AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

NATƏVAN POLAD QIZI NƏSİBOVA

DƏYİŞƏN DƏRƏCƏLİ LEBEQ FƏZALARINDA KOMPLEKS ƏMSALLI EKSPONENT SİSTEMİNDƏN İBARƏT BAZİSLƏR

1202.01-Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2016

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

НАТАВАН ПОЛАД кызы НАСИБОВА

БАЗИСЫ ИЗ ЭКСПОНЕНТ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2016

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Qeyri-harmonik analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. **Bilal T. Bilalov**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Vəli M. Qurbanov**

(Azərbaycan Pedaqoji Universiteti);

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, **Əli A. Hüseynli**

(Xəzər Universiteti).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti

«Ümumi və tətbiqi riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 14 oktyabr 2016-ci il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9.

Avtoreferat göndərilib 02 sentyabr 2016-ci il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **dosent Rövşən Bəndəliyev**

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:

Член корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф. **Билал Т. Билалов**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Вали М. Курбанов**

(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет);

Доктор философии по математике, **Али А. Гусейнли**

(Университет Хазар)

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности кафедра «Общая и прикладная математика».

Защита диссертации состоится 14 октября 2016 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде., 9.

Автореферат разослан 02 сентября 2016 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Ровшан Бандалиев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из методов часто применяемых при решении задач математической физики, механики и уравнений в частных производных является метод разделения переменных (метод Фурье). Как обычно, решение задачи сводится к изучению спектральной задачи относительно дифференциального оператора, порождённого пространственными переменными. Обоснование метода Фурье требует изучение базисных свойств (полнота, минимальность, базисность и др.) корневых элементов (если оператор дискретный) соответствующих дифференциальных операторов в различных функциональных пространствах.

При изучении базисных свойств систем в банаховых пространствах методы теории возмущений операторов и уравнений широко используются. Видимо, впервые использование подобных идей принадлежит Н.Винер, Р.Пэли. Они установили базисность Рисса в L_2 возмущенной системы экспонент $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in Z}$, где последовательность $\{\lambda_n\}\subset R$ удовлетворяет условию $\sup_n|\lambda_n - n| < \frac{\ln 2}{\pi^2}$, и так возникла знаменитая проблема о точности константы Пэли-Винера, которая решена 1964 г. М.И. Кадецем . В современной литературе этот результат известен как теорема “$\frac{1}{4}$-Кадеца”. В дальнейшем при дополнительных условиях в работах различных авторов подобная идея была обобщена относительно базисности близких в том или ином смысле систем. Вообще говоря, большинство этих теорем относятся к малым возмущениям систем. Поэтому, если возмущение не порождает требуемую близость, то эти результаты не применимы. Для определенного класса систем одним из способов установления базиса является метод краевых задач теории аналитических функций. Эта идея берет свое начало с одной заметки А.В.Бицадзе. В последующем этим методом успешно пользовались С.М.Пономарев, Е.И.Моисеев, Г.Г.Девдариани, Б.Т.Билалов и др. Ярким примером тому являются возмущенные системы экспонент.

В последнее время (начиная с конца прошлого века) в связи с приложениями в конкретных задачах механики и математической физики интерес к рассмотрению различных задач в лебеговых $L_{p(\cdot)}$ и соболевых $W_{p(\cdot)}^{k}$ пространствах функций с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$ сильно возрос. Чтобы продемонстрировать возникновение подобных задач, рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \ , u /_{\partial\omega} = f \ , \tag{1}$$

в единичном круге ω на комплексной плоскости. Если $f \in L_{p(\cdot)}(\partial\omega)$, то для разрешимости задачи (1) следует определить соответствующее соболево пространство функций $W_{p(\cdot)}^{k}$.

Желание решить подобные задачи методом Фурье требует изучение базисных свойств соответствующих корневых элементов в выше сформулированных пространствах. Учитывая возникновение систем

$$\begin{gathered} \{\sin(n+\alpha)t\}_{n\in N} \ , \\ 1\bigcup\{\cos(n+\alpha)t\}_{n\in N} \ , \quad \{\cos(n+\alpha)t\}_{n\in Z_+} \ . \end{gathered} \tag{2}$$

в разных задачах математической физики, мы намерены изучить базисные свойства этих систем в обобщенных весовых пространствах $L_{p(\cdot),\rho}$. Они тесно связаны с соответствующими свойствами систем

$$\left\{e^{i(n+\alpha\, signn)t}\right\}_{n\in Z} , \tag{3}$$

$$1\bigcup\left\{e^{i(n+\alpha\, signn)t}\right\}_{n\neq 0} , \tag{4}$$

в $L_{p(\cdot),\rho}$. Следует отметить, что ранее вопросы базисности тригонометрических систем с линейной фазой в пространствах $L_{p(\cdot)}$ рассмотрены в работах И.И. Шарапудинова (когда фаза отсутствует) и Б.Т.Билалова, З.Г.Гусейнова (с кусочно-линейными фазами).

