AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

FİDAN SİMURQ qızı LAÇINOVA

TƏKRARLANAN XARAKTERİSTİKALI ÜÇTƏRTİBLİ PARABOLİK OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

BAKI – 2016

Dissertasiya işi **Bakı Dövlət Universitetinin «Diferensial və inteqral tənliklər»** kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor **A.R.Əliyev** (Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti)

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **H.D.Orucov** (Bakı Dövlət Universiteti)

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent **Ə.F.Quliyev** (AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu)

Aparıcı təşkilat: **Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti** («Riyazi analiz» kafedrası)

Dissertasiyanın müdafiəsi "13" dekabr 2016-cı il saat $\underline{14^{00}}$-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında olacaqdır.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küçəsi, 23.

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat "10" noyabr 2016-cı ildə paylanılmışdır.

FD.02.016 Dissertasiya Şurasının
elmi katibi, r.e.d., professor **N.Q.Əhmədov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Keçən əsrin ortalarından başlayaraq operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin müxtəlif aspektlərinin baxıldığı çoxlu sayda işlər meydana gəlmişdir. Bu nəzəriyyə xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün müxtəlif tipli məsələlərin həllinə funksional analizin metodlarının tətbiqi nəticəsində yaranıb. Bu istiqamətdə S.Q.Kreynin, J.-L.Lions və E.Macenesin, A.A.Dezinin, V.İ.Qorbaçuk və M.L.Qorbaçukun, S.Y.Yakubovun, S.Y.Yakubov və Y.S.Yakubovun, A.R.Əliyevin kitablarını qeyd etməklə kifayətlənəcəyik.

Operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsi öz başlanğıcını M.V.Keldışın fundamental işindən götürən operator dəstələri nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır. M.V.Keldışın bu işi sonradan həm keçmiş sovet məkanının riyaziyyatçılarının həm də xarici ölkələrin riyaziyyatçılarının işlərində inkişaf etdirilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, operator dəstələri operator-diferensial tənliklərin simvollarıdır.

Operator-diferensial tənliklərin həllolunmasını araşdırarkən, təbii olaraq, verilmiş operator-diferensial tənliyin xarakteristik çoxhədlisinin sıfırları ilə təyin olunan elementar həllər sisteminin tamlığı, minimallığı və bazisliyi haqqında məsələlər meydana çıxır. Bu məsələlər operator dəstələrinin məxsusi və qoşma vektorlar sisteminin tamlığı, minimallığı və bazisliyi məsələləri ilə sıx bağlıdır. Bu istiqamətdə C.E.Allahverdiyevin, M.G.Qasımovun, A.Q.Kostyuçenkonun, Q.V.Radziyevskinin, S.S.Mirzəyevin, A.A.Şkalikovun, Ə.M.Əhmədovun, M.B.Orazovun, S.Y.Yakubovun, V.V.Vlasovun, A.R.Əliyevin və onların tələbələrinin işlərini göstərmək lazımdır. Bu işlər arasında M.G.Qasımovun operator-diferensial tənliklərin həllolunması məsələləri ilə yanaşı uyğun operator dəstələrinin məxsusi və qoşma vektorlar sisteminin bir hissəsinin çoxqat tamlığı məsələlərinin də öyrənildiyi işini xüsusilə qeyd edək. Qeyd edək ki, M.G.Qasımovun işi çoxlu sayda məqalələrin, o cümlədən təqdim olunan dissertasiyanın meydana gəlməsinə təkan vermişdir.

Təqdim olunan dissertasiyada bütün oxda və yarımoxda təkrarlanan xarakteristikalı parabolik operator-diferensial tənliklərə baxılır. Bu tənliklər üçün, əsasən, Sobolev tipli fəzalarda həllolunma öyrənilir. Burada baxılan tənliklərin simvolları olan operator dəstələrin spektral məsələlərinin öyrənilməsinə də yer ayrılıb. Bunlarla yanaşı, baxılan tənliyin azalan elementar həllərinin tamlığı məsələləri araşdırılır. Təqdim olunan dissertasiyanın fərqləndirici xüsusiyyətləri sırasında onu da göstərmək lazımdır ki, parabolik operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin müxtəlif tipli məsələlərinin araşıdırılmasına həsr olunmuş çoxlu sayda monoqrafiya və jurnal məqalələri olmasına baxmayaraq, təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator-diferensial tənliklər üçün həllolunmanın əmsal şərtlərinin tapıldığı işlər fikrimizcə yoxdur. Baxılan işin digər fərqləndirici xüsusiyyəti araşdırılan tənliklərin həllolunma şərtlərinin müəyyən edilməsində əhəmiyyətli rol oynayan aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsidir. S.S.Mirzəyevin işində elliptik tip operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin öyrənilməsində Sobolev tipli fəzadan olan vektor-funksiyalar üçün belə normaların hesablanması ətraflı verilmişdir. Dissertasiyanın mövzusu həm də ona görə aktualdır ki, baxılan tənliklər müasir təbiət elmlərində və texnikada bir çox mürəkkəb hadisələrin riyazi təsvirini verir. Məsələn, belə tənliklərlə istilikkeçirmə və kütləötürmə nəzəriyyələrində qurutma və soyutma proseslərinin təsviri üçün, zəncirvari nüvə reaksiyaları nəzəriyyəsində neytronların yavaşıdılması prosesində və digər məsələlərdə rastlaşılır. Bundan başqa, belə parabolik operator-diferensial tənliklər xüsusi halda diffuziya məsələlərini və ya özlüelastik cisimlərdə istilikkeçirmə məsələlərini xarakterizə edir.

