АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЛЕЙЛА ИБРАГИМ кызы МАММАДОВА

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОБОБЩЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2015

Работа выполнена в отделе "Функциональный анализ" Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Идаят М. Гусейнов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Низамеддин Ш. Искендеров
(Бакинский Государственный Университет)

кандидат физико-математических наук, доцент **Тельман Б. Касумов**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана)

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, кафедра "Математический анализ"

Защита диссертации состоится 10 апреля 2015 года в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета D 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 05 марта 2015 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
D 01.111 ИММ НАНА **д.м.н. В.Э. Исмаилов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена решению прямых и обратных задач спектрального анализа для оператора диффузии с сингулярным коэффициентом. Прямыми спектральными задачами обычно называют изучение основных спектральных данных краевых задач. Под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления операторов по их некоторым заданным спектральным данным, к которым можно отнести один, два и большее число спектров, спектральную функцию, спектр и нормировочные числа, функцию Вейля и т.д. В настоящее время теория обратных спектральных задач интенсивно развивается благодаря появлению новых приложений в механике, геофизике, электронике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Например, такие задачи возникают в квантовой механике при определении внутриатомных сил по известным уровням энергии, в радиотехнике при синтезе параметров неоднородных линий передач, в теории упругости при определении размеров поперечных сечений балки по заданным частотам ее собственных колебаний и т.д.

Обратные спектральные задачи также играют существенную роль при интегрировании эволюционных уравнений математической физики (таких, как уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Буссинеска и др.). В 1967 г. Г. Гарднер, Дж. Грин, М. Крускал и Р. Миура обнаружили глубокую связь между нелинейным уравнением Кортевега-де Фриза и спектральной теорией операторов Штурма-Лиувилля. Созданный ими метод обратной задачи породил новое направление в математической физике и вызвал очередной всплеск интереса к обратным задачам спектрального анализа. В связи с этим значение обратных задач значительно возросло в последнее время и изучение различных вариантов таких задач стало весьма актуальным.

В настоящее время по теории обратных задач имеется обширная литература. Наиболее полно современное состояние этой теории и ее приложений отражено в монографиях В.А. Марченко, Б.М. Левитана, Ж. Пошеля и Е. Трубовица, В.А. Юрко, В.А. Садовничего, Я.Т. Султанаева и А.М. Ахтямова, Н.Ш. Искендерова, А.Х. Ханмамедова, И.М. Набиева.

Наиболее полные результаты в области прямых и обратных спектральных задач известны для дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y\,. \qquad (1)$$

Первые исследования в этой области принадлежат Д. Бернулли, Даламберу, Эйлеру, Лиувиллю и Штурму. Они связаны с решением уравнения, описывающего колебания струны. Теория обратных задач для уравнения (1) получила интенсивное развитие в XX веке. Первое основательное исследование восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной информации было предпринято шведским математиком Г. Боргом. Он доказал, что два спектра дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с одним общим краевым условием однозначно определяют функцию $q(x)$.

Большую роль в разных областях спектральной теории операторов сыграли операторы преобразования. К исследованию обратных задач и асимптотического поведения спектральной функции сингулярного оператора Штурма-Лиувилля операторы преобразования впервые применил В.А. Марченко. Он доказал единственность оператора Штурма-Лиувилля с заданной спектральной функцией и единственность решения ряда других обратных спектральных задач. Аппарат операторов преобразования применялся также И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном в их фундаментальной работе, где были получены необходимые и достаточные условия и метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции. Эффективному построению классического оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам посвящены статьи М.Г. Крейна. Полное решение обратной задачи в постановке Г. Борга (т.е. задачи восстановления оператора l на отрезке по двум спектрам) содержится в известной работе М.Г. Гасымова и Б.М. Левитана.

Во многих физических и технических приложениях важную роль играют краевые задачи с неразделенными граничными условиями. В работах И.В. Станкевича, В.А. Садовничего, Я.Т. Султанаева, А.М. Ахтямова, В.А. Марченко, И.В. Островского, М.Г. Гасымова, И.М. Гусейнова, И.М. Набиева, О.А. Плаксиной, В.А. Юрко, Е.Л. Коротяева, А.С. Макина разными методами полностью решены обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма-Лиувилля с неразделенными самосопряженными (в том числе периодическими и антипериодическими) и несамосопряженными граничными условиями. Прямые и обратные задачи для оператора l с потенциалами из пространств Соболева исследовали А.М. Савчук и А.А. Шкаликов. Задаче восстановления этого оператора на отрезке по спектрам двух краевых задач со спектральным параметром в граничных условиях посвящена статья Н.Дж. Кулиева.