Изучение базисных свойств в $L_{p(\cdot),\rho}$ систем (2)-(4) требует определения соответствующих классов аналитических функций и исследовать нетеровость краевых задач Римана теории аналитических функций в этих классах. А для этого, в свою очередь, нужно выяснить ограниченность действия сингулярных операторов с ядром Коши в весовых классах $L_{p(\cdot),\rho}$. Эти вопросы изучены в работах разных авторов. Этот аппарат позволяет полностью изучить нужную нам задачу Римана в классах Харди с переменным показателем суммируемости. В классических постановках эти задачи достаточно хорошо изучены и освещены в монографиях М.И. Мусхелишвили и Ф.Д.Гахова. В L_p теория таких задач достаточно хорошо разработана в монографии И.И. Данилюка.

Настоящая работа в целом посвящена изучению фреймовых свойств (полнота, минимальность, базисность, атомарная разложимость) систем вида (3) в весовых пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. При этом сперва определяются соответствующие весовые обобщенные классы Харди и изучаются задачи Римана теории аналитических функций в этих классах. Поэтому считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет определенный научный интерес.

В направлении об изучении аппроксимативных свойств тригонометрических систем нельзя не отметить работы авторов В.А. Диткина, К.Шайдукова, А.Г.Тумаркина, R.P.Feinerman, D.J.Newman, C.J.Tranter, S.Martin, B.Noble, J.K.Whiteman. К этому кругу исследований можно отнести работы Ю.А.Казьмина, А.Н.Барменкова и др.

Следует отметить, что ранние исследования базисных свойств систем вида (2)-(4) принадлежат Н.Левинсону и Винер Н., Пэли Р.. В работе Н.Левинсона найдены некоторые условия полноты (минимальности) и неполноты (неминимальности) в пространстве L_p. Эти результаты приведены в монографии Б.Я.Левина. Там же рассмотрен весьма интересный вопрос о замене конечного числа показателей, $\{\lambda_n\}$ в системе $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in Z}$ так, чтобы свойство полноты сохранилось.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение фреймовых свойств (полнота, минимальность, базисность, атомарная разложимость) систем вида (3) в весовых пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. При этом сперва определяются соответствующие весовые обобщенные классы Харди и изучаются задачи Римана теории аналитических функций в этих классах.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

-введены весовые классы гармонических в единичном круге функций $h_{p(\cdot),\rho}$ и при определенных условиях на степенную весовую функцию доказана представимость этих функций с помощью интеграла Пуассона;

- рассматриваются весовые классы аналитических в (вне) единичном круге ω функций $H^{+}_{p(\cdot),\rho}$ $({}_mH^{-}_{p(\cdot),\rho})$ и изучаются некоторые свойства функций из $H^{+}_{p(\cdot),\rho}$;

-находится общее решение однородной задачи Римана в весовых классах Харди со степенным весом, когда вес удовлетворяет определенным условиям;

-рассматривается неоднородная задача Римана в весовых классах Харди со степенным весом, находятся достаточные условия разрешимости в этих классах;

- рассматривается система экспонент с линейным возмущением и изучается вопрос об атомарной разложимости весового обобщенного пространства $L_{p(\cdot),\rho}$ по этой системе;

- рассматривается система экспонент с кусочно-линейной фазой, изучается ее базисность в весовом пространстве $L_{p(\cdot),\rho}$ со степенном весом $\rho(\cdot)$, который может иметь вырождение на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

Методика исследования. При получении основных результатов применяются методы теории базисов и фреймов, методы функционального анализа, методы теории краевах задач и теории функций комплексного переменного.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе носят теоретический характер. Их можно использовать при обосновании метода Фурье для решения соответствующих уравнений в частных производных, в теории аппроксимации, в теории базисов и фреймов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела “Негармонический анализ” ИММ НАНА (рук. член. кор. проф. Б.Т.Билалов), на семинарах отдела “Теория функций” ИММ НАНА (рук. д.м.н. В.А.Исмаилов), на международной конференции «Актуальные проблемы Математики и информатики» в Баку (2013) посвященной 90 летнему юбилею Гейдара Алиева, в Баку (2013) на Международном Бакинском Форуме Молодых ученых посвященной 90 летнему юбилею Гейдара Алиева, в Баку (2014) на международной конференции «Актуальные проблемы Математики и Механики» посвященной 55-летнему юбилею Института Математики и Механики, в Батуми (2015) на VI международной конференции Грузинского Математического Сообщества, в Баку (2015) на 7-ой международной конференции «Математический Анализ, Дифференциальные уравнения и их приложения»

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 96 наименований. Объем диссертации 114 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы.

Первая глава носит подготовительный характер. В ней даны основные обозначения, необходимые факты и определяются пространства (подпространства) функций с переменным показателем суммируемости. Доказывается базисность классической системы экспонент (её части) в обобщенных весовых пространствах (подпространствах) Лебега с переменным показателем суммируемости. Им посвящены параграфы 1.1 и 1.2.

В 1.1 приведены стандартные обозначения, основные понятия теорий базисов и фреймов, а также некоторые сведения из теории интегралов типа Коши.