İşin məqsədi.

1. Təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator-diferensial tənliklər üçün Sobolev tipli fəzalarda korrekt və birqiymətli həllolunma məsələlərinin araşdırılması.

2. Sobolev tipli fəzalarda baxılan tənliyin baş hissəsinin doğurduğu normaya nəzərən aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətlərinin tapılması.

3. Təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator dəstələri üçün spektral məsələlərin öyrənilməsi.

Elmi yeniliklər. Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Sobolev tipli fəzalarda bütün oxda və yarımoxda baxılan təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator-diferensial tənliklər üçün korrekt və birqiymətli həllolunmanın kafi şərtləri tapılıb;
- Sobolev tipli fəzalarda baxılan tənliyin baş hissəsinin doğurduğu normaya nəzərən aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi verilib;
- korrekt və birqiymətli həllolunma şərtləri ilə aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsinin əlaqəsi müəyyən edilib;
- təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator dəstələrinin rezolventasının analitik xassələri araşdırılıb və yarımoxda başlanğıc-sərhəd

məsələyə cavab verən, baxılan dəstənin məxsusi və qoşma vektorlar zəncirinin tamlığının kafi şərtləri göstərilib;

- yarımoxda təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli bircins parabolik operator-diferensial tənliyin azalan elementar həllərinin tamlığı isbat edilib.

Tədqiqatların ümumi metodikası. Dissertasiyada operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin, yarımqruplar nəzəriyyəsinin, operatorların və operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsinin, ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin, tam funksiyalar nəzəriyyəsinin metodlarından və abstrakt fəzalarda Furye çevirmələrindən istifadə edilmişdir.

İşin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyanın nəticələri əsasən nəzəri xarakter daşıyır və operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsi ilə bağlı tədqiqatlarda tətbiq edilə bilər. Bundan başqa, alınan nəticələr xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qarışıq məsələlərdə, həmçinin özlüelastik cisimlərdə diffuziya məsələlərində və ya istilikkeçirmə məsələlərində tətbiq edilə bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin "Diferensial və inteqral tənliklər", "Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz", "Tətbiqi riyaziyyat", "Riyazi iqtisadiyyat" kafedralarının, AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" və "Qeyri harmonik analiz" şöbələrinin seminarlarında müzakirə edilmişdir. Dissertasiyanın nəticələri həmçinin Heydər Əliyevin 90 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və informatikanın aktual problemləri" Beynəlxalq konfransında (Bakı, 29-31 may 2013-cü il), AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Beynəlxalq konfransında (Bakı, 15-16may 2014-cü il) və "Riyazi analiz, diferensial tənliklər və onların tətbiqləri, MADEA-7" 7-ci Beynəlxalq konfransda (Azərbaycan, Bakı, 8-13 sentyabr 2015-ci il) məruzə edilmişdir.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiyanın əsas nəticələri siyahısı avtoreferatın sonunda təqdim olunmuş 8 işdə nəşr edilmişdir.

İşin həcmi və quruluşu. Dissertasiya giriş hissə, 18 paraqraflı dörd fəsil və 76 adda ədəbiyyat siyahısından ibarət olub 108 səhifə həcmdə tərtib edilmişdir.

İŞİN MƏZMUNU

Birinci fəsildə bütün oxda bir sinif təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator-diferensial tənliklərin həllolunması məsələləri araşdırılır.

Tutaq ki, H - (x,y), $x,y\in H$ skalyar hasili ilə verilmiş separabel Hilbert fəzası, A - H fəzasında öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur ($A=A^*\geq cE$, $c>0$, E - vahid operatordur). H_γ ($\gamma\geq 0$) ilə A operatorunun doğurduğu Hilbert fəzaları şkalasını işarə edək, yəni

$$H_\gamma = Dom(A^\gamma),\ (x,y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y),\ x,y\in Dom\left(A^\gamma\right).$$

$R=(-\infty,+\infty)$ aralığında təyin olunmuş, qiymətləri H fəzasından olan $v(t)$ funksiyası üçün aşağıdakı Hilbert fəzalarını daxil edək:

$$L_2(R;H)=\left\{v(t):\|v\|^2_{L_2(R;H)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\|v(t)\|^2_H\,dt<+\infty\right\},$$

$$W_2^3(R;H)=\left\{v(t):\|u\|^2_{W_2^3(R;H)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^3v(t)}{dt^3}\right\|^2_H+\left\|A^3v(t)\right\|^2_H\right)dt<+\infty\right\}.$$

Qeyd edək ki, törəmələr ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi mənasında başa düşülür.

