

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ  
BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**

*Əlyazması hüququnda*

**SƏLİMƏ MİRZƏ QIZI MİRZƏYEVA**

**İQTİSADİ-EKOLOJİ SİSTEMLƏRİN İKİNCİ TƏRTİB ADI  
DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ  
MODELLƏRİ**

**5302.01 – Ekonometriya**

**riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi  
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın**

**AVTOREFERATI**

**Bakı – 2015**

Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin “Fizika, riyaziyyat və informatika” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

**Elmi rəhbər:** Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,  
professor A.D.İsgəndərov

**Rəsmi opponentlər:** Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,  
professor H.F.Quliyev

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,  
dosent İ.Q.Məmmədov

**Aparıcı təşkilat:** Azərbaycan Respublikası İqtisadiyyat və  
Sənaye Nazirliyi İqtisadi İslahatlar Elmi-  
Tədqiqat İnstitutunun “İqtisadi modelləş-  
dirmə” şöbəsi

Dissertasiyanın müdafiəsi «23» iyun 2015-ci il saat 11<sup>00</sup>-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün B\FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23.  
Avtoreferat göndərilib «20» may 2015-ci il.

**B\FD 02.016 Dissertasiya  
Şurasının elmi katibi,  
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru,  
professor**

**N.Q.Əhmədov**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı.** Müasir dövrün qlobal problemləri təsnifatında ekoloji problemlər mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Ekoloji böhranlar adətən ətraf mühitlə cəmiyyətin dinamik tarazlığının pozulduğu yerdə baş verir. Ətraf mühitin mühafizəsi, təbii resurslardan səmərəli istifadə, energetika, demoqrafiya və s. problemlərin həlli dünya ölkələrinin birlikdə səyini tələb edir. Ekoloji problemlər cəmiyyətlə təbiət arasında ziddiyyətlərin kəskinləşməsi ilə əlaqədardır. Ona görə də qlobal iqtisadi problemlərin tədqiqinə sistemli yanaşmaqla, bu problemlərdə əsas istiqamətləri müəyyən etmək, həmin istiqamətlər arasında qarşılıqlı əlaqə və münasibətləri tam şəkildə aşkar edib, optimal qlobal ekoloji strategiyanın işlənilib hazırlanması indiki dövrün mühüm tələbləri sırasındadır.

İqtisadi və ekoloji sistemlərin hər biri ayrılıqda kifayət qədər mürəkkəb və çoxparametrlı sistemlərdir. Onların birlikdə fəaliyyət göstərdiyi iqtisadi – ekoloji sistemlər isə daha mürəkkəb və gözlənilməz xassələrə malikdirlər. Belə sistemlərin təhlili üçün riyazi modelləşdirmə və optimal idarəetmə üsullarının tətbiqi ilə aparılan təhlillər xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Mürəkkəb sistemlərə riyazi modelləşdirmə üsulunun tətbiqi təcrübəsi bir daha onu sübut edir ki, öyrənilən sistemlərin xarakterik xüsusiyyətlərini mümkün qədər tipik modeldə müəyyənləşdirib təhlil etməklə alınan nəticələr daha məzmunlu və əhəmiyyətli olur. Qeyri-xətti iqtisadi - ekoloji modellərin təhlilində optimal idarəetmənin riyazi metodlarının, daha dəqiq desək, L. S. Pontryagin və onun tələbələri tərəfindən zəruri optimallıq şərti kimi işlənmiş maksimum prinsipinin rolu az deyildir. Qeyd edək ki, Pontryagin maksimum prinsipi optimallıq üçün yalnız zəruri şərti verir və iqtisadi-ekoloji sistemlərin müvafiq optimal idarəetmə məsələsinin həlli olan ən az bir mümkün idarəetmənin varlığı haqqında suala cavab vermir. Bu baxımdan iqtisadi-ekoloji proseslərin optimal idarəetmə məsələsinin tədqiqi həm nəzəri, həm də praktiki cəhətdən aktuallıq kəsb edir.

**Problemin öyrənilmə səviyyəsi.** Məlumdur ki, çoxlu iqtisadi-ekoloji proseslər birinci və ikinci tərtib adi diferensial tənliklərlə və habelə xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə yazılır. Ona görə də hesab etmək olar ki, iqtisadi-ekoloji sistemlərin optimal idarəetmə nəzəriyyəsi həm toplanmış, həm də paylanmış parametrlı optimal

idarəetmə nəzəriyyəsinin tərkib hissəsidir. Bu nəzəriyyənin yaradılması və inkişafına ölkəmizin və xarici ölkələrin müəlliflərinin çox sayda işləri həsr edilmişdir. Bu işdə baxılan optimal idarəetmə məsələləri optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşu üçün səciyyəvi olan keyfiyyət meyarı, verilənlərin və məsələnin həllinin daxil olduğu funksional fəzalar baxımından əvvəlki işlərdən fərqlidir. Bu işdə keyfiyyət meyarı olaraq ilk dəfə Lions tərəfindən paylanmış parametrlı sistemlər üçün daxil edilən funksional şəkildə olan funksional götürülür. Paylanmış parametrlı sistemlərin əmsal idarəetməsində modelləşdirmə üsulu kimi bu cür keyfiyyət meyarı riyazi fizika tənliklərinin əmsallarının tapılması ilə əlaqədar olan tərs məsələlərinin variasiya qoyuluşunda ilk dəfə A.D.İsgəndərov tərəfindən daxil edilmiş və öyrənilmişdir. Bu şəkildə olan keyfiyyət meyarı ilə sonralar xüsusi törəməli tənliklər üçün müxtəlif identifikasiya məsələləri həll edilmişdir.