Различные варианты прямых и обратных задач для дифференциального уравнения диффузии

$$l_\lambda y = y'' + \left[\lambda^2 - \lambda p(x) - q(x)\right] y = 0, \qquad (2)$$

являющегося естественным обобщением уравнения Штурма-Лиувилля (1), полностью исследованы М.Г. Гасымовым, М.Г. Гасымовым и Г.Ш. Гусейновым, Г.Ш. Гусейновым, И.М. Гусейновым и И.М. Набиевым, И.М. Набиевым, И.М. Набиевым и А.Ш. Шукюровым, В.А. Юрко, В.Н. Пивоварчиком, С.А. Бутериным и В.А. Юрко, Н.И. Пронска, Х.-Ф. Янгом.

С дифференциальными уравнениями (1) и (2) связана также и другая обратная задача – обратная задача рассеяния, когда требуется найти l и l_λ по данным рассеяния на бесконечности. Ее исследование проведено в работах Л.Д. Фаддеева, З.С. Аграновича и В.А. Марченко, М. Жолана и К. Жана, И.М. Гусейнова, Ф.Г. Максудова и Г.Ш. Гусейнова и других авторов.

Много приложений связано с обратными задачами для дифференциальных уравнений (1) и (2) с разрывными коэффициентами, для задач с условиями разрыва внутри интервала, для уравнений с особенностями и точками поворота. Отметим, что краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными или негладкими свойствами среды и появляются, например, в радиоэлектронике и в различных геофизических моделях земного шара. Кроме того, задача о колебаниях струны с закрепленными концами в некоторой внутренней точке, в которой помещена сосредоточенная масса, приводится к краевой задаче для уравнения колебания с условием разрыва во внутренней точке. В работе А.Н. Тихонова получена теорема единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля на полуоси по заданной функции Вейля в случае кусочно-аналитического потенциала, а в статье М.Г. Гасымова исследована единственность восстановления потенциала оператора l по данным рассеяния и по спектральной функции в случае кусочно-постоянного коэффициента. Спектральные задачи (на отрезке, на полуоси и на всей оси) в различных постановках для дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами, с особенностью и условиями разрыва во внутренней точке рассматриваемого промежутка исследовались в работах Т. Актосуна, М. Клауса и К. Мея, Р.Х. Амирова и В.А. Юрко, И.М. Гусейнова и Р.Т. Пашаева, Э.Н. Ахмедовой и И.М. Гусейнова, Г. Фрилинга и В.А. Юрко, А.Е. Федосеева, О.Х. Хальда, М. Кобаяши, Х.-Ф. Янга и Х.-Ж. Йу, В.А. Юрко, М. Кадакала и О.Ш. Мухтарова, И.М. Гусейнова и Дж.А. Османлы, Р.Х. Амирова и А.А. Набиева, А. Гомилько и В. Пивоварчика, Х.Р. Мамедова, Т.Б. Касумова и А.А. Гусейнли, М.Дж. Манафова и других авторов. Вопросам восстановления на всей оси указанного пучка с сингулярным коэффициентом и со спектральным параметром в условии разрыва посвящены работы И.М. Гусейнова и А.Г. Джамшидипура.

Однако стоит отметить, что многие важные классы прямых и обратных задач, в силу их сложности, изучены недостаточно или совсем не изучены. Исследованию некоторых из таких классов и посвящена данная диссертация.

Цель работы. Изучение основных свойств спектральных данных и решение обратной задачи восстановления оператора диффузии с сингулярным коэффициентом.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также асимптотические методы.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

– найдено интегральное представление решения уравнения Штурма-Лиувилля с условиями разрыва внутри интервала и изучены некоторые свойства ядра этого представления;
– изучены основные свойства собственных значений оператора диффузии с сингулярным коэффициентом;
– доказана теорема о полноте и о разложении по собственным функциям;

– дано полное решение обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва на полуоси;
– получены достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва внутри интервала.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах спектральной теории дифференциальных операторов, в частности, в теории обратных задач, а также при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений математической физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах по обратным задачам отдела «Функциональный анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. – проф. И.М. Гусейнов и проф. Н.Ш. Искендеров), на семинаре отдела «Дифференциальные уравнения» ИММ НАН Азербайджана (рук.– проф. А.Б. Алиев), на международной конференции, посвященной 80-летию академика Ф.Г. Максудова (Баку, 11-13 мая 2010 г.), на общеинститутском семинаре ИММ НАН Азербайджана, на международной конференции, посвященной 100-летию академика З.И. Халилова (Баку, 12-14 января 2011 г.), на международной конференции "Актуальные проблемы математики и информатики", посвященной 90-летию Гейдара Алиева (Баку, 29-31 мая 2014 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 82 наименования. Объем диссертации 110 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой настоящей диссертационной работы и излагаются основные результаты диссертации.