Bu fəsildə H fəzasında

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)^3 u(t)+A_1\frac{d^2u(t)}{dt^2}+A_2\frac{du(t)}{dt}=f(t),\quad t\in R, \qquad (1)$$

operator-diferensial tənliyinə baxılır, burada $A=A^*\geq cE$, $c>0$, A_1, A_2 - xətti, ümumiyyətlə desək məhdud olmayan operatorlardır, $f(t)\in L_2(R;H)$, $u(t)\in W_2^3(R;H)$.

Tərif 1. *Əgər* $f(t)\in L_2(R;H)$ *üçün* (1) *tənliyini sanki hər yerdə ödəyən* $u(t)\in W_2^3(R;H)$ *vektor-funksiyası varsa, onda bu funksiyanı* (1) *tənliyinin requlyar həlli adlandıracağıq.*

Tərif 2. *Əgər istənilən* $f(t)\in L_2(R;H)$ *üçün* (1) *tənliyinin*

$$\|u\|_{W_2^3(R;H)}\leq const\|f\|_{L_2(R;H)}$$

bərabərsizliyini ödəyən $u(t)$ *requlyar həlli varsa, onda* (1) *tənliyini requlyar həllolunan adlandıracağıq.*

Hazırki fəsildə (1) operator-diferensial tənliyinin requlyar həllolunması üçün kafi şərtləri alınmışdır. Bu şərtlər (1) tənliyinin operator əmsalları ilə ifadə olunur.

Əvvəlcə (1) tənliyində $A_1=A_2=0$ götürək.

P_0 ilə $W_2^3(R;H)$ fəzasından $L_2(R;H)$ fəzasına

$$\mathrm{P}_0 u(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + A\right)^3 u(t), \quad u(t) \in W_2^3(R;H)$$

şəklində təsir edən operatoru işarə edək.

Aşağıdakı teorem doğrudur

Teorem 1. P_0 *operatoru* $W_2^3(R;H)$ *fəzasını* $L_2(R;H)$ *fəzasına izomorf inkas edir.*

Teorem 1-dən çıxır ki, $\|\mathrm{P}_0 u\|_{L_2(R;H)}$ norması $W_2^3(R;H)$ fəzasının ilk $\|u\|_{W_2^3(R;H)}$ normasına ekvivalentdir.

$$A^{3-j}\frac{d^j}{dt^j} : W_2^3(R;H) \to L_2(R;H), \quad j = 1,2$$

aralıq törəmə operatorlarının kəsilməzliyinə və aralıq törəmələr haqqında teoremə əsasən

$$N_j = \sup_{0 \neq u \in W_2^3(R;H)} \left\| A^{3-j}\frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(R;H)} \|\mathrm{P}_0 u\|_{L_2(R;H)}^{-1}, \quad j = 1,2$$

ədədləri sonludur. Bu ədədlər (1) tənliyinin requlyar həllolunmasının onun operator əmsalları ilə ifadə olunan dəqiq şərtlərinin müəyyən edilməsində mühüm rol oynayır. N_j, $j = 1,2$ ədədlərini hesablamaq üçün β həqiqi parametrindən asılı

$$P_j(\lambda;\beta;A) = \left((i\lambda)^2 E + A^2\right)^3 - \beta (i\lambda)^{2j} A^{6-2j}, \quad j = 1,2 \qquad (2)$$

polinomial operator dəstəsinə baxılır.

(2) dəstəsinin faktorizasiyası üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. *Tutaq ki,* $\beta \in \left[0, \frac{27}{4}\right)$. *Onda* (2) *polinomial operator dəstələri xəyali oxda tərsə malikdir və onlar aşağıdakı şəkildə yazıla bilirlər:*

$$P_j(\lambda;\beta;A) = F_j(\lambda;\beta;A) F_j(-\lambda;\beta;A), \ j = 1,2,$$

burada

$$F_j(\lambda;\beta;A) = \prod_{s=1}^{3}\left(\lambda E - \omega_{j,s}(\beta) A\right) \equiv \lambda^3 E + \alpha_{1,j}(\beta)\lambda^2 A + \alpha_{2,j}(\beta)\lambda A^2 + A^3,$$

$\operatorname{Re}\omega_{j,s}(\beta) < 0$, $s = 1,2,3$, $\alpha_{1,j}(\beta), \alpha_{2,j}(\beta)$ *ədədləri müsbətdir və aşağıdakı tənliklər sistemini ödəyirlər:*

1) $j=1$ *üçün*

$$\begin{cases} -2\alpha_{2,1}(\beta)+\alpha_{1,1}^2(\beta)-3=0, \\ 2\alpha_{1,1}(\beta)-\alpha_{2,1}^2(\beta)+3=\beta; \end{cases}$$

2) $j=2$ *üçün*

$$\begin{cases} -2\alpha_{2,2}(\beta)+\alpha_{1,2}^2(\beta)-3=-\beta, \\ 2\alpha_{1,2}(\beta)-\alpha_{2,2}^2(\beta)+3=0. \end{cases}$$

Bu teorem A.R.Əliyev və A.L.Elbablinin işində (Aliev A.R., Elbably A.L. Well-posedness of a boundary value problem for a class of third order operator-differential equations // Boundary Value Problems, 2013, vol. 2013:140, p. 1-15) isbat edilmişdir.

Aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 3. *Tutaq ki,* $\beta \in \left[0, \frac{27}{4}\right)$. *Onda istənilən* $u(t) \in W_2^3(R;H)$ *üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:*

$$\left\| F_j\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right)u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \|\mathrm{P}_0 u\|_{L_2(R;H)}^2 - \beta \left\| A^{3-j}\frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(R;H)}^2, \quad j=1,2.$$

S.S.Mirzəyevin metodikasınını nəzərə alaraq teorem 3-dən istifadə etməklə aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem 4. $N_j = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad j=1,2.$

Sonra $A_j \neq 0$, $j=1,2$ halına baxaraq və alınan nəticələri nəzərə alaraq (1) tənliyinin requlyar həllolunması isbat edilir.

Teorem 5. *Tutaq ki,* $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ *operatorları* H *fəzasında məhduddur və*

$$\left\|A_1 A^{-1}\right\|_{H\to H} + \left\|A_2 A^{-2}\right\|_{H\to H} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda (1) *tənliyi requlyar həllolunandır.*

Birinci fəslin sonunda xüsusi törəməli bir tənlik üçün (1) tənliyinin requlyar həllolunma şərti yoxlanılır.

İkinci fəsildə $R_+ = [0,+\infty)$ yarımoxunda

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)^3 u(t) + A_1\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_2\frac{du(t)}{dt} = f(t), \quad t\in R_+, \tag{3}$$

$$u(0)=\frac{du(0)}{dt}=\frac{d^2u(0)}{dt^2}=0 \tag{4}$$

başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllolunması araşdırılır, burada $A=A^*\geq cE,\ c>0$, A_1, A_2 - xətti, ümumiyyətlə desək qeyri-məhdud operatorlardır, $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$,

$$L_2(R_+;H)=\left\{f(t):\|f\|^2_{L_2(R_+;H)}=\int_0^{+\infty}\|f(t)\|_H^2\,dt<+\infty\right\},$$

$$W_2^3(R_+;H)=\left\{u(t):\|u\|^2_{W_2^3(R_+;H)}=\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^3u(t)}{dt^3}\right\|_H^2+\left\|A^3u(t)\right\|_H^2\right)dt<+\infty\right\}.$$

Tərif 3. *Əgər $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$ funksiyası* (3) *tənliyini R_+-də sanki hər yerdə ödəyirsə, onda onu* (3) *tənliyinin requlyar həlli adlandıracağıq.*

Tərif 4. *Əgər istənilən $f(t)\in L_2(R_+;H)$ üçün* (3) *tənliyinin sıfırda* (4) *şərtini*

$$\lim_{t\to 0}\left\|A^{5/2-j}\frac{d^ju(t)}{dt^2}\right\|=0,\ j=0,1,2$$

mənasında ödəyən $u(t)$ requlyar həlli varsa və

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}\leq const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda (3), (4) *başlanğıc-sərhəd məsələsini requlyar həllolunan adlandıracağıq.*

Bu fəsildə birinci fəsildə olduğu kimi hərəkət edərək (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsinin requlyar həllolunması üçün kafi şərtlər tapılır.

Teorem 6. *Tutaq ki, A_jA^{-j}, $j=1,2$ operatorları H fəzasında məhduddurlar və*

$$\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}<\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda (3), (4) *başlanğıc-sərhəd məsələsi requlyar həllolunandır.*

Burada (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsinin requlyar həllolunması şərtləri ilə

$$W_2^3(R_+;H;\{0\}) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^3(R_+;H),\ u(0) = \frac{du(0)}{dt} = \frac{d^2u(0)}{dt^2} = 0 \right\}$$

fəzasında (3) tənliyinin baş hissəsinin doğurduğu operatorun normasından asılı

$$A^{3-j} \frac{d^j}{dt^j} : W_2^3(R_+;H;\{0\}) \to L_2(R_+;H),\ j = 1,2$$

aralıq törəmə operatorlarının normalarının dəqiq qiymətlərinin tapılması arasında əlaqə göstərilmişdir.

İkinci fəslin sonunda xüsusi törəməli tənlik üçün bir qarışıq məsələnin nümunəsində (3), (4) məsələsinin requlyar həllolunması şərtləri yoxlanılır.

İlk iki fəsildə alınan nəticələrlə bağlı onu da qeyd etmək lazımdır ki, həm (1) tənliyi üçün, həm də (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsi üçün tapılan requlyar həllolunma şərtləri operator əmsalları terminində yaxşılaşdırılabilməyəndir.

Qeyd edək ki, A.R.Əliyev və A.L.Elbablinin işində özünün xarakterik xassələrinə görə kvazielliptik operator-diferensial tənliyə yaxın olan təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli operator-diferensial tənlik üçün bütün oxda və yarımoxda oxşar tədqiqatlar aparılıb.