**İşin əsas məqsədi.** Dissertasiya işinin əsas məqsədi adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan iqtisadi- ekoloji sistemlərin optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi və iqtisadi-ekoloji modeldə ekonometrik təhlildir.

Bu məqsədlərlə bir-biri ilə bağlı olan aşağıdakı məsələlərin həlli qarşıya qoyulmuşdur:

- Ekoloji sistemlərin optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşu;
- Optimal idarəetmə məsələsinin varlığı və yeganəliyi;
- Variasiya bərabərsizliyi şəklində olan zəruri şərt;
- Pontryagin maksimum prinsipi şəklində olan zəruri şərt;
- Regionun iqtisadi-ekoloji modelində respublikanın regionları üçün iqtisadi artımla həyat səviyyəsi və sağlamlıq arasında əlaqənin statistik təhlili;
- Regionun iqtisadi-ekoloji modelində Respublikanın regionları üçün sosial-iqtisadi göstəriciləri arasında əlaqənin riyazi modeli.

**Tədqiqat işinin obyektı** iqtisadi- ekoloji sistemlərin optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi, sosial-iqtisadi inkişaf və ekoloji faktorun optimal qiymətləndirilməsi üçün aparılan tədqiqatlardır.

**Tədqiqat işinin metodoloji və nəzəri əsaslarını** İqtisadi-ekoloji proseslərin idarə olunmasına dair nəzəriyyələr, riyazi-iqtisadi təhlilin müasir üsulları və vasitələri, informasiya texnologiyalarının imkanları, respublikamızda və xaricdə bu sahədə aparılan nəzəri və praktiki işlər təşkil edir.

**Tədqiqat işinin informasiya bazası** olaraq AR Dövlət Statistika Komitəsinin, Ekologiya və Təbii Sərvətlər Nazirliyinin illik hesabatları, İqtisadi İnkişaf və Sənaye Nazirliyinin, Birləşmiş Millətlər Təşkilatının, İNTERNET şəbəkəsinin rəsmi səhifələrinin müvafiq informasiya materialları istifadə edilmişdir.

**Tədqiqat üsulları:** Tədqiqat işində adi diferensial tənliklərdən, optimal idarəetmə nəzəriyyəsinə, iqtisadi-riyazi modelləşdirmə və statistik üsullardan istifadə edilmişdir.

**Elmi yeniliklər.** Dissertasiya işinin əsas elmi yeniliklərini aşağıdakılar təşkil edir:

- Ekoloji sistemlərin optimal idarə edilməsi məsələsinin qoyuluşu tərtib edilmişdir;
- Optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsi öyrənilir;
- Keyfiyyət meyarı Lions funksionalı şəklində verildikdə ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərt öyrənilir;
- Optimal idarəetmə məsələsində Pontrayagenin maksimum prinsipi şəklində zəruri şərtlər isbat edilmişdir;
- Respublikanın regionları üçün iqtisadi-ekoloji göstəriciləri arasında əlaqənin riyazi modeli qurulmuşdur. Qurulan riyazi model ekonometrik təhlillərə əsasən aparılmışdır.

**İşin praktiki əhəmiyyəti** ondan ibarətdir ki, öyrənilən iqtisadi-riyazi modellər və təklif olunmuş nəzəri tövsiyələr, iqtisadi-ekoloji sistemin təhlilini aparmaq və onun əsasında ölkənin iqtisadi-ekoloji inkişafının elmi əsaslandırılmış proqramının hazırlanmasında istifadə oluna bilər. Dissertasiya işinin elmi nəticələrinin Azərbaycan Respublikasında aparılan ekoloji tədqiqatlarında və iqtisadi-ekoloji siyasətində, respublikada və beynəlxalq səviyyəli layihələrdə istifadə etmək olar.

**Tədqiqat işinin aprobasiyası və əməli reallaşdırılması.** Dissertasiya işinin nəticələri Akademik F.Q.Maqşudovun 80-illik yubileyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransında (Bakı, 2010), “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” elmi konfransında (Bakı, 2010-2013), “Müasir elmin aktual problemləri” Ümummilli lider H.Əliyevin anadan olmasının 87-ci ildönümünə həsr olunmuş respublika elmi konfransında (Lənkəran, 2010), Azərbaycan Memarlıq və İnşaat

Universitetinin 90 illiyi beynəlxalq elmi praktiki konfransında (Bakı, 2010), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 88-ci ildönümünə həsr olunmuş “Azərbaycanın inkişaf strategiyası və aktual elmi problemləri” respublika elmi konfransında (Lənkəran, 2011), “Dayanıqlı İnkişaf və idarəetmə modelləri” Nəzəriyyə və praktika beynəlxalq konfransında (Lənkəran, 2011) məruzə edilmişdir. Tədqiqat işinin nəticələri Lənkəran Dövlət Universitetinin “Fizika, riyaziyyat və informatika” və Bakı Dövlət Universitetinin “Optimallaşdırma və idarəetmə” kafedralarının seminarlarında müzakirə olunmuşdur.

**Çap olunmuş elmi əsərlər.** Dissertasiya işinin nəticələri üzrə on beş iş çap olunmuşdur.

**Dissertasiyanın həcmi və quruluşu** Dissertasiya işi girişdən, 3 fəsildən, nəticə, 13 şəkildən, 10 cədvəldən və 116 sayda istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarət olmaqla 130 səhifə həcmindədir.