В связи с важными приложениями к задачам квантовой механики представляет интерес исследование прямых и обратных задач для пучка l_λ с обобщенным коэффициентом $p(x)=\beta\delta(x-a)$, где β − вещественное число, $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Решением уравнения (2) в этом случае будем называть всякую функцию $y(x)\in W_2^2(\Omega)$ $(\Omega=[0,\pi]\setminus\{a\})$, удовлетворяющую уравнению Штурма-Лиувилля (1) и условию разрыва в точке a

$$y'(a+0)-y'(a-0)=\lambda\beta\, y(a). \qquad (3)$$

Присоединим к (1), (3) граничные условия

$$y(0)=y(\pi)=0 \qquad (4)$$

и

$$y(0)=y'(\pi)=0. \qquad (5)$$

Задачу (1), (3), (4) будем обозначать через P_1, а задачу (1), (3), (5) − через P_2.

В первой главе, состоящей из пяти параграфов, приведены простейшие спектральные свойства краевых задач P_1 и P_2, найдено интегральное представление решения уравнения Штурма-Лиувилля (1) с условиями разрыва (3), выведены асимптотические формулы для собственных значений задач P_1 и P_2 и доказана теорема о взаимном расположении собственных значений этих краевых задач. Кроме того, найдены асимптотики собственных функций и нормировочных чисел и доказана теорема о полноте и о разложении по собственным функциям.

В параграфе 1.1 построено интегральное представление решения $f(x,\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$f(0,\lambda)=1\,,\ \ f'(0,\lambda)=i\lambda \tag{6}$$

и условию разрыва (3) и изучены свойства ядра этого представления.

Теорема 1. *При всех вещественных λ решение $f(x,\lambda)$ задачи (1), (3), (6) представимо в виде* $f(x,\lambda)=f_0(x,\lambda)+\int\limits_{-x}^{x}A(x,t)e^{i\lambda t}dt$*,*

где $f_0(x,\lambda)=\begin{cases} e^{i\lambda x}, & x<a, \\ A_0e^{i\lambda x}+B_0e^{i\lambda(2a-x)}, & x>a, \end{cases}$ $\quad A_0=\dfrac{2-\beta i}{2},\ B_0=\dfrac{\beta i}{2}$.

функция $A(x,t)$ непрерывна при $t\neq 2a-x,\ t\neq a$ и удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{-x}^{x}|A(x,t)|dt\le e^{c\sigma_1(x)}-1,$$

в котором

$$c=1+|\beta|,\ \sigma_1(x)=\int\limits_0^x(x-t)|q(t)|dt.$$

Кроме того, $A(x,x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)ds, & 0\le x<a, \\ \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\beta i}{4}\right)\int\limits_0^x q(s)ds, & a<x\le\pi, \end{cases}$

$$A(x,-x)=0,\ \frac{d}{dx}\left[A(x,2a-x+0)-A(x,2a-x-0)\right]=\frac{\beta i}{4}q(x),\ a<x\le\pi.$$

Обозначим через $s(x,\lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda)=0,\ s'(0,\lambda)=1$ и условию разрыва (3). Характеристическими функциями краевых задач P_1 и P_2, нули которых совпадают с собственными значениями этих задач, являются целые функции $\Delta_1(\lambda)=s(\pi,\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda)=s'(\pi,\lambda)$ соответственно.

В дальнейшем для краткости будем говорить, что выполняется условие (A), если для всех функций $y(x) \in W_2^2(\Omega)$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (3)-(4) (или (3), (5)), выполняется неравенство

$$\int_0^{\pi} \left\{ |y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2 \right\} dx > 0. \qquad (7)$$

(легко заметить, что неравенство (7) заведомо выполняется, если $q(x) > 0$). В параграфах 1.2-1.5 будем предполагать, что выполняется условие (A). Ниже точкой над функцией будем обозначать производную функции по параметру λ.

