AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

RAMİN MÜBARİZ OĞLU ZEYNALOV

ELLİPTİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İXTİYARİ OBLASTLARDA QEYRİ-LOKAL VƏ QLOBAL HƏDLƏR TUTAN SƏRHƏD ŞƏRTİ DAXİLİNDƏ MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLƏRİNİN ARAŞDIRILMASI

1211.01-Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI-2016

Dissertasiya işi Azərbaycan MEA-nın İdarəetmə Sistemləri İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:	Riyaziyyat elmləri doktoru, professor **N.Ə.Əliyev**
Rəsmi opponentlər:	Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **İ.M.Nəbiyev** (Bakı Dövlət Universiteti)
	Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **T.S.Hacıyev** (AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu)
Aparıcı təşkilat:	Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti “Riyazi analiz” kafedrası

Dissertasiyanın müdafiəsi «29» mart 2016-cı il saat 14^{00}-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23.

Avtoreferat göndərilib «23» fevral 2016-cı il.

FD.02.016 Dissertasiya
Şurasının elmi katibi **r.e.d., prof.N.Q.Əhmədov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Son zamanlar bir çox proseslərin riyazi modelləri qeyri klassik şərtlərlə verilmiş diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Bu isə belə məsələlərin korrekt qoyuluşunu və tədqiqini zəruri edir. Mexanikanın bəzi məsələlərində sərhəd şərtlərinə zamana görə törəmə daxil olan məsələlərə təsadüf olunur. Bir çox hadisələrin riyazi modellərində məsələnin sərhəd şərti qeyri-lokal və qlobal hədlər tutan məsələlər olur. Bu cür sərhəd şərtlərinə zamana görə törəmə daxil olur. Onda onlar üçün qurulan köməkçi məsələlər sərhəd şərtlərində spektral parametr saxlamış olurlar.Ancaq sərhəd şərtlərində parametr iştirak edən sərhəd məsələləri Steklov məsələləri adlandırılır.

Təqdim olunan dissertasiya işi birinci və ikinci tərtib elliptik tip tənliklərin müxtəlif oblastlarda qeyri-lokal və qlobal hədd tutan (inteqral) sərhəd şərtləri daxilində həllərinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Baxılan tənliklərin yalnız sərhəd şərtlərinə parametr daxil olduğundan bu cür məsələlər Steklov tipli məsələlərdir. Bu tip məsələlərlə V.A.Steklov, Ya.D.Tamarkin və başqaları məşğul olmuşlar. Azərbaycanda Ş.K.Baimov, N.Ə.Əliyev və onların tələbələri də belə məsələlərin tədqiqi ilə məşğul olmuşlar. Bizim baxdığımız məsələlərdə sərhəd şərtləri lokal şərtlər deyil. Məqsəd qoyulmuş sərhəd məsələsini II növ Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirməkdən ibarətdir. Belə ki, baxılan tənliyə qoşma tənliyin fundamental həllinin köməyi ilə zəruri şərtlər təyin edilir. Bu şərtlər tənlikdən və həllin araşdırıldığı oblastdan asılı olur. Sonra bu zəruri şərtlər və qoyulmuş sərhəd şərtlərinin köməyi ilə məsələnin fredholmluğu üçün kafi şərt alınmış olur. Qeyd etmək olar ki, dissertasiyada tətbiq olunan üsul (sxem) və ideyalar sadədir, ümumi sinifdən olan sərhəd məsələlərinin həllərinin araşdırılmasında və qeyri-lokal şərtli məsələlərinin həllində istifadə oluna bilər. Bu cür tədqiq olunan üsul dissertasiya işini aktual edir.

Dissertasiya işinin məqsədi. İşdə baxılan sərhəd məsələlərinin fredholmluğu araşdırılır. Qoyulmuş məsələlərin həlləri ümumi, xətti, qeyri-lokal və qlobal hədlər tutan sərhəd şərtləri daxilində tədqiq edilir.