## TƏDQIQATIN ƏSAS MƏZMUNU

**Girişdə** işin aktuallığı əsaslandırılır, və dissertasiyada görülən işlər haqqında qısa məlumat verilmişdir.

**Birinci fəsil** Lions funksionalı tipində keyfiyyət meyarı ikinci tərtib adi diferensial tənliklə təsvir olunmuş ekoloji sistemlərin optimal idarə edilməsi məsələsinin korrekt qoyuluşu məsələlərinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Bu fəsil üç paraqrafdan ibarətdir.

Bu fəslin birinci paraqrafında keyfiyyət meyarı Lions funksionalı olduqda ikinci tərtib adi diferensial tənliklə təsvir olunan ekoloji sistemlərin optimal idarə edilməsi məsələsinin qoyuluşu verilmişdir.

Tutaq ki, idarə edilən proses

$$\rho(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}v_1(x)\frac{du}{dx} - v_0(x)u = w(x), \quad a < x < b, \quad (1)$$

tənliyi ilə təsvir edilir. Burada  $a > 0, b > 0$  – verilmiş ədədlər,  $\rho(x)$  – maddənin sıxlığı,  $v_0(x)$  – maddənin ötürülmə əmsalı,  $v_1(x)$  – küləyin sürəti,  $w(x)$  – ekoloji aktiv mənbələrin sıxlığıdır. Məlumdur ki, bu tənlik adətən stasionar ekoloji proseslərin öyrənilməsində qarşıya çıxır, qaz və ya mayenin hərəkətini təsvir edir.

Aydındır ki,  $v_0(x), v_1(x), w(x)$  kəmiyyətlərinin dəyişməsi ilə (1) tənliyi ilə təsvir olunan obyektə təsir etmək olar, başqa sözlə, bu

obyekti idarə etmək olar. Yəni idarəetmə kimi  $v = v(x) = (v_0(x), v_1(x), w(x))$ -vektor funksiyasını seçmək olar. Mümkün idarəetmələr çoxluğu aşağıdakı şəkildə təyin edilir:

$$V \equiv \{v = v(x) = (v_0(x), v_1(x), w(x)) \in (L_2(a, b))^3 : \\ b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, 0 \leq v_1(x) \leq b_1, \forall x \in (a, b), \|w\|_{L_2(a, b)} \leq b_2 \}$$

Burada  $\tilde{b}_0 > 0, b_m \geq 0, m = \overline{0, 2}$  – verilmiş ədədlərdir. Hər bir  $v \in V$  üçün

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (2)$$

sərhəd şərti daxilində (1) tənliyinin həllini  $u_1 = u_1(x)$  ilə,

$$\frac{du(a)}{dx} = \frac{du(b)}{dx} = 0. \quad (3)$$

sərhəd şərti daxilində həllini isə  $u_2 = u_2(x)$  ilə işarə edək.

Aydındır ki,  $u_1 = u_1(x)$  (1) şəkildə ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün birinci sərhəd məsələsinin,  $u_2 = u_2(x)$  isə ikinci sərhəd məsələsinin həllidir.

Bu qeydləri nəzərə almaqla (1)-(3) şərtləri daxilində  $V$  çoxluğunda

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|_{L_2(a, b)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (4)$$

funksionalının minimumunun tapılması haqqında optimal idarəetmə məsələsini ifadə edə bilərik. Burada  $\alpha \geq 0$  verilmiş ədəd,  $H = (L_2(a, b))^3$ ,  $\omega \in H$  – verilmiş element,  $\rho = \rho(x)$ -verilmiş ölçülən və

$$\rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1, \quad \forall x \in (a, b), \rho_0, \rho_1 = const > 0. \quad (5)$$

şərtini ödəyən məhdud funksiyadır.

Hər bir  $v \in V$  üçün (1)-(3) şərtlərindən  $u_k = u_k \equiv u_k(x; v), k = 1, 2$  funksiyalarının təyini məsələsini iki sərhəd məsələsindən ibarət olan reduksiya olunmuş məsələ adlandıracağıq.

**Tərif 1.** Hər bir  $v \in V$  üçün reduksiya olunmuş məsələnin həlli dedikdə uyğun olaraq  $W_2^0(a, b), W_2^2(a, b)$  fəzalarından olan, sanki bütün  $x \in (a, b)$  üçün (1) tənliyini və (2), (3) sərhəd şərtlərini ödəyən  $u_1 = u_1(x) \equiv u_1(x; v), u_2 = u_2(x) \equiv u_2(x; v)$  funksiyaları başa düşülür.

**Teorem 1.** Tutaq ki (5) şərti ödənilir. Onda hər bir  $v \in V$  üçün (1)-(3) reduksiya olunmuş məsələsinin yeganə  $u_1 \in W_2^0(a, b), u_2 \in W_2^2(a, b)$  həlli var və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|u_1\|_{W_2^0(a, b)} \leq c_1 \|w\|_{L_2(a, b)}, \quad (6)$$

$$\|u_2\|_{W_2^2(a, b)} \leq c_2 \|w\|_{L_2(a, b)}. \quad (7)$$

Burada  $c_1 > 0, c_2 > 0$  ədədləri  $v$ -dən asılı olmayan sabitlərdir.

Birinci fəslin ikinci paragrafında (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı öyrənilir. Burada aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

**Teorem 2.** Tutaq ki (5) şərti ödənilir və  $\alpha \geq 0$  – verilmiş ədəddir. Onda istənilən  $\omega \in H$  – üçün (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinin ən az bir həlli vardır.