Параграф 1.2 посвящен изложению простейших спектральных свойств краевых задач P_1 и P_2.

Лемма 1. *Собственные значения краевых задач P_1 и P_2 вещественны, отличны от нуля и простые*

Лемма 2. *Если $y(x)$ – собственная функция задачи P_1 (или P_2), соответствующая собственному значению λ, то*

$$2\lambda \int_0^{\pi} |y(x)|^2 dx - \beta |y(a)|^2 \neq 0 .$$

Более того, имеет место соотношение

$$\operatorname{sgn}\left(2\lambda \int_0^{\pi} |y(x)|^2 dx - \beta |y(a)|^2 \right) = \operatorname{sgn} \lambda .$$

В параграфах 1.3-1.5 найдены асимптотики собственных значений, собственных функций и нормировочных чисел, доказана перемежаемость собственных значений задач P_1 и P_2, установлена полнота системы собственных функций и получено разложение по собственным функциям. Основными результатами этих параграфов являются следующие утверждения.

Теорема 2. *Собственные значения* λ_k *и* υ_k *(*$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$*) краевых задач* P_1 *и* P_2 *удовлетворяют при* $|k| \to \infty$ *асимптотическим формулам*

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + \frac{b_k}{\lambda_k^0} + \frac{\alpha_k}{k}, \qquad \upsilon_k = \upsilon_k^0 + \frac{c_k}{\upsilon_k^0} + \frac{\beta_k}{k}, \tag{8}$$

где λ_k^0 *и* υ_k^0 $-$ *нули характеристических функций краевых задач* P_1 *и* P_2 *при* $q(x) \equiv 0$*, т.е. функций*

$$\Delta_1^0(\lambda) = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} - \beta\, \frac{\cos \lambda\pi - \cos \lambda(2a - \pi)}{2\lambda}$$

и

$$\Delta_2^0(\lambda) = \cos \lambda\pi + \frac{\beta}{2}\left[\sin \lambda\pi + \sin \lambda(2a - \pi)\right],$$

$$b_k = \frac{1}{\lambda_k^0 \dot{\Delta}_1^0(\lambda_k^0)} \operatorname{Re}\left[A_1\left(1 - \frac{i\beta}{2}\right)e^{i\lambda_k^0 \pi} - \frac{i\beta A_2}{2} e^{i\lambda_k^0(2a-\pi)}\right], \tag{9}$$

$$c_k = -\frac{1}{\dot{\Delta}_2^0(\upsilon_k^0)} \operatorname{Im}\left[A_1\left(1 - \frac{i\beta}{2}\right)e^{i\upsilon_k^0 \pi} + \frac{i\beta A_2}{2} e^{i\upsilon_k^0(2a-\pi)}\right] \tag{10}$$

– ограниченные последовательности, $A_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)\,dt$,

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\int_a^\pi q(t)\,dt - \int_0^a q(t)\,dt\right), \ \{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \in l_2.$$

Теорема 3. *Собственные значения* λ_k *и* υ_k *(*$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$*) краевых задач* P_1 *и* P_2 *перемежаются в следующем смысле:*

$$\ldots < \lambda_{-2} < \upsilon_{-2} < \lambda_{-1} < \upsilon_{-1} < 0 < \upsilon_1 < \lambda_1 < \upsilon_2 < \lambda_2 < \ldots \tag{11}$$

Теорема 4. *Для собственных функций* $s(x,\lambda_n)$ *и нормировочных чисел* $\alpha_n = \int_0^\pi s^2(x,\lambda_n)dx - \frac{\beta}{2\lambda_n} s^2(a,\lambda_n)$ *задачи* P_1 *имеют место асимптотические формулы*

$$s(x,\lambda_n) = s_0(x,\lambda_n^0) + \frac{\xi_n(x)}{n}, \qquad \alpha_n = \alpha_n^0 + \frac{\gamma_n}{n},$$

где
$$s_0(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin \lambda x}{\lambda}, & x < a, \\ \dfrac{\sin \lambda x}{\lambda} - \beta \dfrac{\cos \lambda x - \cos \lambda(2a - x)}{2\lambda}, & x > a, \end{cases}$$

$\alpha_n^0 = \int_0^\pi s_0^2(x,\lambda_n^0)dx - \frac{\beta}{2\lambda_n^0} s_0^2(a,\lambda_n^0)$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – *нормировочные числа задачи* P_1 *при* $q(x) \equiv 0$, $|\xi_n(x)| \le C$, C – *некоторая положительная постоянная,* $\{\gamma_n\} \in l_2$.