Üçüncü fəsildə

$$P(\lambda) = (\lambda E + A)^3 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 \qquad (5)$$

polinomial operator dəstəsi üçün spektral nəzəriyyənin bəzi məsələləri araşdırılır, burada E - vahid operator, A, A_1, A_2 - H separabel Hilbert fəzasında xətti operatorlardır. (5) dəstəsi ilə

$$P(d/dt)u(t) = 0,\ t \in R_+, \qquad (6)$$

$$u(0) = \varphi_0,\ \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1,\ \frac{d^2u(0)}{dt^2} = \varphi_2 \qquad (7)$$

başlanğıc-sərhəd məsələsini əlaqələndirək, burada $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$, $\varphi_j \in H_{5/2-j}$, $j = 0,1,2$.

Əvvəlcə (5) dəstəsinin rezolventasının analitik xassələri öyrənilir.

Teorem 7. *Tutaq ki, A - öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator, A_1A^{-1}, A_2A^{-2} - H fəzasında məhdud operatorlardır və*

$$\| A_1 A^{-1} \| + \| A_2 A^{-2} \| < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Onda $\overline{\Pi}_+ = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ *sağ yarımmüstəvisində* $P(\lambda)$ *dəstəsinin rezolventası var və*

$$\sum_{j=0}^{2} \left\| \lambda^{3-j} A^j P^{-1}(\lambda) \right\| \leq const \tag{8}$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Nəticə 1. *Tutaq ki, teorem 7-nin bütün şərtləri ödənilir. Onda kiçik* $\theta > 0$ *üçün*

$$S_{\mp\theta} = \left\{ \lambda : \left| \arg\lambda \mp \frac{\pi}{2} \right| < \theta \right\}$$

sektorunda $P^{-1}(\lambda)$ *var və* (8) *qiymətləndirilməsi doğrudur.*

Bununla yanaşı aşağıdakı teorem də doğrudur

Teorem 8. *Tutaq ki, teorem 7-nin şərtləri ödənilir və* A^{-1} *-* H *fəzasında tamam kəsilməz operatordur. Onda* $P(\lambda)$ *operator dəstəsi, mümkün limit nöqtəsi yalnız sonsuzluq ola bilən, diskret spektrə malikdir.*

Sonra (6), (7) başlanğıc-sərhəd məsələsinə cavab verən, (5) polinomial operator dəstəsinin məxsusi və qoşma vektorlarından qurulmuş zəncirin tamlığı isbat edilir.

Tutaq ki, λ_n $(\operatorname{Re}\lambda_n < 0)$ - (5) operatorlar dəstəsinin məxsusi ədədləri, $\psi_{0,n}, \psi_{1,n}, ..., \psi_{m,n}$ - isə bu dəstənin λ_n məxsusi ədədlərinə cavab verən məxsusi və qoşma vektorlar sistemidir:

$$P(\lambda_n)\psi_{0,n} = 0\,,\ P(\lambda_n)\psi_{1,n} + \frac{P'(\lambda_n)}{1!}\psi_{0,n} = 0\,,$$

$$P(\lambda_n)\psi_{2,n} + \frac{P'(\lambda_n)}{1!}\psi_{1,n} + \frac{P''(\lambda_n)}{2!}\psi_{0,n} = 0\,,$$

$$P(\lambda_n)\psi_{l,n} + \frac{P'(\lambda_n)}{1!}\psi_{l-1,n} + \frac{P''(\lambda_n)}{2!}\psi_{l-2,n} + \frac{P'''(\lambda_n)}{3!}\psi_{l-3,n} = 0\,,\ l = 3,...,m\,.$$

Onda

$$u_{h,n}(t) = e^{\lambda_n t}\left(\frac{t^h}{h!}\psi_{0,n} + \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\psi_{1,n} + ... + \frac{t}{1!}\psi_{h-1,n} + \psi_{h,n} \right),\ \ h = 0,1,...,m$$

vektor-funksiyaları $W_2^3(R_+; H)$ fəzasına daxildir və (6) tənliyini ödəyirlər. Bu həllər (6) tənliyinin azalan elementar həlləri adlanır. Onların köməyi ilə

$$\widetilde{\psi}_{h,n} = \left\{ \psi_{h,n}^{(0)}, \psi_{h,n}^{(1)}, \psi_{h,n}^{(2)} \right\} \in \widetilde{H} \equiv H_{5/2} \oplus H_{3/2} \oplus H_{1/2}$$

vektorunu təyin edək, burada

$$\psi_{h,n}^{(j)} \equiv \frac{d^j}{dt^j} u_{h,n}(t)\Bigg|_{t=0}, \; j = 0,1,2, \; h = 0,1,\ldots,m.$$

$\{\widetilde{\psi}_{h,n}\}_{n=1}^{\infty}$ sistemini (6), (7) başlanğıc-sərhəd məsələsinin doğurduğu (5) dəstəsinin məxsusi və qoşma vektorlarının törəmə zənciri adlandıracağıq.

