k}\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{{}^{C}E_m(0,2r)}\omega_1(x_{1,m})|x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)p}x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}dx_{1,m}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{E_m(0,r)}\omega^{1-p'}(x_{1,m})x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}dx_{1,m}\right)^{p-1}<\infty$$

($c_{m,k}$)

$$B_{m,k}\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E_m(0,r)}\omega_1(x_{1,m})x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}dx_{1,m}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{{}^{C}E_m(0,2r)}\omega^{1-p'}(x_{1,m})|x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)p'}x_{1,m}^{\gamma_{1,m}}dx_{1,m}\right)^{p-1}<\infty.$$

Onda $p\in(1,\infty)$ üçün T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$-dən $L_{p,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$-nə və $p\in[1,\infty)$ üçün isə $L_{1,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$-dən $WL_{1,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$-nə məhdud təsir göstərir.

Nəticə 5. Tutaq ki, $1\le m<k\le n$ və T $B_{k,n}$ maksimal və ya $B_{k,n}$ sinqulyar operatordur. Bundan başqa $\omega(x_{1,m})$, $\omega_1(x_{1,m})$ R^m_{++}-da çəki funksiyalarıdır və *($a_{m,k}$)*, *($b_{m,k}$)*, *($c_{m,k}$)* şərtlərini ödəyirlər. Onda $p\in(1,\infty)$ üçün T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$-dən $L_{p,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$-nə və $p\in[1,\infty)$ üçün isə $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$-dən $WL_{p,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$-nə məhdud təsir göstərir.

Teorem 9. Tutaq ki, $1\le m<k\le n$, $p\in(1,\infty)$ üçün T operatoru $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur və $p\in[1,\infty)$ üçün T operatoru zəif $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur. Bundan başqa $\omega(x_{m+1,n})$,

$\omega_1(x_{m+1,n})$ funksiyaları $R^{n-m}_{k-m,+}$-da çəki funksiyalarıdır və aşağıdakı üç şərti ödəyir:

(a_{m+1,k}) elə $b>0$ var ki, sanki bütün $x_{m+1,n}\in R^{n-m}$ üçün,

$$\sup_{|x_{m+1,n}|/8\le|y_{m+1,n}|<8|x_{m+1,n}|}\omega_1(y_{m+1,n})\le b\omega(x_{m+1,n}),$$

$(b_{m+1,k})$ $$A_{m+1,k}\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E_{n-m}(0,r)}\omega^{1-p'}(x_{m+1,n})x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}\right)^{p-1}\times$$

$$\times\int_{{}^C E_{n-m}(0,2r)}\omega_1(x_{m+1,n})|x_{m+1,n}|^{-(n-m+|\gamma_{m+1,k}|)p}x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}<\infty,$$

$(c_{m+1,k})$ $$B_{m+1,k}\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E_{n-m}(0,r)}\omega_1(x_{m+1,n})x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{{}^C E_{n-m}(0,2r)}\omega^{1-p'}(x_{m+1,n})|x_{m+1,n}|^{-(n-m+|\gamma_{m+1,k}|)p'}x_{m+1,k}^{\gamma_{m+1,k}}dx_{m+1,n}\right)^{p-1}<\infty.$$

Onda $p\in(1,\infty)$ üçün T operatoru $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$-dən $L_{p,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$-nə və $p\in[1,\infty)$ üçün isə $L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$-dən $WL_{p,\omega_1,\gamma}(R^n_{k,+})$ -nə məhdud təsir göstərir.

Teorem 10. Tutaq ki, $p\in(1,\infty)$ və T operatoru $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur.Bundan başqa $\omega(t)$ $(0,\infty)$-da çəki funksiyasıdır, $\omega_1(t)$ $(0,\infty)$-da müsbət, artan çəki funksiyasıdır və $(\omega(|x|),\omega_1(|x|))$ çəki cütlüyü *(a), (b)* şərtlərini ödəyirlər. Onda elə c sabiti var ki, istənilən $f\in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ üçün

$$\int_{R^n_{k,+}}|Tf(x)|^p\omega_1(|x|)(x')^\gamma dx\le c\int_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\omega(|x|)(x')^\gamma dx.$$

(6)
bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 11. Tutaq ki, $p\in(1,\infty)$ və T operatoru $p-$tipli $B_{k,n}$-sinqulyar operatordur. Bundan başqa $\omega(t)$ $(0,\infty)$-da çəki funksiyasıdır, $\omega_1(t)$ $(0,\infty)$-da müsbət, azalan çəki funksiyasıdır və $(\omega(|x|),\omega_1(|x|))$ çəki cütlüyü *(a), (c)* şərtlərini ödəyirlər. Onda (6) bərabərsizliyi ödənər.