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения:*

а) система собственных функций $\{s(x,\lambda_n)\}_{|n|\ge 1}$ *краевой задачи* P_1 *полна в* $L_2[0,\pi]$*;*

б) если $g(x)$ *– абсолютно непрерывная функция на* Ω *и*

$$g(0) = g(\pi) = 0,\ g(a-0) = g(a+0),\ \text{то}\ g(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \ne 0}}^{\infty} a_n s(x,\lambda_n),$$

$a_n = \frac{1}{2\alpha_n} \int_0^\pi g(t) s(t,\lambda_n) dt$, *причем ряд сходится равномерно на* $[0,\pi]$*;*

в) для $g(x) \in L_2[0,\pi]$ *ряд из б) сходится в* $L_2[0,\pi]$*, причем имеет место равенство Парсеваля* $\int_0^\pi |g(x)|^2 dx = 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \ne 0}}^{\infty} \alpha_n |a_n|^2$.

Глава 2 посвящена наиболее трудному вопросу: необходимым и достаточным условиям разрешимости обратных задач, т. е. характеристическим свойствам спектральных данных оператора диффузии с сингулярным коэффициентом. В этой главе доказана теорема единственности и найдены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с условием разрыва на полуоси. Далее получены достаточные условия разрешимости обратной задачи по двум спектрам, т.е. условия, при выполнении которых две последовательности вещественных чисел будут спектрами двух краевых задач P_1 и P_2. Вторая глава состоит из трех параграфов.

В параграфе 2.1 доказано утверждение о представлении некоторых классов целых функций экспоненциального типа с заданными нулями, играющих важную роль в рассматриваемых вопросах. Именно, устанавливается следующая лемма, которая может представлять самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Для того чтобы функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускали представления*

$$u(\lambda)=\sin\pi\lambda-\frac{\beta}{2}\left[\cos\pi\lambda-\cos(2a-\pi)\lambda\right]-A_1\frac{4\lambda}{4\lambda^2-1}\cos\pi\lambda-\frac{\beta A_1}{2}\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}+$$
$$+\frac{\beta A_2}{2}\frac{\sin(2a-\pi)\lambda}{\lambda}+\frac{f_1(\lambda)}{\lambda},$$

$$v(\lambda)=\cos\pi\lambda+\frac{\beta}{2}\left[\sin\pi\lambda+\sin(2a-\pi)\lambda\right]-\beta A_1\frac{2\lambda}{4\lambda^2-1}\cos\pi\lambda+A_1\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}+$$
$$+\beta A_2\frac{2(2a-\pi)^2\lambda}{4(2a-\pi)^2\lambda^2-\pi^2}\cos(2a-\pi)\lambda+\frac{f_2(\lambda)}{\lambda},\quad \text{\textit{где}}$$

$$f_j(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}_j(t)e^{it\lambda}dt,\ \ \tilde{f}_j(t)\in L_2[-\pi,\pi],\ j=1,2,\quad f_1(0)=f_1'(0)=0,\ f_2(0)=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $u(\lambda)=\pi\prod\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k^0}$,

$v(\lambda)=\prod\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{\upsilon_k-\lambda}{\upsilon_k^0}$, *где* λ_k^0 *и* υ_k^0 *($k=\pm1,\pm2,\ldots$) − нули функций* $\Delta_1^0(\lambda)$ *и*

$\Delta_2^0(\lambda)$, λ_k *и* υ_k *имеют вид* (8)*, в котором ограниченные последова-*

тельности $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ *определяются формулами* (9), (10), $\beta,\ A_1,\ A_2$ *– некоторые вещественные числа.*

Параграф 2.2 посвящен исследованию обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с условием разрыва в некоторой точке положительной полуоси. Построено основное уравнение обратной задачи, доказана единственность восстановления коэффициента уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси, получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, приведена процедура восстановления потенциала оператора по функции рассеяния.