Tədqiqat üsulları. Baxılan məsələlərin tədqiqində (araşdırılmasında) riyazi analizin, xüsusi törəməli diferensial tənliklərin və inteqral tənliklər nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə olunmuşdur. Bundan başqa həmçinin fundamental həllin, ümumiləşmiş (δ-funksiya) funksiyalar nəzəriyyəsinin və II növ Fredholm tipli inteqral tənliklərin bəzi xassələrindən istifadə olunmuşdur.

Elmi yeniliklər:

- Baxılan tənliyin verilmiş oblastda olan ixtiyari həlli üçün analitik ifadə və həllin oblastın sərhəddindəki qiymətləri üçün zəruri şərtlər alınmışdır.
- Tənliyin verilən oblastda təyin olunan hər bir həllinin bu şərtləri (zəruri) ödədiyi haqda teoremlər isbat olunmuşdur.
- Bu zaman araşdırılan məsələlərin həllinin analitik ifadələri potensialların cəmi şəklində alınmışdır.
- Bundan başqa sərhəd şərtlərindəki əmsalların üzərinə qoyulmuş müəyyən məhdudiyyətlər daxilində araşdırılan məsələlərin fredholmluğunu göstərən teoremlər isbat edilmişdir.

İşin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İşdə alınan nəticələr, əsasən nəzəri əhəmiyyət kəsb edir. Əsas əhəmiyyəti, qoyulmuş sərhəd məsələlərinin fredholmluğunu isbat etmək üçün işlənib hazırlanmışdır. İşdə istifadə olunan nəzəri sxemlə başqa tənliklər üçün qoyulan sərhəd məsələlərinin həllərini tədqiq etmək olar. Praktiki əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, alınmış nəticələr mexanikanın bəzi məsələlərinin öyrənilməsində, diffuziya və məsaməli mühitdə mayenin hərəkəti zamanı baxılan üsulların riyazi modelinin araşdırılması zamanı istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işində alınan əsas elmi nəticələr aşağıdakı elmi seminar və konfranslarda məruzə edilib: BDU-nun "Tətbiqi analizin riyazi üsulları" (rəhbər: akademik M.F.Mehdiyev) kafedrasının elmi seminarında, AMEA-nın İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun genişlənmiş elmi seminarında, Beynəlxalq Astronomiya ilinə həsr olunmuş astronomiya, fizika və riyaziyyat üzrə beynəlxalq konfransda (Naxçıvan-2009), Azərbaycan MEA-nın aspirantlarının elmi konfransında (Bakı-2010), Gənc alimlərin XII məktəbində "Qeyri-lokal sərhəd məsələləri, müasir analiz və informatikanın" problemləri (Nalçik-2014), Gənc alim və mütəxəssislərin 1-ci Beynəlxalq Elmi konfransında (Baku- 2014), Azərbaycanın Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyatın Tətbiqi Problemləri" Respublika Elmi Konfransında (Bakı-2015).

Nəşrlər: Dissertasiya mövzusuna aid 14 elmi iş nəşr olunmuşdur.

Dissertasiyanın həcmi və quruluşu: Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən və 82 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 113 səhifə təşkil edir.

DİSSERTASİYA İŞİNİN MƏZMUNU

Birinci fəsil üç yarımfəsildən ibarətdir və birinci tərtib elliptik tip tənlik üçün qoyulmuş məsələlərin tədqiqinə həsr olunub.

Bu fəsilin birinci yarım fəsilində məhdud D - oblastında

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=0, \quad x=(x_1,x_2)\in D, \tag{1}$$