В 1.2 определяется лебегово пространство функций с переменным показателем суммируемости. Для облегчения изложения проведем его определение и некоторые свойства.

Пусть $p:[-\pi,\pi]\to[1,+\infty)$ – некоторая измеримая по Лебегу функция. Класс всех измеримых на $[-\pi,\pi]$ (относительно лебеговой меры) функций обозначим через $\mathcal{L}_0$. Примем обозначение

$$I_p(f)\overset{def}{\equiv}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p(t)}dt.$$

Пусть $\mathcal{L}\equiv\{f\in\mathcal{L}_0 : I_p(f)<+\infty\}$. Относительно обычных линейных операций сложение функций и умножение на число, при $p^+=\sup\underset{[-\pi,\pi]}{vrai}\,p(t)<+\infty$, $\mathcal{L}$ превращается в линейное пространство. Относительно нормы

$$\|f\|_{p(\cdot)}\overset{def}{\equiv}\inf\left\{\lambda>0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\},$$

$\mathcal{L}$ является банаховым и его обозначим через $L_{p(\cdot)}$. Положим

$$WL\overset{def}{\equiv}\Big\{p : p(-\pi)=p(\pi);\exists C>0,\quad \forall t_1,t_2\in[-\pi,\pi]:|t_1-t_2|\le\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|p(t_1)-p(t_2)|\le\frac{C}{-\ln|t_1-t_2|}\Big\}.$$

Везде $q(\cdot)$ обозначает сопряженную к $p(\cdot)$ функцию: $\frac{1}{p(t)}+\frac{1}{q(t)}\equiv 1$.

Примем $p^-=\inf\underset{[-\pi,\pi]}{vrai}\,p(t)$.

Обозначим через S сингулярный интеграл

$$Sf=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in\Gamma,$$

где $\Gamma\subset C$ некоторая кусочно-гельдерева кривая на C. Определим весовой класс

$$L_{p(\cdot),\rho(\cdot)} : L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}\overset{def}{\equiv}\{f :\ \rho f\in L_{p(\cdot)}\},$$

с нормой $\|f\|_{p(\cdot),\rho(\cdot)}\overset{def}{\equiv}\|\rho f\|_{p(\cdot)}$.

В 1.3 определяются пространства Харди аналитических функций с переменным показателем суммируемости. Так же вводятся весовые обобщенные классы Харди и доказывается что они являются банаховыми.

Итак, пусть $\rho:[-\pi,\pi]\to(0,+\infty)$ некоторая весовая функция. Положим

$$H^{+}_{p(\cdot),\rho}\equiv\left\{f\in H^{+}_{1}:f^{+}\in L_{p(\cdot),\rho}\right\},$$

$$_{m}H^{-}_{p(\cdot),\rho}\equiv\left\{f\in H^{-}_{1}:f^{-}\in L_{p(\cdot),\rho}\right\}.$$

В качестве норм в этих пространствах принимаем

$$\|f\|_{H^{+}_{p(\cdot),\rho}}\equiv\left\|f^{+}\rho\right\|_{L_{p(\cdot)}},\ \forall f\in H^{+}_{p(\cdot),\rho},$$

$$\|f\|_{_{m}H^{-}_{p(\cdot),\rho}}\equiv\left\|f^{-}\rho\right\|_{L_{p(\cdot)}},\ \forall f\in{}_{m}H^{-}_{p(\cdot),\rho},$$

где через $f^{\pm}$ обозначен некасательные граничные значения f на $\partial\omega$.

Совершенно аналогично классическому случаю доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $p\in WL, p^{-}>1,$ *и выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{p(t_k)}<\alpha_k<\frac{1}{q(t_k)},k=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Если $f\in H^{+}_{p(\cdot),\rho}$, *то*

$$\left\|f(re^{it})-f^{+}(e^{it})\right\|_{p(\cdot),\rho}\to 0,\ r\to 1-0,$$

$$\left\|f\left(re^{it}\right)\right\|_{p(\cdot),\rho}\to\left\|f^{+}\left(e^{it}\right)\right\|_{p(\cdot),\rho},\ r\to 1-0,$$

где f^{+} *– некасательные граничные значения* f *на* $\partial\omega$.

Пусть вес $\rho(\cdot)$ определен выражением

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{l}\left|t-t_k\right|^{\alpha_k},\ \ t_i\neq t_j \text{ при } i\neq j. \tag{6}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть имеют место* $1<p^{-}\leq p^{+}<+\infty$, $p(\cdot)\in WL$. *Если весь* $\rho(\cdot)$, *определенная формулой (6), удовлетворяет неравенствам* $-\dfrac{1}{p(t_k)}<\alpha_k<\dfrac{1}{q(t_k)}$, $k=\overline{1,l}$; *то система экспонент*

$e_n(t) \equiv e^{\text{int}}$, $n \in Z$, *образует базис в весовом пространстве* $L_{p(\cdot),\rho}$.