$\{\widetilde{\psi}_{h,n}\}_{n=1}^{\infty}$ məxsusi və qoşma vektorlarının törəmə zəncirinin $\widetilde{H}$ fəzasında tamlığı məsələsinə keçməzdən əvvəl (6), (7) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllolunmasını araşdırmaq lazımdır.

Tərif 5. *Əgər* $P(d/dt)u(t) = 0$ *tənliyini* R_+*-də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$ *vektor-funksiyası varsa, onu* (6) *tənliyinin requlyar həlli adlandıracağıq.*

Tərif 6. *Əgər istənilən* $\varphi_j \in H_{5/2-j}$, $j = 0,1,2$ *üçün* (6) *tənliyinin* (7) *sərhəd şərtlərini*

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} - \varphi_j \right\|_{H_{5/2-j}} = 0, \; j = 0,1,2$$

mənasında ödəyən $u(t)$ *requlyar həlli varsa və*

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \le const\left(\|\varphi_0\|_{H_{5/2}} + \|\varphi_1\|_{H_{3/2}} + \|\varphi_2\|_{H_{1/2}}\right)$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda (6), (7) *başlanğıc-sərhəd məsələsini requlyar həllolunan adlandıracağıq.*

Teorem 9. *Tutaq ki,* A *- öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur,* $A_j A^{-j}$, $j = 1,2$ H *fəzasında məhduddur və*

$$\left\|A_1 A^{-1}\right\|_{H \to H} + \left\|A_2 A^{-2}\right\|_{H \to H} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda (6), (7) *başlanğıc-sərhəd məsələsi requlyar həllolunandır.*

M.G.Qasımovun işindəki ideyadan istifadə edərək (6), (7) başlanğıc-sərhəd məsələsinin requlyar həllolunan olmasını və (5) dəstəsinin analitik xassələrini nəzərə almaqla aşağıdakı isbat edilir.

Teorem 10. *Tutaq ki,* A *- öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur,* $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$, $A_j A^{-j}$, $j = 1,2$ H *fəzasında məhduddur və*

$$\left\|A_1 A^{-1}\right\|_{H \to H} + \left\|A_2 A^{-2}\right\|_{H \to H} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda əgər

1) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p \le 1$;

2) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p < \infty$, $A_j A^{-j} \in \sigma_\infty(H)$, $j = 1,2$,

şərtlərindən biri doğrudursa, $\{\widetilde{\psi}_{h,n}\}_{n=1}^{\infty}$ *sistemi* $\widetilde{H}$ *fəzasında tamdır.*

Burada σ_p işarəsi Şatten-Neyman siniflərini göstərir.

Qeyd edək ki, teorem 9-da elə kafi şərtlər göstərilmişdir ki, (6), (7) başlanğıc-sərhəd məsələsi bu şərtlər daxilində istənilən $\varphi_j \in H_{5/2-j}$, $j = 0,1,2$ üçün $W_2^3(R_+;H)$ fəzasından olan yeganə requlyar həllə malikdir. Üçüncü fəslin sonunda bütün belə həllər fəzasında (6) tənliyinin azalan elementar həllər sisteminin tamlığı isbat edilir.

Teorem 11. *Пусть Tutaq ki, teorem 10-nun bütün şərtləri ödənilir. Onda (6) tənliyinin azalan elementar həllər sistemi onun bütün requlyar həllər fəzasında tamdır.*

(5) dəstəsinin baş hissəsi özünün xarakterik xassələrinə görə parabolik tipə mənsubdur və təkrarlanan xarakteristikaya malikdir. Qeyd edək ki, M.G.Qasımovun, S.S.Mirzəyevin, A.R.Əliyevin və onların tələbələrinin işlərində ya elliptik tip polinomial operator dəstələri, ya da öz xarakterik xassələrinə görə elliptik tipə yaxın olan təkrarlanan xarakteristikaya malik dəstələr öyrənilib. Yalnız F.A.Quliyevanın işində təkrarlanan xarakteristikaya malik olan ikitərtibli parabolik operator dəstələrinə baxılmışdır.

Sonuncu, dördüncü fəsil (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsinin $f(t) \in L_{2,\kappa}(R_+;H)$, $u(t) \in W_{2,\kappa}^3(R_+;H)$ şərtləri daxilində korrekt və birqiymətli həllolunması məsələlərinə həsr olunub, burada

$$L_{2,\kappa}(R_+;H) = \left\{ f(t) : \|f\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 e^{-\kappa t} dt \right)^{1/2} < +\infty \right\},$$

$$W_{2,\kappa}^3(R_+;H) =$$

$$= \left\{ u(t) : \|u\|_{W_{2,\kappa}^3(R_+;H)} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|_H^2 + \left\| A^3 u(t) \right\|_H^2 \right) e^{-\kappa t} dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

Qeyd edək ki, $\kappa = 0$ olduqda

$$L_{2,0}(R_+;H) = L_2(R_+;H), \quad W_{2,0}^3(R_+;H) = W_2^3(R_+;H)$$

fəzalarını alarıq.