Koşi-Riman tənliyi üçün

$$u(x_1,0)=\lambda\int_0^1 K(x_1,t)u(t,\gamma(t))dt, \quad x_1\in[0;1], \tag{2}$$

sərhəd şərti daxilində məsələnin həlli araşdırılmışdır.Burada $D=\{x: x_2\in(0,\gamma(x_1)), x_1\in(0;1)\}\subset R^2$, x_2 istiqamətində qabarıq, məhdud oblast, $\Gamma=\overline{D}\setminus D$ isə hissə-hissə Lyapunov xətti, $i=\sqrt{-1}$, λ-spektral parametr, $K(x_1,t)$ nüvəsi isə məlum kəsilməz funksiyadır. Parametr yalnız sərhəd şərtinə daxil olduğundan bu məsələ Steklov məsələsi adlanır. Koşi-Riman tənliyi üçün qurulmuş, x_2 istiqamətində fundamental olan

$$U(x-\xi)=e(x_2-\xi_2)\delta(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)), \tag{3}$$

həllin köməyi ilə ikinci Qrin düsturunun alınma üsulu ilə

$$\int_\Gamma u(x)U(x-\xi)[\cos(\nu,x_2)+i\cos(\nu,x_1)]dx=\begin{cases}u(\xi), & \xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi\in\Gamma,\end{cases} \tag{4}$$

münasibəti alınmışdır. Burada e-simmetrik Xevisayd funksiyası, δ - isə kompleks arqumentdən asılı Dirak funksiya, ν -isə D oblastının Γ-sərhəddinə çəkilmiş xarici normaldır. Bu əsas münasibətin birinci hissəsi (1) tənliyinin D-də təyin olunmuş ixtiyari həllini, ikinci hissəsi isə aşağıdakı zəruri şərtləri verir:

$$\frac{1}{2}u(\xi_1,0)=\frac{1}{2}\int_0^1 u(x_1,\gamma(x_1))\delta(x_1-\xi_1-i\gamma(x_1))[1-i\gamma'(x_1)]dx_1, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}u(\xi_1,\gamma(\xi_1))=\frac{1}{2}\int_0^1 u(x_1,0)\delta(x_1-\xi_1+i\gamma(\xi_1))dx_1, \tag{6}$$

İkinci zəruri şərt olan (6) dan aşağıdakı münasibət alınır:

$$u(\xi_1,\gamma(\xi_1))=u(\xi_1-i\gamma(\xi_1),0), \quad \xi_1\in[0,1]. \tag{7}$$

Aldığımız (7) zəruri şərtini verilmiş (2) sərhəd şərtində nəzərə alaq:

$$u(x_1,0)=\lambda\int_0^1 K(x_1,t)u(t-i\gamma(t),0)dt. \tag{8}$$

(8)-də

$$t-i\gamma(t)=\tau, \tag{9}$$

əvəzləməsini apardıqda, τ dəyişəni kompleks müstəvidə həqiqi oxun 0 və 1 nöqtələrindən keçən L xətti boyunca hərəkət etmiş olur. Ona görə də $[0;1]\cup L$ qapalı xətti ilə hüdudlanmış oblastda alınan inteqralaltı funksiyanın polyusunun olmadığı şərt daxilində (8) ifadəsi aşağıdakı şəklə düşər:

$$u(x_1,0)=\lambda\int_0^1 K(x_1,\tau+i\sigma(\tau))[1+i\sigma'(\tau)]u(\tau,0)d\tau, \quad x_1\in[0;1]. \tag{10}$$

Bu isə $u(x_1,0)$-ə görə ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənlikdir. Qeyd edək ki, $t=\tau+i\sigma(\tau)$ (9)-un həllidir. Beləliklə, aşağıdakı hökm isbat edilmiş olur.

Teorem 1. Əgər D- x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, $\Gamma=\overline{D}\setminus D$ sərhəddi hissə-hissə Lyapunov xətti, $K(x_1,t)$ kifayət qədər hamar nüvədirsə, $[0;1]\cup L$ qapalı xətti daxilində (10) inteqralının nüvəsinin məxsusiyyəti yoxdursa, λ_k onun məxsusi ədədləri, $u_k(x_1,0)$-lar isə uyğun məxsusi funksiyalarıdırsa, onda həmin λ_k -lar (1),(2) məsələsinin məxsusi ədədləri, məxsusi funksiyaları isə aşağıdakı şəkildə olur.