Birinci fəslin üçüncü paragrafında  $\alpha > 0$  olduqda (1) optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsi öyrənilir. Bunun üçün əvvəlcə aşağıdakı hökm isbat edilmişdir.

**Teorem 3.** Tutaq ki, (5) şərti ödənilir. Onda  $H = (L_2(a, b))^3$  fəzasının elə  $G$  sıx alt çoxluğu vardır ki, istənilən  $\omega \in G$  və  $\alpha > 0$  üçün (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinin yeganə həlli vardır.

**Teorem 4.** Tutaq ki, (5) şərti ödənilir. Onda yalnız (1)-(4) məsələsinin verilənlərindən asılı olan elə  $\alpha_0 > 0$  ədədi mövcuddur ki, (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinin istənilən  $\omega \in H$  və  $\alpha > \alpha_0 > 0$  üçün yeganə həlli var.

**İkinci fəsil** Lions funksionalı tipində keyfiyyət meyarı ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində

optimallıq üçün zəruri şərtərin alınmasına həsr edilmişdir. Bu fəsil iki paraqraftan ibarətdir.

İkinci fəslin birinci paraqrafında keyfiyyət meyarı Lions funksionalı şəklində verildikdə ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərt alınır. Bu paraqrafta

$$\tilde{V} \equiv \{v = v(x) = (v_0(x), \tilde{v}_1(x), w(x)) \in H = (L_2(a, b))^3 :$$

$$b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, \quad 0 \leq \tilde{v}_1(x) \leq b_1, \quad \forall x \in (a, b), \tilde{v}_1 = \tilde{v}_1(b) = 0, \quad \|w\|_{L_2(a, b)} \leq b_2 \}$$

çoxluğunda

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|^2 + \alpha \|v - w\|_H^2 \quad (8)$$

funksionalının

$$\rho \frac{d^2 u_k}{dx^2} + \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \frac{du_k}{dx} - v_0(x) u_k = w(x), \quad a < x < b, k = 1, 2, \quad (9)$$

$$u_1(a) = u_1(b) = 0, \quad \frac{du_2(a)}{dx} = \frac{du_2(b)}{dx} = 0 \quad (10)$$

şərtləri daxilində minimumunun tapılması haqqında optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Burada  $a, b, b_0, \tilde{b}_0, b_1, b_2, \rho > 0, \alpha \geq 0$  verilmiş ədədlər,  $\omega = \omega(x) = (\omega_0(x), \omega_1(x), \omega_2(x)) \in H$  verilmiş elementdir.

Hər bir  $v \in \tilde{V}$  üçün (9), (10) şərtlərindən  $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x; v), k = 1, 2$  funksiyalarının təyini məsələsini reduksiya olunmuş məsələ adlandırılır. Onun həlli dedikdə sanki bütün  $x \in (a, b)$  üçün (9) tənliyini və (10) şərtlərini ödəyən

$$u_1 \in W_2^0(a, b), u_2 \in W_2^2(a, b) \text{ funksiyalarını başa düşülür}$$

Aydındır ki, (9), (10) reduksiya olunmuş məsələsi birinci fəsildə baxdığımız (1)-(3) reduksiya olunmuş məsələnin xüsusi halıdır. (1) tənliyinin  $\rho = \rho(x)$  əmsalı baxdığımız bu halda  $\rho = const > 0$  sabit əmsaldır. Bundan başqa, (9) tənliyinin  $\tilde{v}_1(x)$  əmsalını

$$\tilde{v}_1(x) = \begin{cases} v_1(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x = a, b. \end{cases} \quad (11)$$

şəklində təyin edirik. Qeyd edək ki, (9) tənliyində birinci tərtib törəmənin əmsalında olan  $\tilde{v}_1(x)$  idarəetməsinin bu şəkildə seçilməsi (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsində zəruri şərtlərlə bağlı nəticələrin əldə edilməsində texniki çətinliklərlə əlaqədardır.

(1) tənliyində  $\rho(x)$  əmsalının sabit qəbul edilməsi izahatı asanlaşdırmaq üçün verilmişdir. Bu əmsalı ölçülə bilən məhdud ümumiləşmiş törəmələri olan funksiyalar sinfindən də seçmək olar.  $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1(x)$  idarəetməsi (11) şəklində seçildiyindən  $\tilde{V}$  çoxluğu  $V$ -nin alt çoxluğu olacaqdır və bu çoxluq  $B \equiv (L_\infty(a, b))^2 \times L_2(a, b)$  fəzasında qapalı məhdud və qabarıq çoxluqdur. (9), (10) reduksiya olunmuş məsələsinin hər bir  $v \in \tilde{V}$  üçün həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında deyə bilərik ki, burada da Teorem 1 öz gücündə qalır.

(8)-(10) optimal idarəetmə məsələsi birinci fəsildə baxdığımız (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinin xüsusi halı olduğundan, (1)-(4) məsələsinin varlığı və yeganəliyi haqqında alınmış nəticələr (8)-(10) məsələsi üçün də doğru olacaqdır. Bununla əlaqədar olaraq bu paraqrafta (8)-(10) məsələsi üçün yalnız zəruri şərtləri öyrənilir.

Tutaq ki,  $\psi_k = \psi_k(x), k = 1, 2$  funksiyaları aşağıdakı qoşma məsələnin həllidir:

$$\rho \frac{d^2 \psi_k}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \psi_k \right) - v_0(x) \psi_k = 2(-1)^k (u_1(x) - u_2(x)), \quad (12)$$

$$k = 1, 2, x \in (a, b),$$

$$\psi_1(a) = \psi_2(b) = 0, \quad \frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_2(b)}{dx} = 0, \quad (13)$$

burada  $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x; v), k = 1, 2$  funksiyaları (9), (10) reduksiya olunmuş məsələnin həllidir.