Сужения функций из $H^{+}_{p(\cdot)}$ на единичную окружность обозначим через $L^{+}_{p(\cdot)}$, т.е.

$$L^{+}_{p(\cdot)} \equiv \left\{ f : \exists g \in H^{+}_{p(\cdot)},\ f \equiv g/_{\partial\omega} \right\}.$$

Отметим, что если $f \in H^{+}_{p(\cdot)}$, то $\|f\|_{H^{+}_{p(\cdot)}} = \left\|f^{+}\right\|_{p(\cdot)}$, где $f^{+} = f/_{\partial\omega}$.

Определим весовой класс $h_{p(\cdot),\rho}$, гармонических внутри единичного круга ω функций, с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$, где весовая функция $\rho(\cdot)$ задана выражением

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} \left|t - \tau_k\right|^{\alpha_k},$$

где $\{\tau_k\}_1^m \subset [-\pi, \pi]$, $\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$.

Примем

$$h_{p(\cdot),\rho} \equiv \left\{ u : \Delta u = 0 \text{ в } \omega \text{ и } \|u\|_{p(\cdot),\rho} = \sup_{0<r<1} \left\|u\left(re^{it}\right)\right\|_{p(\cdot),\rho} < +\infty \right\}.$$

Справедлива следующая основная

Теорема 3. *Пусть* $p \in WL, p^{-} > 1$, *и выполнены неравенства (6). Тогда если* $u \in h_{p(\cdot),\rho}$, *то* $\exists f \in L_{p(\cdot),\rho}$:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt, \tag{7}$$

где $P_r(\alpha) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\alpha}$ *– ядро Пуассона. Наоборот, если* $f \in L_{p(\cdot),\rho}$, *то функция* u, *определенная выражением (7), принадлежит классу* $h_{p(\cdot),\rho}$.

Совершенно очевидно, что $f(\cdot)$ принадлежит пространству $H^{+}_{p(\cdot),\rho}$ только тогда, когда $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ принадлежат пространству $h_{p(\cdot),\rho}$. Поэтому многие свойства функций из $h_{p(\cdot),\rho}$ переносятся на функции из $H^{+}_{p(\cdot),\rho}$. Учитывая связь между ядрами Пуассона $P_r(\alpha)$ и

Коши $K_z(t) = \dfrac{e^{it}}{e^{it} - z}$, из Теоремы 3 легко получить справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $p \in WL, p^- > 1$, *и выполнены неравенства (5). Тогда если* $F \in H^+_{p(\cdot),\rho}$, *то* $F^+ \in L_{p(\cdot),\rho}$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F^+(t)dt}{1 - ze^{-it}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_z(t) F^+(t) dt \,. \tag{8}$$

Наоборот, если $F^+ \in L_{p(\cdot),\rho}$, *то функция* F, *определенная выражением (8), принадлежит классу* $H^+_{p(\cdot),\rho}$, *где* $F^+(\cdot)$ *некасательные граничные значения* F *на* $\partial\omega$.

Аналогом Теоремы 1 для внешности ω *является* следующая

Теорема 5. *Пусть* $p \in WL, p^- > 1$, *и имеют место неравенства (5). Если* $f \in_m H^-_{p(\cdot),\rho}$, *то*

$$\left\| f(re^{it}) - f^-(e^{it}) \right\|_{p(\cdot),\rho} \to 0,\ r \to 1+0,$$

$$\left\| f\left(re^{it}\right) \right\|_{p(\cdot),\rho} \to \left\| f^-\left(e^{it}\right) \right\|_{p(\cdot),\rho},\ r \to 1+0,$$

где f^- *– некасательные граничные значения* f *на* $\partial\omega$ *извне* ω.

Рассмотрим систему экспонент $E \equiv \left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ и примем

$$E^{(k)}_{\pm} \equiv \left\{e^{\pm \mathrm{int}}\right\}_{n \ge k}.$$

Сужения классов $H^+_{p(\cdot),\rho}$, ${}_mH^-_{p(\cdot),\rho}$ на $\partial\omega$ обозначим, соответственно, через $L^+_{p(\cdot),\rho}$ и ${}_mL^-_{p(\cdot),\rho}$, т.е.

$$L^+_{p(\cdot),\rho} = H^+_{p(\cdot),\rho} \big/_{\partial\omega};\ {}_mL^-_{p(\cdot),\rho} = {}_mH^-_{p(\cdot),\rho} \big/_{\partial\omega}.$$

Справедлива

Теорема 6. *Пусть* $p \in WL, p^- > 1$, *и выполнены неравенства (5). Тогда система* $E^{(0)}_+$ *(*$E^{(m)}_-$*) образует базис в* $L^+_{p(\cdot),\rho}$ *(*${}_mL^-_{p(\cdot),\rho}$*),* $1 < p < +\infty$.

Справедлив аналог классической теоремы Смирнова и в весовых обобщенных классах Харди.

Теорема 7. *Пусть* $p \in WL, p^- > 1$, *и выполнены неравенства (5). Если* $u \in H_1^+$ *и* $u^+ \in L_{p(\cdot),\rho}$ *, то* $u \in H_{p(\cdot),\rho}^+$.