$$\begin{aligned}u_k(\xi)=&\frac{1}{2}\int_0^1 u_k(x_1,0)\delta(x_1-\xi_1+i\xi_2)dx_1+\\&+\int_0^1 u_k(x_1,\gamma(x_1))e(\gamma(x_1)-\xi_2)\delta(x_1-\xi_1-i(\gamma(x_1)-\xi_2))[1-i\gamma'(x_1)]x_1.\end{aligned} \tag{11}$$

Birinci fəsilin ikinci yarımfəsilində (1) tənliyi üçün ümumi qlobal hədlər saxlayan aşağıdakı sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılır:

$$u(x_1,0)+\lambda\int_0^1\left[K_0(x_1,t)u(t,0)+K_1(x_1,t)u(t,\gamma(t))\right]dt=0. \quad x_1\in[0,1] \qquad (12)$$

Burada D-x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, Γ - sərhəddi isə hissə-hissə Lyapunov xəttidir. Burada $K_0(x_1,t)$ və $K_1(x_1,t)$ kəsilməz funksiyalar, $\lambda\in C$ isə spektral parametrdir. Burada da Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli (3) şəklində götürülür.Birinci yarımfəsilə analoji olaraq (1) tənliyi üçün x_2 istiqamətində fundamental olan həllin köməyi ilə (4) əsas münasibətini alınır.Aldığımız əsas münasibətin ikinci ifadəsi zəruri şərtləri verir.Onları ayırmaqla (7) münasibətini alırıq.Verilmiş (11) sərhəd şərtində üçüncü toplananda (7) zəruri şərtini nəzərə alaq:

$$u(x_1,0)+\lambda\int_0^1 K_0(x_1,t)u(t,0)dt+\lambda\int_0^1 K_1(x_1,t)u(t-i\gamma(t),0)dt=0 \qquad (13)$$

İndi isə bu üçüncü toplananda $t-i\gamma(t)=\tau$, əvəzləməsini aparsaq, onda həqiqi oxun $[0;1]$ parçası kompleks müstəvinin elə L xəttinə keçir ki, o xətt həqiqi oxun $[0;1]$ parçasını qapayır. Əvəzləmədən sonra (13) aşağıdakı şəklə düşür:

$$u(x_1,0)+\lambda\int_0^1 K_0(x_1,t)u(t,0)dt+\lambda\int_L K_1(x_1,\tau+i\sigma(\tau))u(\tau,0)\left[1+i\sigma'(\tau)\right]d\tau=0 \qquad (14)$$

Əsas şərt : Tutaq ki, (14) ifadəsinə daxil olan üçüncü inteqralın altında olan funksiyanın kompleks C müstəvisində yerləşən qapalı $[0,1]\cup L$ xətti daxilində heç bir məxsusiyyəti yoxdur. Onda Koşi teoreminə əsasən (14)-də olan üçüncü toplananda inteqralı $[0,1]$ oblastı üzrə inteqralla əvəz edə bilərik. Beləliklə,

$$u(x_1,0)=-\lambda\int_0^1\left\{K_0(x_1,t)+K_1(x_1,t+i\sigma(t))\left[1+i\sigma'(t)\right]\right\}u(t,0)dt, \quad x_1\in[0,1],$$

ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənliyi alınır.

Birinci fəsilin üçüncü yarım fəsilində (1) tənliyi üçün x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblastda qeyri-lokal

$$\alpha_1(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1))+\alpha_2(x_1)u(x_1,\gamma_2(x_1))=\alpha(x_1), \quad x_1\in[a_1,b_1], \qquad (15)$$

sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılır. Burada $\alpha_1(x_1),\alpha_2(x_1)$ və $\alpha(x_1)$ - verilmiş kompleks qiymətli funksiyalar, D-x_2 istiqamətində qabarıq müstəvi oblastdır.