2.2-də $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operator üçün ikiçəkili bərabərsizliklər isbat edilmişdir.

Teorem 12. Tutaq ki, $1<p<q<\infty$ və T_α operatoru $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatordur. Bundan başqa, $\omega(x),\omega_1(x)$ $R^n_{k,+}$-da çəki funksiyalarıdır və aşağıdakı üç şərti ödəyir:

(a_1) elə $b>0$ var ki, sanki bütün $x\in R^n_{k,+}$ üçün,

$$\sup_{|x|/8\le|y|<8|x|}\omega_1(y)^{1/q}\le b\omega(x)^{1/p},$$

(b_1)

$$A\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{{}^C E(0,2r)}\omega_1(x)|x|^{-(n+|\gamma|-\alpha)q}(x')^\gamma dx\right)^{\frac1q}\left(\int_{E(0,r)}\omega^{1-p'}(x)(x')^\gamma dx\right)^{\frac1{p'}}<\infty$$

,

(c_1)

$$B\equiv\sup_{r>0}\left(\int_{E(0,r)}\omega_1(x)(x')^\gamma dx\right)^{\frac1q}\left(\int_{{}^C E(0,2r)}\omega^{1-p'}(x)|x|^{-(n+|\gamma|-\alpha)(1-p')}(x')^\gamma dx\right)^{\frac1{p'}}<\infty$$

.

Onda elə c sabiti var ki, istənilən $f\in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ üçün

$$\left(\int_{R^n_{k,+}}|T_\alpha f(x)|^q\omega_1(x)(x')^\gamma dx\right)^{1/q}\le c\left(\int_{R^n_{k,+}}|f(x)|^p\omega(x)(x')^\gamma dx\right)^{1/p}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 13. Tutaq ki, $1\le p<q<\infty$ və T_α operatoru zəif $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatordur. Bundan başqa, $\omega(x),\omega_1(x)$ $R^n_{k,+}$-da çəki funksiyalarıdır və $(a_1),(b_1),(c_1)$ şərtlərini ödəyirlər.

Onda elə c sabiti var ki, istənilən $f\in L_{p,\omega,\gamma}(R^n_{k,+})$ və $\lambda>0$ üçün

$$\left(\int_{\left\{x\in R^n_{k,+}:\,|T_\alpha f(x)|>\lambda\right\}} \omega_1(x)(x')^\gamma\, dx \right)^{1/q} \le \frac{c}{\lambda^q} \left(\int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p\, \omega(x)(x')^\gamma\, dx \right)^{1/p}.$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Nəticə 6. Tutaq ki, $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$ və $1/p - 1/q = \alpha/(n+|\gamma|)$. Bundan başqa, $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ funksiyaları $R^n_{k,+}$-da çəki funksiyalarıdır və *(a₁),(b₁), (c₁)* şərtlərini ödəyirlər. Onda $I^\alpha_{B_{k,n}}$ operatoru $L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ fəzasından $L_{q,\omega_1,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir.

Nəticə 7. Tutaq ki, $1 \le p < q < \infty$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$ və $1/p - 1/q = \alpha/(n+|\gamma|)$. Bundan başqa, $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ funksiyaları $R^n_{k,+}$-da çəki funksiyalarıdır və *(a₁),(b₁), (c₁)* şərtlərini ödəyirlər. Onda $I^\alpha_{B_{k,n}}$ operatoru $L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ fəzasından $WL_{q,\omega_1,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ fəzasına məhdud təsir göstərir.

Teorem 14. Tutaq ki, $1 < p < q < \infty$ və T_α operatoru $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatordur.Bundan başqa $\omega(t)$ $(0,\infty)$-da çəki funksiyasıdır, $\omega_1(t)$ $(0,\infty)$-da müsbət,artan çəki funksiyasıdır və $\left(\omega(|x|), \omega_1(|x|)\right)$ çəki cütlüyü *(a₁),(b₁)* şərtlərini ödəyirlər. Onda f-dən asılı olmayan elə c sabiti var ki, istənilən $f \in L_{p,\omega,\gamma}\left(R^n_{k,+}\right)$ üçün

$$\left(\int_{R^n_{k,+}} |Tf(x)|^q\, \omega_1(|x|)(x')^\gamma\, dx \right)^{1/q} \le c \left(\int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p\, \omega(|x|)(x')^\gamma\, dx \right)^{1/p}. \tag{7}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 15. Tutaq ki, $1 < p < q < \infty$ və T_α operatoru $(p,q)-$tipli $B_{k,n}$-potensial operatordur.Bundan başqa $\omega(t)$ $(0,\infty)$-da çəki funksiyasıdır, $\omega_1(t)$ $(0,\infty)$-da müsbət,azalan çəki funksiyasıdır və $\left(\omega(|x|), \omega_1(|x|)\right)$ çəki cütlüyü *(a₁),(c₁)* şərtlərini ödəyirlər. Onda (7) bərabərsizliyi doğrudur.