В **главе II** рассматриваются краевые задачи Римана теории аналитических функций в обобщенных весовых классах Харди со степенным весом. Находятся общие решения так однородной, так и неоднородной задачи при определенных условиях на коэффициент задачи и на весовую функцию. Полученные результаты применяются к вопросу базисности возмущенной системы экспонент в весовом пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости.

Рассмотрим следующую однородную задачу Римана в весовых обобщенных классах Харди $H_{p(\cdot),\rho}^+ \times_m H_{p(\cdot),\rho}^-$:

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = 0, \tau \in \partial\omega \ . \qquad (9)$$

Под решением задачи (9) понимается пара аналитических функций $(F^+(z); F^-(z)) \in H_{p(\cdot),\rho}^+ \times_m H_{p(\cdot),\rho}^-$, граничные значения которых п.в. удовлетворяют (9).

Будем предполагать, что коэффициент $G(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям.

i) $G^{\pm 1} \in L_\infty(\partial\omega)$;

ii) $\theta(t) \equiv \arg G(e^{it})$ – *кусочно-гельдерева на* $[-\pi, \pi]$ *функция.*

Пусть $\{s_k\}_1^r : -\pi < s_1 < \ldots s_r < \pi$ – точки разрыва функции $\theta(t)$ и $\{h_k\}_1^r : h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0)$, $k = \overline{1, r}$, соответствующие скачки этой функции в этих точках. Обозначим $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$; $h_0^{(0)} = \theta_0(\pi) - \theta_0(-\pi)$.

Положим $\{t_k\}_{k=0}^l \equiv \{\tau_k\}_{k=1}^m \cup \{s_k\}_{k=0}^r$, и определим величины β_k , $k = \overline{0, l}$; следующим выражением

$$\beta_k = -\sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{\{t_k\}}(\tau_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^r h_i \chi_{\{t_k\}}(s_i), \ k = \overline{0, l}. \qquad (10)$$

Относительно общего решения однородной задачи Римана (9) справедлива

Теорема 8*. Пусть величины* $\{\beta_k\}_1^r$ *, определены из выражений (10) и выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{q(t_k)} < \beta_k < \frac{1}{p(t_k)},\ k = \overline{0,r}\,. \tag{11}$$

Если имеют место $-\dfrac{1}{p(\tau_k)} < \alpha_k < \dfrac{1}{q(\tau_k)}$, $k = \overline{1,m}$, *то общее решение однородной задачи Римана (9) в классах* $H^{+}_{p(\cdot),\rho} \times_m H^{-}_{p(\cdot),\rho}$ *представимо в виде* $F(z) = P_{m_0}(z)Z(z)$, *где* $Z(\cdot)-$ *каноническое решение однородной задачи,* $P_{m_0}(\cdot)-$ *полином степени* $m_0 \le m$.

Рассмотрим следующую неоднородную краевую задачу Римана

$$F^{+}(\tau) - G(\tau)F^{-}(\tau) = f(\tau), \tau \in \partial\omega, \tag{12}$$

в классах $H^{+}_{p(\cdot),\rho} \times_{m_0} H^{-}_{p(\cdot),\rho}$, где $f \in L_{p(\cdot),\rho} -$ некоторая заданная функция, а вес $\rho(\cdot)$, как прежде, определен выражением

$$\rho(t) = \prod_{i=1}^{m} \left|t - \tau_i\right|^{\alpha_i},\ t \in [-\pi, \pi]\ ,$$

где $-\pi < \tau_1 < \ldots < \tau_m < \pi -$ некоторые точки.

Рассмотрим сингулярный оператор S_ρ:

$$(S_\rho g)(\tau) = \frac{\rho(t)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t)}{\rho(t)\left(e^{it} - \tau\right)} dt, \tau \in \partial\omega\,.$$

Известно следующее

Утверждение 9. *Пусть* $(p \in WL) \wedge (p^{-} > 1)$. *Тогда сингулярный оператор* S_ρ *ограниченно действует в* $L_{p(\cdot)}$ *только тогда, когда выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{p(\tau_k)} < \alpha_k < \frac{1}{q(\tau_k)},\ k = \overline{1,m}.$$

Используя это утверждение при получении основного результата существенно используется следующее

Утверждение 10. *Пусть относительно величин* $\{\beta_k\}_0^l$ *выполнены неравенства* $-\frac{1}{q(t_k)} < \beta_k < \frac{1}{p(t_k)}, \; k=\overline{0,l}$, *и имеют место соотношения* $\alpha_k < \frac{1}{q(\tau_k)}, \; k=\overline{1,m}$ *. Тогда интеграл типа Коши*

$$F_1(z) = \frac{Z(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_z(t)\left[Z^+\left(e^{it}\right)\right]^{-1} f(t)dt,$$

является частным решением краевой задачи Римана (12) в классах $H^+_{p(\cdot),\rho} \times_{-1} H^-_{p(\cdot),\rho}$, *где* $f \in L_{p(\cdot),\rho}$ *– произвольная функция.*