Hilbert fəzalarında eksponensial çəkili operator-diferensial tənliklərin həllolunması məsələlərinə bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən baxılıb. Onların arasından A.A.Şkalikovun, S.S.Mirzəyevin, A.R.Əliyevin və onların tələbələrinin işlərini xüsusilə qeyd etmək lazımdır. Onların baxdıqları tənliklər özlərinin xarakteristik xüsusiyyətlərinə görə elliptik və kvazielliptik tənliklərə yaxın olub həm sadə, həm də təkrarlanan xarakteristikalara malikdirlər. Öncədən qeyd edildiyi kimi, (3) tənliyi təkrarlanan xarakteristikalı baş hissəyə malikdir, amma parabolikdir. Qeyd edək ki, fikrimizcə, indiyədək riyazi ədəbiyyatda çəkili fəzalarda (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsi üçün korrekt və birqiymətli həllolunmanın əmsal şərtlərinə görə tədqiqatına toxunulmayıb.

Əvvəlcə (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsi $A_1 = A_2 = 0$ üçün araşdırılır.

$$W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H;\{0\}\right)=\left\{u(t): u(t)\in W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H\right),\ u(0)=\frac{du(0)}{dt}=\frac{d^2u(0)}{dt^2}=0\right\}$$

fəzasını daxil edək və P_0 ilə $W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H;\{0\}\right)$ fəzasından $L_{2,\kappa}\left(R_+;H\right)$ fəzasına

$$\mathrm{P}_0 u(t)\equiv\left(\frac{d}{dt}+A\right)^3 u(t),\quad u(t)\in W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H;\{0\}\right)$$

şəklində təsir edən operatoru işarə edək.

Aşağıdakı hökm doğrudur

Teorem 12. *Tutaq ki, A - spektrinin aşağı sərhədi λ_0 olan öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur ($A = A^* \geq \lambda_0 E$, $\lambda_0 > 0$) və $\kappa > -2\lambda_0$. Onda P_0 operatoru $W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H;\{0\}\right)$ və $L_{2,\kappa}\left(R_+;H\right)$ fəzaları arasında izomorfizm əmələ gətirir.*

Teorem 12-dən çıxır ki, $\kappa > -2\lambda_0$ üçün $\left\|\mathrm{P}_0 u\right\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}$ və $\left\|u\right\|_{W_{2,\kappa}^3(R_+;H)}$ normaları $W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H;\{0\}\right)$ fəzasında ekvivalentdirlər.

$$A^j\frac{d^{3-j}}{dt^{3-j}}: W_{2,\kappa}^3\left(R_+;H;\{0\}\right)\to L_{2,\kappa}\left(R_+;H\right),\ j=1,2$$

aralıq törəmə operatorları kəsilməz olduğundan onların normalarını $\left\|\mathrm{P}_0 u\right\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}$ normasına nəzərən də qiymətləndirmək olar.

Teorem 13. *Tutaq ki,* $-2\lambda_0 < \kappa < 2\lambda_0$. *Onda istənilən* $u(t) \in W_{2,\kappa}^3\left(R_+; H; \{0\}\right)$ *üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:*

$$\left\| A^j \frac{d^{3-j}u}{dt^{3-j}} \right\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)} \le c_j(\kappa) \left\| \mathrm{P}_0 u \right\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}, \quad j = 1,2, \qquad (9)$$

burada

$$c_1(\kappa) = \left(1 - \frac{|\kappa|}{2\lambda_0}\right)^{-1}, \quad c_2(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{|\kappa|}{2\lambda_0}\right)^{-1}.$$

(9) qiymətləndirmələri Sobolev tipli çəkili fəzalarda (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllolunmasını təmin edən əmsal şərtlərinin müəyyən edilməsində əsas rol oynayır.

Sonra alınan nəticələr nəzərə alınmaqla (3) tam tənliyinə (yəni $A_j \neq 0$, $j = 1,2$ halına) baxılaraq Sobolev tipli çəkili fəzalarda (3), (4) başlanğıc-sərhəd məsələsi üçün həllolunma şərtləri tapılır.

Teorem 14. *Tutaq ki,* $A = A^* \ge \lambda_0 E$ *(*$\lambda_0 > 0$*),* $-2\lambda_0 < \kappa < 2\lambda_0$, $A_j A^{-j}$, $j = 1,2$ *operatorları* H *fəzasında məhduddurlar və*

$$c_1(\kappa) \left\| A_1 A^{-1} \right\|_{H \to H} + c_2(\kappa) \left\| A_2 A^{-2} \right\|_{H \to H} < 1,$$

bərabərsizliyi ödənir, burada $c_1(\kappa)$, $c_2(\kappa)$ *teorem 13-də müəyyən edilmiş ədədlərdir. Onda istənilən* $f(t) \in L_{2,\kappa}(R_+; H)$ *üçün* (3), (4) *başlanğıc-sərhəd məsələsi* $W_{2,\kappa}^3(R_+; H)$ *fəzasından olan* $u(t)$ *yeganə həllə malikdir.*

Qeyd edək ki, bu fəsilin nəticələrindən istifadə edilərək eksponensial çəkinin göstəricisi ilə (3) tənliyinin baş hissəsində iştirak edən A operatorunun spektrinin aşağı sərhədi arasında əlaqə müəyyən edilmişdir.