**Tərif 2.** (12), (13) qoşma məsələsinin həlli dedikdə istənilən

$$\eta_1 \in W_2^0(a, b), \eta_2 \in W_2^1(a, b) \text{ funksiyaları üçün}$$

$$\int_a^b \left( -\rho \frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\eta_k}{dx} + \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \psi_k \frac{d\eta_k}{dx} - v_0(x) \psi_k \eta_k \right) dx =$$

$$= 2(-1)^k \int_a^b (u_1(x) - u_2(x)) \eta_k(x) dx, \quad k = 1, 2 \quad (14)$$

inteqral eyniliyi ödəyən və  $W_2^1(a, b)$  -dən olan  $\psi_1 = \psi_1(x), W_2^1(a, b)$  -dən olan  $\psi_2 = \psi_2(x)$  funksiyalarını başa düşəcəyik.

Tərif 2 mənasında həllin varlığı və yeganəliyini isbat etmək üçün Qalyorkin metodundan istifadə olunur. Bu məqsədlə əvvəlcə  $W_2^1(a, b)$  fəzasında  $v \in \tilde{V}$  üçün (12), (13) qoşma məsələsi üçün aşağıdakı təkliflər isbat edilir.

**Teorem 5.**  $a > 0, \rho = const > 0$  və

$$b_0 - \frac{b_1^2}{2a^2\rho} > 0. \quad (15)$$

şərti ödənildikdə, hər bir  $v \in \tilde{V}$  üçün (12), (13) qoşma məsələsinin həlli

$$\|\psi_1\|_{W_2^1(a, b)} \leq c_3 \|u_1 - u_2\|_{L_2(a, b)}, \quad (16)$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^1(a, b)} \leq c_4 \|u_1 - u_2\|_{L_2(a, b)}, \quad (17)$$

qiymətləndirmələrini ödəyir, burada  $c_3 > 0, c_4 > 0$  – müəyyən sabitlərdir.

**Teorem 6.** Teorem 5-in şərtləri ödənildikdə, (12), (13) qoşma məsələsinin  $\psi_1 \in W_2^1(a, b), \psi_2 \in W_2^1(a, b)$  yeganə həlli vardır.

(8)-(10) optimal idarəetmə məsələsi üçün aşağıdakı şəkildə Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək:

$$H(x, u_1(x), u_2(x), v(x), \psi_1(x), \psi_2(x)) = - \left( \frac{1}{x} \frac{du_1(x)}{dx} \psi_1(x) + \frac{1}{x} \frac{du_2(x)}{dx} \psi_2(x) \right) \tilde{v}_1(x) +$$

$$+ (u_1(x) \psi_1(x) + u_2(x) \psi_2(x)) v_0(x) + (\psi_1(x) + \psi_2(x)) w(x) - \alpha (v_0(x) - \omega_0(x))^2 -$$

$$- \alpha (\tilde{v}_1(x) - \omega_1(x))^2 - \alpha (w(x) - \omega_2(x))^2, \quad (18)$$

burada  $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x; v), k = 1, 2$  – (9), (10) reduksiya olunmuş məsələnin həlli,  $\psi_k = \psi_k(x) \equiv \psi_k(x; v), k = 1, 2$  funksiyaları isə  $v \in \tilde{V}$  üçün (12) (13) qoşma məsələnin həllidir.

**Teorem 7.** Teorem 6-nın şərtləri ödənildikdə  $\tilde{V}$  çoxluğunda  $J_\alpha(v)$  funksionalı Freşe mənada diferensiallandıdır və onun qradienti üçün aşağıdakı ifadə doğrudur :

$$J'_\alpha(v) = - \frac{\partial H}{\partial v} = - \left( \frac{\partial H}{\partial v_0}, \frac{\partial H}{\partial \tilde{v}_1}, \frac{\partial H}{\partial w} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_0} = u_1(x) \psi_1(x) + u_2(x) \psi_2(x) - 2\alpha (v_0(x) - \omega_0(x)), \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{v}_1} = - \frac{1}{x} \frac{du_1(x)}{dx} \psi_1(x) - \frac{1}{x} \frac{du_2(x)}{dx} \psi_2(x) - 2\alpha (\tilde{v}_1(x) - \omega_1(x)), \quad (21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \psi_1(x) + \psi_2(x) - 2\alpha (w(x) - \omega_2(x)). \quad (22)$$

Bu teoremdən istifadə etməklə variasiya bərabərsizliyi şəklində aşağıdakı zəruri şərt isbat edilmişdir.

**Teorem 8.** Əgər teorem 7-nin şərtləri ödənilirsə,  $\tilde{V}_* \equiv \left\{ v^* \in \tilde{V} : J_\alpha(v^*) = J_{\alpha^*} = \inf_{v \in \tilde{V}} J_\alpha(v) \right\}$  çoxluğu (8)-(10) optimal

idarəetmə məsələsinin həllər çoxluğudursa, onda istənilən  $v^* \in \tilde{V}_*$  üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\int_a^b \left[ \frac{1}{x} \left( \frac{du_1^*(x)}{dx} \psi_1^*(x) + \frac{du_2^*(x)}{dx} \psi_2^*(x) \right) + 2\alpha(\tilde{v}_1^*(x) - \omega_1(x)) \right] (\tilde{v}_1(x) - \tilde{v}_1^*(x)) dx +$$