Используя это утверждение доказывается следующая основная

Теорема 11. *Пусть* $p(\cdot) \in WL, p^- > 1$, *и весовая функция* $\rho(\cdot)$ *определена выражением*

$$\rho(t) = \prod_{i=1}^{m} |t - \tau_i|^{\alpha_i},$$

где $-\pi < \tau_1 < \ldots < \tau_m < \pi$ *– некоторые точки. Коэффициент* $G\left(e^{it}\right) = \left|G\left(e^{it}\right)\right| e^{i\theta(t)}$, *удовлетворяет условиям i), ii) и* $h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0), \; k=\overline{1,r}$ *– скачки функции* $\theta(t)$ *в точках разрыва*

$$\{s_k\}_1^r \subset (-\pi, \pi); h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi).$$

Положим $\{t_k\}_{k=0}^l = \{\tau_k\}_{k=1}^m \cup \{s_k\}_{k=0}^r$, *и определим*

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{r} h_i \chi_{\{t_k\}}(s_i) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{\{t_k\}}(\tau_i), \; k=\overline{0,l}.$$

Пусть выполнены неравенства

$$-\frac{1}{q(t_k)} < \beta_k < \frac{1}{p(t_k)}, \; k=\overline{0,l}; \quad \alpha_k < \frac{1}{q(\tau_k)}, \; k=\overline{1,m} \; .$$

Тогда имеют место:

α) *при* $m_0 \geq -1$ *неоднородная задача Римана (12) имеет общее решение вида*

$$F(z) = Z(z)P_{m_0}(z) + F_1(z),$$

где $Z(\cdot)-$ *каноническое решение однородной задачи* $F_0^+(\tau)-G(\tau)F_0^-(\tau)=0, \quad \tau\in\partial\omega$, $P_{m_0}(z)-$ *произвольный полином степени* $k\le m_0$ $(P_{-1}(z)\equiv 0)$, *а* $F_1(\cdot)$ *частное решение вида*

$$F_1(z)=\frac{Z(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{Z^+(e^{it})}K_z(t)dt\,, \tag{13}$$

$K_z(\cdot)-$ *ядро Коши,* $f\in L_{p(\cdot),\rho}$ $-$ *произвольная функция;*

β) *при* $m_0<-1$ *неоднородная задача (12) разрешима в классах* $H^+_{p(\cdot),\rho}\times_{m_0}H^-_{p(\cdot),\rho}$ *тогда и только тогда, когда имеют место условия ортогональности* $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{Z^+(e^{it})}e^{ikt}dt,\ k=\overline{0,-m_0-2}$,

и $F(z)=F_1(z)$ *является решением этой задачи.*

Из этой теоремы непосредственно следует следующее

Следствие 12. *Пусть выполнены все условия Теоремы 11. Тогда неоднородная задача имеет единственное решение вида (13) в классах* $H^+_{p(\cdot),\rho}\times_{-1}H^-_{p(\cdot),\rho}$.

В **2.3** рассматривается следующая система экспонент с линейной фазой

$$\mathrm{E}\equiv\{\mathrm{E}_n(t)\}_{n\in Z}\equiv\left\{e^{i(n+\alpha sign n)t}\right\}_{n\in Z}\,, \tag{14}$$

где $\alpha\in C-$комплексный параметр.

Доказывается следующая

Теорема 13. *Пусть* $p\in WL$, $p^->1$, *и выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{q(\tau_k)}<\alpha_k<\frac{1}{p(\tau_k)},\quad k=\overline{1,m}\,; \tag{15}$$

$$\frac{1}{q(\pi)}<\alpha_m+2\operatorname{Re}\alpha<\frac{1}{p(\pi)}\,. \tag{16}$$

Тогда система экспонент (14) образует базис в весовом обобщенном пространстве Лебега $L_{p(\cdot),\rho}$.

Относительно фреймовых свойств системы (14) в пространстве $L_{p(\cdot),\rho}$ справедлива

Теорема 14. *Пусть* $p \in WL$, $p^- > 1$, *и выполнены неравенства (15), (16); множество* P_π *определяется соотношением*

$$P_\pi \equiv \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p(\pi)} - \alpha_m + k \right) : \forall k \in Z \right\}.$$

Пусть $\alpha \notin P_\pi$. *Тогда относительно пространства коэффициентов* $\mathscr{K}(E)$ *системы (14) имеют место соотношения*

$$\mathscr{K}(E) = C^{k_0} \dot{+} \mathscr{K}_\rho, \text{ при } k_0 \geq 0;$$

$$\mathscr{K}_\rho = C^{k_0} \dot{+} \mathscr{K}(E), \quad \text{при } k_0 < 0,$$

где $k_0 \in Z$ *определяется из* $-\dfrac{1}{q(\pi)} < \alpha_m + 2\operatorname{Re}\alpha + k_0 < \dfrac{1}{p(\pi)}$. *При* $k_0 > 0$ *система* E *образует базис в* $\hat{L}_{p(\cdot),\rho}$, *где пространство* $\hat{L}_{p(\cdot),\rho}$ *определяется прямой суммой* $\hat{L}_{p(\cdot),\rho} = L^{(k_0)} \dot{+} L_{p(\cdot),\rho} = C^{k_0} \dot{+} L_{p(\cdot),\rho}$. *При* $k_0 < 0$ *она является фреймовой последовательностью относительно* $\mathscr{K}(E)$.