Dördüncü fəsil ikinci fəsildə baxılmış xüsusi törəməli tənlik üçün qarışıq məsələ misalının, çəki halı nəzərə alınmaqla, yenidən araşdırılması ilə yekunlaşır.

Sonda müəllif öz elmi rəhbəri riyaziyyat elmləri üzrə doktor, professor A.R.Əliyevə məsələnin qoyuluşuna və dissertasiya üzərində görülən bütün işlərdə göstərdiyi qayğıya görə minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın əsas məzmunu aşağıdakı işlərdə çap edilmişdir:

1. Lachinova F.S. On a parabolic operator-differential equation / On Actual Problems of Mathematics and Informatics, Abstracts of International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, May 29-31, 2013, Baku, Azerbaijan, p. 69-70.
2. Lachinova F.S. Solvability of a class of parabolic operator-differential equations of third order // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2013, vol. 39 (47), p. 77-86.
3. Лачынова Ф.С. Об условиях разрешимости начально-краевой задачи для одного класса параболических операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-матем. наук, 2013, № 3, с. 48-57.
4. Лачынова Ф.С. Об оценке резольвенты операторного пучка третьего порядка с параболической главной частью // Journal of Qafqaz University, series of mathematics and computer science, 2014, vol. 2, № 1, p. 96-101.
5. Лачынова Ф.С. О полноте производной цепочки операторного пучка третьего порядка с параболической главной частью / Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвящ. 55-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, 15-16 мая 2014 г., Баку, с. 220-221.
6. Lachinova F.S. Completeness of elementary solutions of a third-order operator-differential equation with a parabolic principal part / Abstracts of Azeraijan-Turkey-Ukrainian International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equation and Their Applications, MADEA-7", September 08-13, 2015, Baku, Azerbaijan, p. 99.
7. Лачынова Ф.С. О полноте элементарных решений операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с параболической главной частью // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-матем. наук, 2015, № 2, с. 90-97.
8. Алиев А.Р., Лачынова Ф.С. О разрешимости в весовом пространстве начально-краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с параболической главной частью // Доклады РАН, 2016, т. 466, № 6, с. 637-640.

FIDAN SIMURG kizi LACHINOVA

ON SOLVABILITY OF THIRD ORDER PARABOLIC OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPLE CHARACTERISTIC

SUMMARY

In the dissertation work, well-posed and unique solvability of a third order parabolic operator-differential equation with multiple characteristics in Sobolev-type spaces and spectral problems of a polynomial operator pencil corresponding to this equation, are studied.

The following main results were obtained:

- sufficient conditions of well-posed and unique solvability of a third order parabolic, operator-differential operator with a multiple characteristics considered on the whole of the axis and on the semi-axis in Sobolev type spaces were found;
- the norms of intermediate derivatives operators in Sobolev-type spaces with respect to the norm generated by the principal part of the considered equation were estimated;
- relation of estimations of the norms of intermediate derivatives operators with well-posed and unique solvability conditions was established;
- analytic properties of the resolvent of a third order parabolic operator pencil with multiple characteristic were studied and sufficient conditions of completeness of the derivative chain constructed on eigen and associated vectors of the given pencil and responding to initial-boundary value problem on the semi-axis, are studied;
- the completeness of decreasing elementary solutions of a third order homogeneous parabolic operator-differential equation with a multiple characteristic considered on the semi-axis, was proved.

ФИДАН СИМУРГ кызы ЛАЧЫНОВА

О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

АННОТАЦИЯ

В диссертации исследуются вопросы корректной и однозначной разрешимости в пространствах типа Соболева параболического операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой и спектральные задачи полиномиального операторного пучка, соответствующего данному уравнению. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены достаточные условия корректной и однозначной разрешимости в пространствах типа Соболева для параболического операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемого на всей оси и на полуоси;
- проведены оценки норм операторов промежуточных производных в пространствах типа Соболева относительно нормы, порожденной главной частью рассматриваемого уравнения;
- установлена связь оценок норм операторов промежуточных производных с условиями корректной и однозначной разрешимости;
- исследованы аналитические свойства резольвенты параболического операторного пучка третьего порядка с кратной характеристикой и указаны достаточные условия полноты производной цепочки, построенной по собственным и присоединенным векторам данного пучка и отвечающей начально-краевой задачи на полуоси;
- доказана полнота убывающих элементарных решений однородного параболического операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемого на полуоси.

Çapa imzalanmışdır: “08” noyabr 2016

Format 60x84, 1/16. Tiraj 100 nüsxə

“Bakı Universiteti” nəşriyyatı

Bakı, AZ 1148, Z.Xalilov küç., 23

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ФИДАН СИМУРГ кызы ЛАЧЫНОВА

О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

1211.01 - Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

БАКУ – 2016