$$+ \int_a^b \left[ - (u_1^*(x) \psi_1^*(x) + u_2^*(x) \psi_2^*(x)) + 2\alpha(v_0^*(x) - \omega_0(x)) \right] (v_0(x) - v_0^*(x)) dx +$$

$$+ \int_a^b \left[ - (\psi_1^*(x) + \psi_2^*(x)) + 2\alpha(w^*(x) - \omega_2(x)) \right] (w(x) - w^*(x)) dx \geq 0, \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

burada,  $u_k^* = u_k^*(x) \equiv u_k(x; v^*)$ ,  $\psi_k^* = \psi_k^*(x) \equiv \psi_k(x; v^*)$ ,  $k = 1, 2$ , uyğun olaraq (9), (10) reduksiya olunmuş məsələnin və (12), (13) qoşma məsələsinin  $v^* \in \tilde{V}^*$  idarəetməsinə uyğun həlləridir.

İkinci fəslin ikinci paragrafında (8)-(10) optimal idarəetmə məsələsində Pontryaginın maksimum prinsipi şəklində zəruri şərtin alınması məsələsinə baxılmışdır. Məlumdur ki, Pontryaginın maksimum prinsipi həm toplanmış, həm də paylanmış parametrlə sistemlərin optimal idarəetmə məsələlərinin həlli üçün səmərəli öyrənmə metodudur. V.İ. Plotnikovun metodundan istifadə edərək aşağıdakı hökm isbat edilmişdir.

**Teorem 9.** Əgər teorem 5-in şərtləri ödənilirsə,  $\tilde{V}$  çoxluğu

$$\tilde{V} \equiv \{ v = v(x) = (v_0(x), \tilde{v}_1(x), w(x)), v_0 \in L_2(a, b), \tilde{v}_1 \in L_2(a, b), w \in L_2(a, b),$$

$$b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, 0 \leq \tilde{v}_1(x) \leq b_1, |w(x)| \leq b_2, \forall x \in (a, b), \tilde{v}_1(a) = \tilde{v}_1(b) = 0 \}$$

şəkildə təyin edilirsə, onda  $v^* \in \tilde{V}$  idarəetməsinin (8)-(10), (24) məsələsinin həlli olması üçün zəruri şərt

$$H(x, u_1^*(x), u_2^*(x), v^*(x), \psi_1^*(x), \psi_2^*(x)) =$$

$$= \max_{v \in D} H(x, u_1^*(x), u_2^*, v, \psi_1^*(x), \psi_2^*(x)), \forall x \in (a, b)$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

$D = [b_0, \tilde{b}_0] \times [0, b_1] \times [-b_2, b_2]$ ,  $u_k^* = u_k^*(x) \equiv u_k(x; v^*)$ ,  $\psi_k^* = \psi_k^*(x) \equiv \psi_k(x; v^*)$ ,  $k = 1, 2$ , uyğun olaraq reduksiya olunmuş və qoşma məsələlərin  $v = v^*$  olduqda həlləridir.

**Üçüncü fəsil**də regionların iqtisadi-ekoloji modelində dayanıqlı inkişaf prinsipləri əsas götürülərək əhalinin həyat səviyyəsi və sağlamlığını xarakterizə edən sosial-iqtisadi göstəricilərin statistik təhlili aparılmışdır. Bəzi regionların sosial-iqtisadi göstəricilərinin yəni, əhalinin orta əmək haqqı, sənaye məhsulu, xidmətlər, investisiya və demografik göstəricilər arasında əlaqənin ekonometrik təhlili verilmişdir. Riyazi statistik üsullardan istifadə edilərək Azərbaycan Respublikasının iqtisadi bölgələri üçün əhalinin həyat səviyyəsinin əsas amillərdən asılılığı alınmış modellərlə təhlil edilir. Aparılan tədqiqat 2000-2010-cu illəri əhatə edir. Sosial-iqtisadi inkişafa təsir edən əsas göstəricilər arasında əlaqənin qrafiklərlə təhlili göstərilmişdir. Qurulan modellər bölgələr üzrə müqayisəli təhlil olunmuşdur. Üçüncü fəsil iki paragrafdan ibarətdir.

Üçüncü fəslin birinci paragrafında regionun iqtisadi-ekoloji modelində Respublikanın regionları üçün iqtisadi artımla həyat səviyyəsi və sağlamlığı xarakterizə edən sosial iqtisadi göstəricilər arasında əlaqənin statistik təhlili verilmiş, cədvəllər və qrafiklər qurulmuş, müqayisəli təhlil aparılmışdır.

Üçüncü fəslin ikinci paragrafında regionun iqtisadi-ekoloji modelində Respublikanın regionları üçün sosial-iqtisadi göstəricilər arasında əlaqənin riyazi modeli aşağıdakı kimidir:

Əmək haqqı ( $y$ ) ilə sənaye məhsulunun həcmi ( $x$ ) arasında əlaqənin reqresiya tənliyi Lənkəran iqtisadi rayonu üçün

$$y = 18 \cdot 10^{-12} x + 103,$$

Naxçıvan Muxtar Respublikası üçün

$$y = 0,229 \cdot 10^{-12} x + 124,6,$$

Abşeron üçün

$$y = 0,4 \cdot 10^{-12} x + 118,9,$$

Gəncə- Qazax üçün

$$y = 7 \cdot 10^{-13} x + 101,9,$$

Quba –Xaçmaz üçün

$$y = 5,8 \cdot 10^{-12} x + 114.$$

Əmək haqqı ( $y$ ) ilə kapitalla investisiya ( $x$ ) arasında əlaqənin reqresiya tənliyi Lənkəran iqtisadi rayonu üçün

$$y = 0,78 \cdot 10^{-12} x + 103,$$

Naxçıvan Muxtar Respublikası üçün

$$y = 0,6 \cdot 10^{-12} x + 124,6$$

Abşeron üçün

$$y = 3,9 \cdot 10^{-12} x + 118,9,$$

Gəncə- Qazax üçün

$$y = 0,12 \cdot 10^{-12} x + 101,9,$$

Quba –Xaçmaz üçün

$$y = 4,4 \cdot 10^{-14} x + 114.$$

Əmək haqqı ( $y$ ) ilə pərakəndə əmtəə dövriyyəsi ( $x$ ) arasında əlaqənin reqresiya tənliyi Lənkəran iqtisadi rayonu üçün

$$y = 0,08 \cdot 10^{-12} x + 103,$$

Naxçıvan Muxtar Respublikası üçün

$$y = 0,34 \cdot 10^{-12} x + 124,6,$$

Abşeron üçün

$$y = 0,19 \cdot 10^{-12} x + 118,9,$$

Gəncə- Qazax üçün

$$y = 3 \cdot 10^{-14} x + 101,9,$$

Quba –Xaçmaz üçün

$$y = 1,2 \cdot 10^{-14} x + 114.$$

Qurulan riyazi model ekonometrik təhlillərə əsasən aparılmışdır. Ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə edərək reqresiya tənlikləri alınmışdır.

Tədqiqat zamanı məlum olmuşdur ki, əhalinin həyat səviyyəsinə təsir edən sosial-iqtisadi göstəricilərin sürətlə artdığı bölgələrdə orta aylıq əmək haqqı digər bölgələrə nisbətən daha çox artmışdır. Məsələn Abşeron iqtisadi rayonunda və Naxçıvan Muxtar Respublikasında digər bölgələrə nisbətən 2-3 dəfə artım müşahidə edilir. Sonda belə nəticəyə gəlmək olar ki, Azərbaycan Respublikasının regionlarının mövcud potensialından daha səmərəli istifadə etməklə yerlərdə sənaye sahələrinin və kənd təsərrüfatının inkişafını sürətləndirmək, bu işdə sahibkarlara dəstək olmaq, əhalinin yaşayış səviyyəsini yaxşılaşdırmaqla yoxsulluq probleminin həllinə nail olmaq və ölkəni iqtisadi cəhətdən hərtərəfli inkişaf etdirmək bu gün də dövlətin qarşısında duran əsas vəzifələrdəndir.

## İŞİN ƏSAS NƏTİCƏLƏRİ

1. Keyfiyyət meyarı Lions funksionalı olduqda ikinci tərtib adi diferensial tənliklə təsvir olunan ekoloji sistemlərin optimal idarə edilməsi məsələsinin qoyuluşu verilir.
2. Optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsi öyrənilir.
3. Keyfiyyət kriterisi Lions funksionalı şəklində verildikdə ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərt öyrənilir.
4. Optimal idarəetmə məsələsində Pontrayagin maksimum prinsipi şəklində zəruri şərtlər isbat edilir.
5. Respublikanın regionları üçün iqtisadi-ekoloji göstəriciləri arasında əlaqənin riyazi modeli qurulur.
6. Qurulan riyazi model ekonometrik təhlillərə əsasən aparılmışdır.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı elmi işlərdə öz əksini tapmışdır:

1. Н.Д. Джафаров, Р.Г.Мамедханов, А.А.Мехтиев, С.М.Мирзоева. Автоматизация анализа экологического загрязнения Лянкаранского региона Каспийского моря // Azərbaycan Texniki Universiteti Elmi əsərlər XII cild , N3, 2003, səh. 58-60.

2. S.M.Mirzəyeva. Sosial-iqtisadi və ekoloji göstəricilərin riyazi-statistik müqayisəli təhlili // Lənkəran Dövlət Universitetinin Xəbərləri, Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 2009, səh. 83-93

3. K.M.Cəfərov, Y.P.Dursunov, S.M.Mirzəyeva. İqtisadiyyat məsələlərində tətbiq olunan bəzi təsadüfi proseslərin tədqiqi // H.Əliyev adına Azərbaycan Ali Hərbi Dənizçilik məktəbi, Elmi əsərlər, XIX buraxılış, Bakı 2010, səh. 114-116.

4. A.Sadiqova, S.M.Mirzəyeva. Ekoloji dəyişikliklərin riyazi-iqtisadi modeli / Bakı Dövlət Universiteti “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” elmi konfrans materialları. Bakı 2010, səh. 76-78.

5. S.M.Mirzəyeva. Ekoloji xərclərin ümumi daxili məhsula təsirinin qiymətləndirilməsi / “Müasir elmin aktual problemləri”



Ümummilli lider H.Əliyevin anadan olmasının 87-ci ildönümünə həsr olunmuş elmi konfrans materialları , Lənkəran 2010, səh.239-243.

6. Sadiqova A.T., Mirzəyeva S.M. Azərbaycan iqtisadiyyatı timsalında iqtisadi artım modellərinin müqayisəli təhlili // Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, Sosial-siyasi elmləri seriyası, N4, 2010, səh. 111-121.

7. S.Mirzəyeva, A.Sadiqova. Regionların sosial-iqtisadi göstəricilərinin təhlili // Naxçıvan Dövlət Universitetinin elmi əsərləri, İctimai elmlər seriyası. N2, Naxçıvan 2010, səh. 271-275.