В **2.4** изучаются базисные свойства следующей системы экспонент

$$\{e_n(t)\}_{n\in Z},$$

где $e_n(t) = \exp i(nt + \gamma(t) sign\, n)$, $\gamma(t) = \alpha t + \beta\, sign\, t$.

Устанавливается следующая

Лемма 15. *Пусть* $p \in WL$ *и* $p^- > 1$. *Если выполнены неравенства*

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{p(0)} < \{\alpha_0;\, \alpha_0 + \gamma_2\} < \dfrac{1}{q(0)};\ -\dfrac{1}{p(\pi)} < \alpha_1; \\ -\dfrac{1}{p(\pi)} < \{\alpha_m;\, \alpha_1 + \gamma_1\} < \dfrac{1}{q(\pi)};\ \alpha_m + \gamma_1 < \dfrac{1}{q(\pi)}; \\ -\dfrac{1}{p(\tau_i)} < \alpha_i < \dfrac{1}{q(\tau_i)},\ i = \overline{2, m-1}, \end{cases}$$

то система $\{e_n\}_{n\in Z}$ *минимальна в* $L_{p(\cdot),\rho}$.

Используя эти леммы доказывается следующая основная

Теорема 16. *Пусть* $p \in WL, p^{-} > 1$ *и выполнены следующие неравенства*

$$-\frac{1}{p(\tau_i)} < \alpha_i < \frac{1}{q(\tau_i)}, \ i = \overline{0,m};$$

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 + \gamma_2 < \frac{1}{q(0)}; \ -\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_1 + \gamma_1 < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_m + \gamma_1 < \frac{1}{q(\pi)}; \ \gamma_1 = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{\pi}\right); \ \gamma_2 = -\frac{2\beta}{\pi}.$$

Тогда система $\{e_n\}_{n\in Z}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot),\rho}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи этой теоремы.

Следствие 17. *Пусть имеют место* $p \in WL, p^{-} > 1$ и $\alpha_k = 0, k = \overline{2, m-1}; \beta = 0$. *Если имеют место неравенства*

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 < \frac{1}{q(0)}; \ -\frac{1}{p(\pi)} < \{\alpha_1; \alpha_m\} < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_1 + 2\alpha < \frac{1}{q(\pi)}; \ -\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_m + 2\alpha < \frac{1}{q(\pi)},$$

то система экспонент $\left\{e^{i(n+\alpha\, sign\, n)t}\right\}_{n\in Z}$, *образует базис в* $L_{p(\cdot),\rho}$.

Рассмотрим более сложный случай.

Следствие 18. *Пусть имеют место* $p \in WL, p^{-} > 1$ *и* $\alpha_k = 0, k = \overline{2, m-1}; \alpha = 0$. *Если имеют место неравенства*

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 < \frac{1}{q(0)}; \ -\frac{1}{p(\pi)} < \{\alpha_1; \alpha_m\} < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 - \frac{2\beta}{\pi} < \frac{1}{q(0)}; \ -\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_1 + \frac{2\beta}{\pi} < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_m + \frac{2\beta}{\pi} < \frac{1}{q(\pi)},$$

то система экспонент $\left\{e^{i(nt+\beta\, sign t\, sign n)}\right\}_{n\in Z}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot),\rho}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю чл. корр. НАН Азерб., проф. Б.Т.Билалову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Ismayılov N.A., Nasibova N.P. Bases Of Exponents In Weighted Hardy Classes. International J. of Math. Sci. & Engg. Appls. (IJMSEA) ISSN 0973-9424, Vol. 7 No. III (May, 2013), pp. 101-109
2. Nasibova N.P. Bases Of Exponents In Weighted Hardy Classes. On Actual Problems of Mathematics and Informatics, Abstracts of International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, May 29-31, 2013, Baku, Azerbaijan, p.85.
3. Nasibova N.P. Weighted Hardy classes with a variable summability exponent . Abstracts collection on new challenges in the European area: International Baku Forum of young scientists dedicated to the 90-th anniversary of national leader Heydar Aliyev, 20-25 May, Baku, Azerbaijan , p. 28
4. Nasibova N.P., Ahmedov T.V. Riemann Boundary Value Problem For $H^{\pm}_{p(\cdot),\rho}$ Classes. On Actual Problem of Mathematics and Mechanics, International conference devoted to the 55-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, May 15-16, 2014, Baku, Azerbaijan, pp.73-74
5. Najafov T.I., Nasibova N.P. Riemann boundary value problems in weighted generalized Hardy classes. Naxçıvan Dövlət Universiteti, Elmi Əsərlər, Fizika-Riyaziyyat və Texniki Elm Seriyası, №7(63), 2014, səh. 3-12.
6. Nasibova N.P. Exponential Atomic Decomposition in Generalized Weighted Lebesgue Spaces. Journal of Mathematics Research; Vol. 6, No. 4; 2014, pp. 137-148.
7. Najafov T.I., Nasibova N.P. On the Noetherness of the Riemann problem in a generalized weighted Hardy classes . Azerbaijan Journal of Mathematics, vol. VOL 5, NO 2 (2015): JULY, PP.109-139.
8. Nasibova N.P. The General Solution of the Homogeneous Problem. VI Annual International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, July 12 – 16, pp. 137-138, 2015.
9. Nasibova N.P., Mammadli A. On the Noetherness of the Riemann problem in a generalized weighted Hardy classes. 7-th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", MADEA -7, September 08-13, 2015, Baku, Azerbaijan.