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}, \qquad (16)$$

fundamental həllinin köməyilə əsas münasibət qurulur və buradan aşağıdakı zəruri şərtlər alınır:

$$\begin{aligned}
u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))&=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}dx_1+\\
&+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1,\\
u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))&=-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}dx_1-\\
&-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1,
\end{aligned} \qquad (17)$$

burada $\sigma_k=\sigma_k(x_1,\xi_1)$, $k=1,2$ x_1 və ξ_1 nöqtələri arasında yerləşir. (15) sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla, (17) zəruri şərtlərindən aşağıdakı requlyar münasibət alınır**:**

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))-\alpha_2(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\\
&\cdot u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_2(\xi_1)-\alpha_2(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1-\frac{\alpha_1(\xi_1)i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\\
&\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}dx_1-\frac{\alpha_2(\xi_1)i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}dx_1+\\
&+\frac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1+\\
&+\frac{\alpha_2(\xi_1)}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Alınan requlyar ifadə sərhəd şərtinə qatılmaqla alınan sistemdən sərhəd qiymətləri üçün ikinci növ Fredholm tipli nüvəsində sinqulyarlığı zəif olan inteqral tənliklər sistemi alınır. Sərhəd şərtindən istifadə etməklə yuxarıdakı sistem bir inteqral tənliyə gətirilir.

İkinci fəsil üç yarımfəsildən ibarətdir və xüsusi sərhəd şərtləri daxilində Koşi-Riman tənliyi üçün məsələlərin araşdırılmasına həsr edilmişdir.

İkinci fəsilin birinci yarımfəsilində (1) tənliyi üçün yuxarı yarımmüstəvidə

$$\alpha_1 u(-t,0)+\lambda\alpha_2 u(t,0)=0,\quad t\ge 0, \tag{19}$$

sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılır. Burada α_1 və α_2 kompleks ədədlər, λ- isə spektral parametrdir. Koşi-Riman tənliyinin (16) fundamental həllinin köməyi ilə aşağıdakı ifadəni quraq:

$$0=\int_R dx_1\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x_2}U(x-\xi)dx_2+i\int_0^\infty dx_2\int_R \frac{\partial u}{\partial x_1}U(x-\xi)dx_1 .$$

Alınan ifadədə daxildə olan inteqralları hissə-hissə inteqrallayaq:

$$0=\int_R dx_1\left[u(x)U(x-\xi)\Big/_{x_2=0}^{\infty}-\int_0^\infty u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx_2\right]+i\int_0^\infty dx_2\left[u(x)U(x-\xi)\Big/_{x_1=-\infty}^{\infty}-\right.$$

$$\left.-\int_R u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx_1\right]=\lim_{x_2\to\infty}\int_R u(x)U(x-\xi)dx_1-\int_R u(x_1,0)U(x_1-\xi_1-\xi_2)dx_1-$$

$$-\int_R dx_1\int_0^\infty u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx_2+i\lim_{x_1\to\infty}\int_0^\infty u(x)U(x-\xi)dx_2-i\lim_{x_1\to-\infty}\int_0^\infty u(x)U(x-\xi)dx_2-$$

$$-i\int_0^\infty dx_2\int_R u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx_1,$$

Yarımmüstəvi boyunca olan inteqralları birləşdirib

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+i\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}=\delta(x-\xi)=\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2),$$

ifadəsini nəzərə alaq:

$$\lim_{x_2\to\infty}\int_R u(x)U(x-\xi)dx_1-\int_R u(x_1,0)U(x_1-\xi_1-\xi_2)dx_1+$$

$$+\lim_{x_1\to\infty}\int_0^\infty u(x)U(x-\xi)dx_2-i\lim_{x_1\to-\infty}\int_0^\infty u(x)U(x-\xi)dx_2=$$

$$=\begin{cases} u(\xi),\ \xi_1\in R,\ \xi_2>0,\\ \dfrac{1}{2}u(\xi),\ \xi_1\in R,\ \xi_2=0;\ \xi_1\in R,\ \xi_2=\infty;\ \xi_2\ge 0,\ \xi_1=-\infty;\ \xi_2\ge 0, \xi_1=\infty.\end{cases} \tag{20}$$