Рассматривается краевая задача, порожденная уравнением

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \qquad (0 \le x < \infty), \tag{1'}$$

условием разрыва (3) в некоторой точке $a \in (0,\infty)$ и граничным условием

$$y(0) = 0\,. \tag{12}$$

Здесь $q(x)$ – вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty\,. \tag{13}$$

Функцию $e(x,\lambda)$, удовлетворяющую задаче ($1'$), (3) и условию в бесконечности $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1$, назовем решением Йоста этой задачи. Нетрудно показать, что при $q(x) \equiv 0$ решением Йоста будет функция

$$e_0(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda x}\,, & x > a, \\ \left(1 + \dfrac{i\beta}{2}\right)e^{i\lambda x} - \dfrac{i\beta}{2}e^{i\lambda(2a-x)}, & x < a. \end{cases}$$

Если выполняется условие (13) , то решение Йоста задачи ($1'$), (3) существует и представимо в виде

$$e(x,\lambda) = e_0(x,\lambda) + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt\,, \tag{14}$$

причем ядро $K(x,t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|K(x,t)\right| \le \frac{c}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{c\sigma_1(x)},\ \ 0<\left|x-a\right|<t-a\,,$$

$$\left|K(x,t)\right| \le \left\{\frac{c}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)+\frac{|\beta|}{4}\sigma\left(\frac{2a-t+x}{2}\right)\right\}e^{c\sigma_1(x)},\ \ \left|t-a\right|<a-x\,,$$

где $$c=1+\frac{|\beta|}{2}\,,\ \sigma(x)=\int_x^\infty |q(s)|ds\,,\ \sigma_1(x)=\int_x^\infty \sigma(s)ds\,.$$

Кроме того, функция $K(x,t)$ непрерывна при $t\ne 2a-x$, $x\ne a$ и выполняются соотношения

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)ds,\ \ x>a\,,$$

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i\beta}{2}\right)\int_x^\infty q(s)ds,\ \ 0<x<a\,, \tag{15}$$

$$K(x,2a-x+0)-K(x,2a-x-0)=-\frac{i\beta}{4}\left(\int_x^a q(s)ds-\int_a^\infty q(s)ds\right).$$

Обозначим через $s(x,\lambda)$ решение уравнения ($1'$), удовлетворяющее условиям (3), (12) и $s'(0,\lambda)=1$.

Лемма 4. *При всех вещественных* $\lambda \ne 0$ *справедливо тождество*

$$-\frac{2i\lambda s(x,\lambda)}{e(0,\lambda)}=\overline{e(x,\lambda)}-S(\lambda)e(x,\lambda),\ \ \textit{где}\ \ S(\lambda)=\frac{\overline{e(0,\lambda)}}{e(0,\lambda)}.$$

Функция $S(\lambda)$ называется функцией рассеяния задачи ($1'$), (3), (12). Положим $e_0(0,\lambda)=1+\frac{i\beta}{2}-\frac{i\beta}{2}e^{-2i\lambda a}$. Очевидно, что в случае $q(x)\equiv 0$ функция рассеяния будет иметь вид $S_0(\lambda)=\frac{\overline{e_0(0,\lambda)}}{e_0(0,\lambda)}$.

Лемма 5. *Функция* $S_0(\lambda)-S(\lambda)$ *является преобразованием Фурье некоторой функции* $F_S(x)=F_S^{(1)}(x)+F_S^{(2)}(x)$, *т.е.*

$$S_0(\lambda)-S(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F_S(x)e^{-i\lambda x}dx\,,\ \text{где}\ F_S^{(1)}(x)\in L_1(-\infty,\infty),$$

$$\text{а}\ \ F_S^{(2)}(x)\in L_2(-\infty,\infty)\ \ \text{и}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_S^{(2)}(x)\right|<\infty\,.$$

В дальнейшем будем предполагать, что краевая задача ($1'$), (3), (12) не имеет дискретного спектра и виртуального уровня при $\lambda=0$, т.е. $e(0,\lambda)\neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$.

Теорема 6. *При каждом* $x\geq 0$, $x\neq a$ *ядро* $K(x,y)$ *представления* (14) *удовлетворяет основному уравнению обратной задачи рассеяния*

$$\begin{gathered}\overline{K(x,y)}+F_1(x,y)-\frac{i\beta}{2+i\beta}K(x,2a-y)+\\+\int_x^{\infty}K(x,t)F_S(t+y)dt=0,\ y>x,\end{gathered}\tag{16}$$

где
$$F_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S_0(\lambda)-S(\lambda)]e_0(x,\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda=$$
$$=\begin{cases}F_S(x+y), & x>a,\\ \left(1+\dfrac{i\beta}{2}\right)F_S(x+y)-\dfrac{i\beta}{2}F_S(2a-x+y), & 0<x<a.\end{cases}$$

Основное уравнения (16) позволяет уточнить свойства функции рассеяния.

Лемма 6. *Функция* $F_S(x)$ *абсолютно непрерывна на любом отрезке, не содержащем точки* $2a$ *и* $\int_0^{\infty}x\left|F_S'(x)\right|dx<\infty$.