Müəllif məsələlərin qoyuluşuna, əldə olunmuş nəticələrin müzakirəsinə və elmi işə daimi diqqətinə görə öz elmi rəhbəri, AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor V.S.Quliyevə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyadakı əsas nəticələr aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. **Isayev F.A. and Safarov Z.V.** Two-weighted inequality for some sublinear operators in Lebesgue spaces, associated with the Laplase-Bessel differential operators. Operators in Morrey-type spaces and applications OMTSA, 2011. Dedicated to 70th birthday of prof. V.I. Burenkov, Ahi Evran University, Kirsheir, Turkey, 2011, may 20-27, p.63,
2. **Isayev F.A. and Safarov Z.V.** Two -weighted inequality for some $B_{k,n}$-singular operators in weighted Lebesgue spaces. "Functions theory and problems of hormonic analysis ". Proceedings of the International conferanct devoted to the 100-th anniversary of academician İ.İ.İbrahimov, Baku, 2012, p.117-120.
3. **Guliyev V.S. and Isayev F.A.** The two-weighted inequalities for sublinear operators generated by singular integrals in weighted Lebesgue spaces. Acta Applicandae Mathematicae. 2013,v.127, No.1,p.1-16 .
4. **Isayev F.A. and Safarov Z.V. W**eighted inequality for singular integrals in Lebesgue spaces, associated with the Laplase-Bessel differential operators. Proceedings of NAS of Azerbaijan, 2012, v.36, No.1, p.61-68.
5. **Isayev F.A. and Safarov Z.V. W**eighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals in the bessel setting. News APU, Baki, 2013, No.4, p.19-24.
6. **Isayev F.A. W**eighted inequality for sublinear operators, associated wit the Laplase-bessel differential operators. News APU, Baki, 2014, No.3, p.23-29.
7. **Guliyev V.S., Isayev F.A. and Safarov Z.V.** Two -weighted inequality for *p*-admissible $B_{k,n}$-singular operators in weighted Lebesgue spaces. Proceedings of NAS of Azerbaijan, 2014, v.40, No.1, p.122-146.

ФАТАИ АБДУЛГАМИД оглы ИСАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУХВЕСОВЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

АННОТАЦИЯ

В диссертации исследованы некоторые свойства максимальных функций, дробных максимальных функций, потенциалов Рисса и некоторых классов сублинейных операторов, порожденные дифферен-циальным оператором Лаплас-Бесселя.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Доказана весовая $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)-$ограниченность $B_{k,n}$ - дробно-максимальных функций, $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$.
- Получен аналог неравенств типа Велланда $B_{k,n}$ - потенциала Рисса.
- Доказана весовая $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)-$ограниченность $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов для весов из класса Макенхаупта.
- Получены двухвесовые $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $p-$допустимых $B_{k,n}$-сингулярных операторов.
- Получены двухвесовые слабые $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{1,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $p-$допустимых $B_{k,n}$ -сингулярных операторов.
- Получены двухвесовые $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $(p,q)-$ допустимых $B_{k,n}$ -потенциальных операторов.
- Получены двухвесовые слабые $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ неравенства для $(p,q)-$ допустимых $B_{k,n}$ -потенциальных операторов.

FATAI ABDULHAMID oglu ISAYEV

INVESTIGATIONS TWO-WEIGHTED INEQUALITIES FOR FOURIER-BESSEL INTEGRAL OPERATORS

ABSTRACT

In the dissertation are studied some properties of the maximal functions, fractional maximal functions, Riesz potentials and some classes sublinear operators, associated by the Laplace-Bessel differential operators. The principal results of the dissertation are the followings:

- For the $B_{k,n}$ fractional maximal functions weighted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega,\gamma}\right)$, $1/p-1/q=\alpha/(n+|\gamma|)$ inequalities is proved.
- Analogue of the theorems of Welland for the $B_{k,n}$ Riesz potential is obtained.
- For the *p*-admissible $B_{k,n}$ singular operators weighted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega,\gamma}\right)$ boundedness with weights from Muchenhoupt classes is proved.
- For the *p*-admissible $B_{k,n}$ singular operators two-weighted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{p,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is obtained.
- For the *p*-admissible $B_{k,n}$ singular operators two-weighted weak $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{1,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is proved.
- For the $(p,q)-$admissible $B_{k,n}$ potential operators two-weighted $\left(L_{p,\omega,\gamma}, L_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is obtained.
- For the $(p,q)-$admissible $B_{k,n}$ potential operators two-weighted weak $\left(L_{1,\omega,\gamma}, WL_{q,\omega_1,\gamma}\right)$ inequalities is proved.