8. S.M.Mirzəyeva. Ekoloji dəyişikliklərin modelləşdirilməsi / Memarlıq və İnşaat Universitetinin 90 illiyi , Beynəlxalq elmi praktiki konfrans materialları. Bakı 2010, səh. 141-142.

9. Искендеров А.Д., Гамидова А.Р., Мирзаева С.М., Садыгова А.Т. Исследования влияния параметров экологических изменений состояние окружающей среды / Ümumilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 88-ci ildönümünə həsr olunmuş “Azərbaycanın inkişaf strategiyası və aktual elmi problemləri” elmi konfrans materialları, I hissə , Lənkəran 2011, səh. 20-23.

10. S.M.Mirzəyeva. Regionun iqtisadi-ekoloji modelində respublikanın regionları üçün iqtisadi artımla həyat səviyyəsi arasında əlaqənin statistik təhlili / Azərbaycan Təhsil Nazirliyi və Lənkəran Dövlət Universiteti. Dayanıqlı İnkişaf və idarəetmə modelləri: Nəzəriyyə və praktika Beynəlxalq konfrans materialları, Lənkəran 2011, səh. 36-38.

11. S.M.Mirzəyeva. Paylanmış parametrlı riyazi-ekoloji model / Bakı Dövlət Universiteti “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” elmi konfrans materialları, Bakı 2011, səh. 85-86.

12. S.M.Mirzəyeva. Existence and uniqueness of the solution of a problem on optimal control of ecological systems described by ordinary differential equations // Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası. Xəbərlər Riyaziyyat seriyası ,XXXII buraxılış, N4, Bakı 2012, səh. 109-116.

13. С.М.Мирзоева. Существование и единственность, решения задачи оптимального управления экологическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями / “ Müasir elmin aktual problemləri ” Ümummilli lider H.Əliyevin anadan olmasının 89-cu ildönümünə həsr olunmuş Respublika Elmi Konfrans.

Lənkəran, 2012, səh. 23-25

14. С.М.Мирзоева. Необходимое условие в задаче оптимального управления экологическими системами // Ученые записки Орловского государственного университета. Научный журнал ,№3(53), математические науки, Орел 2013, стр.39-45.

15. Мирзаева С.М. Принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления экологическими системами // Lənkəran Dövlət Universitetinin Xəbərləri Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası . Lənkəran, 2013, səh. 91-103

Həmmüəliflərlə olan [1,3-4,6-7,9] işlərdə həmmüəliflərə məsələnin qoyuluşu, nəticələrin müzakirəsində iştirak etmək aiddir, iddiaçıya qoyulmuş məsələnin həlli və nəticələrin müzakirəsində iştirak etmək məxsusdur.

Elmi rəhbərim əməkdar elm xadimi, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor A.D.İsgəndərova məsələnin qoyuluşu və işə daimi diqqətinə görə çox təşəkkür edirəm.

**САЛИМА МИРЗАЕВА МИРЗА ГЫЗЫ**

**МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИКО-ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

**РЕЗЮМЕ**

Экологические проблемы имеют большое значение в классификации глобальных проблем современного периода. Каждая из экономических и экологических систем в отдельности является достаточно сложной и многопараметрической системой. Основной целью данной диссертации является исследование задач оптимального управления экономико-экологических систем, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, и эконометрический анализ в экономико-экологической модели. Практическая значимость работы состоит из того, что изучаемые экономико-математические модели и предложенные теоретические рекомендации могут быть использованы в анализировании экономико-экологической системы и на основе него в подготовке научно-обоснованной программы экономико-экологического развития страны. Научные результаты диссертационного исследования могут быть использованы в экологических исследованиях и экономико-экологической политике, проводимой в Азербайджанской Республике, в самой республике и проектах международного уровня.

В диссертационной работе были использованы обыкновенные дифференциальные уравнения из теории оптимального управления, экономико-математическое моделирование и статистические методы.

Диссертационная работа состоит из введения, 3х глав, заключения, 13 картин, 10 таблиц и с используемого списка литературы количеством в 116 и обладает объемом в 130 страниц.

**SALIMA MIRZAEVA MIRZA**

**MODEL OF OPTIMAL MANAGEMENT OF THE ECONOMY-ECOLOGICAL SYSTEMS WITH ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER**

**SUMMARY**

Environmental issues are of great importance in the classification of the global problems of the modern period. Each of the economic and ecological systems alone is a quite complicated and multi-parameter system. And the economic and ecological systems in which they operate together, have more complex and unpredictable properties. Analyses conducted by the application of mathematical modeling and optimal control are of particular importance for the analysis of such systems.

The practical significance of the work consists of the fact that the studied economics and mathematical models and the proposed theoretical recommendations can be used in analyzing the economic-ecological system, and based on it in the preparation of evidence-based program of economic and environmental development of the country. The scientific results of the dissertation research can be used in environmental studies and economic and environmental policies pursued by the Republic of Azerbaijan, in the republic and international projects.

In this thesis were used ordinary differential equations of the theory of optimal control, economic-mathematical modeling and statistical methods.

The thesis consists of an introduction, 3 chapters, conclusion, 13 pictures, 10 tables and a list of references used, in the amount of 116 and has a volume of 130 pages.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

*На правах рукописи*

**САЛИМА МИРЗАЕВА МИРЗА ГЫЗЫ**

**МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИКО-  
ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОБЫКНОВЕННЫМИ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО  
ПОРЯДКА**

**5302.01 – Эконометрия**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

**диссертации на соискание учёной степени  
доктора философии по математическим наукам**

**Баку - 2015**