Обратная задача рассеяния состоит в восстановлении коэффициента $q(x)$ уравнения ($1'$) по функции рассеяния.

Теорема 7. *Функция рассеяния однозначно определяет коэффициент* $q(x)$ *уравнения* (1′).

В следующей теореме дается решение обратной задачи рассеяния в классе краевых задач без дискретного спектра и без виртуального уровня.

Теорема 8. *Для того чтобы заданная функция* $S(\lambda)$ *была функцией рассеяния некоторой краевой задачи вида* (1′), (3), (12) *с вещественным коэффициентом* $q(x)$, *удовлетворяющего условию* (13), *с вещественным числом* β, *не имеющей дискретного спектра и виртуального уровня, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) функция $S(\lambda)$ *непрерывна на оси* $-\infty < \lambda < \infty$,

$|S(\lambda)| = S(0) = 1$; *функция* $S_0(\lambda) - S(\lambda)$, *где* $S_0(\lambda) = \dfrac{2 - i\beta\left(1 - e^{2i\lambda a}\right)}{2 + i\beta\left(1 - e^{-2i\lambda a}\right)}$,

стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ *и является преобразованием Фурье функции*

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda) - S(\lambda)\right]e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{17}$$

представимой в виде суммы двух функций, из которых одна принадлежит пространству $L_1(-\infty,\infty)$, *а другая ограничена и принадлежит пространству* $L_2(-\infty,\infty)$; *на положительной полуоси функция* $F_S(x)$ *абсолютно непрерывна на любом отрезке, не содержащем точки* $2a$ *и* $\int_0^{\infty} x\left|F_S'(x)\right|dx < \infty$;

2) приращение аргумента функции $\dfrac{S(\lambda)}{S_0(\lambda)}$ *на действительной оси равно нулю:* $\arg\dfrac{S(\lambda)}{S_0(\lambda)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0$;

3) решение $K(x,y)$ *основного уравнения удовлетворяет условию*

$$K(x,x)\big|_{a-0} = \left(1+\frac{i\beta}{2}\right) K(x,x)\big|_{a+0}. \qquad (18)$$

Для восстановления коэффициента $q(x)$ уравнения ($1'$) по функции рассеяния $S(\lambda)$ нужно построить функцию $F_S(x)$ по формуле (17) и решить интегральное уравнение (16) (из условий 1) и 2) следует разрешимость уравнения (16)). Далее, коэффициент $q(x)$ определяется по формуле (см. (15)):

$$q(x) = \begin{cases} -2K'(x,x), & x > a, \\ -\dfrac{4}{2+i\beta} K'(x,x), & 0 < x < a. \end{cases}$$

Теперь дополнительно предположим, что $a \in (0,\pi)$ и коэффициент $q(x)$ уравнения ($1'$) равен нулю при $x > \pi$ и $q(x) \in L_2(0,\pi)$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Для того чтобы заданная функция* $S(\lambda)$ *была функцией рассеяния некоторой граничной задачи вида* ($1'$), (3), (12)*, где* $a \in (0,\pi)$*,* β *– вещественное число,* $q(x)$ *– вещественнозначная функция, причем* $q(x) \equiv 0$ *при* $x > \pi$ *и* $q(x) \in L_2(0,\pi)$*, не имеющей дискретного спектра и виртуального уровня, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия 1), 2) теоремы 8 и чтобы* $F_S(x) = 0$ *при* $x > 2\pi$ *и* $F_S'(x) \in L_2(0,2\pi)$.

В параграфе 2.3 решается следующая обратная задача: по спектрам краевых задач P_1 и P_2 построить функцию $q(x)$. Получены достаточные условия разрешимости обратной задачи. При доказательстве основного утверждения (теоремы 10) используются результаты по решению обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва на полуоси, полученные в параграфе 2.2.