10. Nasibova N.P. On bases from perturbed exponent systems in variable Lebesgue space. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, V. 3, No 1, 2015, pp. 95-101.
11. Najafov T.I., Nasibova N.P., Mamedova Z.V. Bases of exponents with a piecewise linear phase in generalized weighted Lebesgue space. Journal of Inequalities and Applications, 2016:92, 2016, 12 pages.

NATƏVAN POLAD qızı NƏSİBOVA

DƏYİŞƏN DƏRƏCƏLİ LEBEQ FƏZALARINDA KOMPLEKS ƏMSALLI EKSPONENT SİSTEMİNDƏN İBARƏT BAZİSLƏR

XÜLASƏ

Dissetrasiya işində bütünlükdə ümumiləşmiş çəkili Hardi siniflərində Riman sərhəd məsələsinə baxılmış, $[-\pi;\pi]$ parçasının uclarında çəki funksiyası cırlaşmaya malik olduğu halda bu məsələlərin nöterliyi öyrənilmişdir. Alınan nəticələr ümumiləşmiş çəkili Lebeq fəzalarında bəzi eksponent sistemlərinin baziliyinin öyrənilməsinə tətbiq olunmuşdur.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- vahid dairənin daxilində harmonik funksiyaların çəkili $h_{p(\cdot),\rho}$ Hardi sinifləri daxil edilmiş və çəkili qüvvət funksiyasının üzərinə müəyyən şərtlər qoyularaq Puasson inteqralının köməkliyi ilə bu funksiyaların xassələri öyrənilmişdir;

-ω-vahid dairəsinin daxilində (xaricində) analitik olan funksiyaların çəkili $H^{+}_{p(\cdot),\rho}$ ($_{m}H^{-}_{p(\cdot),\rho}$) Hardi siniflərinə baxılır və bu siniflərdən olan funksiyaların bəzi xassələri öyrənilir;

-çəki funksiyası müəyyən şərtləri ödədikdə çəkili Hardi siniflərində bircins Riman məsələsinin ümumi həlli tapılır;

-üstlü çəkiyə malik çəkili Hardi siniflərində qeyri-bircins Riman məsələsinə baxılmış, bu siniflərdə həll olunma üçün kafi şərt tapılmışdır;

-xətti fazaya malik eksponent sisteminə baxılmış və ümumiləşmiş çəkili $L_{p(\cdot),\rho}$ fəzasının bu sistem üzrə atomar ayrılışı haqda məsələ öyrənilmişdir;

-hissə-hissə xətti fazaya malik eksponent sistemə baxılır, $\rho(\cdot)$ çəki funksiyasına malik çəkili $L_{p(\cdot),\rho}$ fəzasında $[-\pi;\pi]$ parçasının uclarında cırlaşma olduğu halda bu sistemin bazisliyi isbat olunmuşdur.

NATAVAN POLAD kızı NASIBOVA

BASES OF EXPONENTS WITH COMPLEX COEFFICIENTS IN THE VARIABLE LEBESGUE SPACES

SUMMARY

This thesis, generally considers the Riemann boundary value problem in generalized weighted Hardy classes with the power weight. Noetherness of these problems are studied in the case when the weight function may have degeneration at the endpoints of the segment $[-\pi;\pi]$. The obtained results are applied to the study of basicity of some perturbed systems of exponents in generalized weighted Lebesgue spaces.

The following results are obtained:

-the weighted classes $h_{p(\cdot),\rho}$ of harmonic functions in the unit circle are introduced, and the representability of these functions by means of the Poisson integral is proved under certain conditions on the weight function of the form of power function ;

- the weighted classes $H^{+}_{p(\cdot),\rho}$ $({}_{m}H^{-}_{p(\cdot),\rho})$ of analytic functions in (out) the unit circle ω are considered and some properties of the functions from these classes are studied;

-non-homogeneous Riemann problem in weighted Hardy classes with the power weight is considered, the sufficient condition for the solvability is obtained in these classes;

- system of exponents with a linear perturbation is considered and the problem on atomic decomposition of the generalized weighted space $L_{p(\cdot),\rho}$ on this system is studied;

- system of exponents with a piecewise-linear phase is considered, its basicity is studied in weighted space $L_{p(\cdot),\rho}$ with the power weight $\rho(\cdot)$, which may have degeneration at the endpoints of the segment $[-\pi;\pi]$.