Теорема 10. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\upsilon_k\}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) *были спектрами краевых задач вида* P_1 и P_2 *соответственно, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) *справедливы неравенства* (11);

(ii) *имеют место асимптотические формулы* (8), *где ограниченные последовательности* $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ *определяются формулами* (9), (10), *в которых* A, B *– некоторые вещественные числа*;

(iii) *решение* $K(x,y)$ *основного уравнения* (16) *удовлетворяет условию* (18)*, где в* (17) *функция* $S(\lambda)$ *имеет вид* $S(\lambda)=\dfrac{\overline{e(\lambda)}}{e(\lambda)}$*, в котором*

$$e(\lambda)=e^{i\pi\lambda}\left[s_1(\lambda)-i\lambda s(\lambda)\right],\quad s(\lambda)=\pi\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k^0},\quad s_1(\lambda)=\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\upsilon_k-\lambda}{\upsilon_k^0}.$$

При этом функция $q(x)$ *восстанавливается однозначно по* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\upsilon_k\}$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору И.М. Гусейнову за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Маммадова Л.И. О представлении решения уравнения Штурма-Лиувилля с условиями разрыва внутри интервала / Тезисы докладов международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова. Баку: 2010, с. 226-227.
2. Mammadova L.I. Representation of the solution of Sturm-Liouville equation with discontinuity conditions interior to interval // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2010, v. XXXIII(XXXXI), p. 127-136.
3. Маммадова Л.И. О спектре оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва внутри интервала / Тезисы докладов международной конференции посвященной 100-летнему юбилею академика З.И. Халилова. Баку: 2011, с. 243-245.
4. Гусейнов И.М., Маммадова Л.И. Свойства собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва внутри интервала // Вестник БГУ, серия физ.-матем., 2011, № 3, с. 21-28.

5. Маммадова Л.И. Свойства собственных функций разрывного оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва // Докл. НАН Азербайджана, 2012, т. LXVIII, № 1, с. 16-23.
6. Маммадова Л.И. О единственности восстановления уравнения диффузии с сингулярным коэффициентом / Тезисы международной конференции "Актуальные проблемы математики и информатики", посв. 90-летию со дня рождения Г. Алиева. Баку: 2013, с. 176.
7. Huseynov H.M., Mammadova L.I. The inverse scattering problem for Sturm-Liouville operator with discontinuity conditions on the semi-axis // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2013, v. XXXIX(XLVII), p. 63-68.
8. Гусейнов И.М., Маммадова Л.И. Восстановление уравнения диффузии с сингулярным коэффициентом по двум спектрам // Докл. РАН, 2014, т. 457, № 1, с. 13-16.

LEYLA İBRAHİM qızı MƏMMƏDOVA

ƏMSALI ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYA OLAN KVADRATİK ŞTURM-LİUVİLL OPERATORLAR DƏSTƏSİ ÜÇÜN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏR

XÜLASƏ

Dissertasiya işi sinqulyar əmsallı diffuziya operatorunun spektral verilənlərinin əsas xassələrinin öyrənilməsinə və parçada həmin operatorun bərpası haqqında tərs məsələnin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

– interval daxilində kəsilmə şərtli Şturm-Liuvill tənliyinin həllinin inteqral göstərilişi tapılmışdır və bu göstərilişin nüvəsinin bəzi xassələri öyrənilmişdir;

– sinqulyar əmsallı diffuziya operatorunun məxsusi ədədlərinin əsas xassələri öyrənilmişdir;

– tamlıq və məxsusi funksiyalar üzrə ayrılış haqqında teorem isbat edilmişdir;

– yarımoxda kəsilmə şərtli Şturm-Liuvill operatoru üçün səpilmənin tərs məsələsinin tam həlli verilmişdir;

– interval daxilində kəsilmə şərtli Şturm-Liuvill operatorunun bərpası haqqında tərs məsələnin həlli üçün kafi şərtlər alınmışdır.

LEYLA IBRAHIM gizi MAMMADOVA

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR QUADRATIC PENCIL OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH GENERALIZED COEFFICIENT

SUMMARY

The dissertation work is devoted to main properties of spectral data and investigation of the inverse renewal problem on the segment of the diffusion operator with a singular coefficient.

The following results were obtained:

– integral representation of the solution of the Sturm-Liouville equation with discontinuity conditions interior to the interval was found, and some properties of the kernel of this representation were studied;

– main properties of eigenvalues of diffusion operator with a singular coefficient were studied;

– a theorem on completeness and expansion in eigen functions was proved;

– complete m solution of the inverse scattering problem of Sturm-Liouville operator with discontinuity conditions on the semi-axis was given;

– sufficient solvability conditions of the inverse renewal problem of the Sturm-Liouville operator with discontinuity conditions interior to the interval were obtained.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

LEYLA İBRAHİM QIZI MƏMMƏDOVA

ƏMSALI ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYA OLAN KVADRATİK ŞTURM-LİUVİLL OPERATORLAR DƏSTƏSİ ÜÇÜN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏR

1211.01 – Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi
dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2015