(20)-nin ikinci hissəsindən

$$u(\xi_1,0)=\frac{i}{\pi}\int_R u(x_1,0)\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}. \tag{21}$$

zəruri şərtini alırıq. Bu zəruri şərti aşağıdakı iki hissəyə ayıraq:

$$u(-\xi_1,0)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^0\frac{u(x_1,0)}{x_1+\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(x_1,0)}{x_1+\xi_1)}dx_1=\frac{-i}{\pi}\int_\infty^0\frac{u(-x_1,0)}{-x_1+\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(x_1,0)}{x_1+\xi_1}dx_1=\frac{-i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(-x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(x_1,0)}{x_1+\xi_1}dx_1\quad \xi_1\ge 0, \tag{22}$$

$$u(\xi_1,0)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^0\frac{u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1=\frac{-i}{\pi}\int_\infty^0\frac{u(-x_1,0)}{-x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1=\frac{-i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(-x_1,0)}{x_1+\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1\quad \xi_1\ge 0. \tag{23}$$

(19) sərhəd şərtini nəzərə almaqla, aşağıdakı xətti kombinasiyanı quraq:

$$\alpha_1 u(-\xi_1,0)-\lambda\alpha_2 u(\xi_1,0)=\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha_1 u(x_1,0)+\lambda\alpha_2 u(-x_1,0)}{x_1+\xi_1}dx_1-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha_1 u(-x_1,0)+\lambda\alpha_2 u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1=\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha_1 u(x_1,0)+\lambda\alpha_2 u(-x_1,0)}{x_1+\xi_1}dx. \tag{24}$$

(24) requlyar ifadəsini verilmiş sərhəd şərtinə qoşsaq,nəticədə

$$\begin{cases}\alpha_1 u(-t,0)+\lambda\alpha_2 u(t,0)=0,\\ \alpha_1 u(-t,0)-\lambda\alpha_2 u(t,0)=\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\alpha_1 u(\tau,0)+\lambda\alpha_2 u(-\tau,0)}{\tau+t}d\tau.\end{cases} \tag{25}$$

və

$$\begin{cases} u(-t,0) = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{u(\tau,0)}{\tau+t}d\tau + \frac{\lambda\alpha_2 i}{2\pi\alpha_1}\int_0^\infty \frac{u(-\tau,0)}{\tau+t}d\tau, \\ u(t,0) = -\dfrac{\alpha_1 i}{2\lambda\alpha_2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{u(\tau,0)}{\tau+t}d\tau - \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{u(-\tau,0)}{\tau+t}d\tau, \ t \ge 0. \end{cases}$$

sistemlərini alırıq. Sonuncu sistemi isə sərhəd şərtinin köməyi ilə bir inteqral tənliyə gətirmək olar.

İkinci fəsilin ikinci yarımfəsilində (1) tənliyi üçün

$$u(x_1,\gamma_2(x_1)) = \alpha_1(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1)) + \lambda u(x_1,0), \quad x_1 \in [a_1,b_1], \tag{26}$$

(Lavrentyev-Bitsadze) sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılmışdır. Burada $\alpha_1(x_1)$-kompleks qiymətli kəsilməz funksiya, $\lambda \in C$ - parametrdir, $[a_1,b_1] = pr_{x_1}\overline{\Gamma_1} = pr_{x_1}\overline{\Gamma_2} = pr_{x_1}\overline{D}$. Koşi–Riman tənliyinin (16) fundamental həllinin köməyilə alınan əsas münasibətin ikinci hissəsindən aşağıdakı zəruri şərt alınır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\xi_1,\gamma_k(\xi_1)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1} u(x_1,\gamma_1(x_1))\frac{-\cos(x_1,\tau)+i\sin(x_1,\tau)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_k(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{dx_1}{\cos(x_1,\tau)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1} u(x_1,\gamma_2(x_1))\frac{\cos(x_1,\tau)-i\sin(x_1,\tau)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_k(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{dx_1}{\cos(x_1,\tau)}, \quad k=1,2; \end{aligned} \tag{27}$$

Burada τ -sərhəddə toxunan istiqamətdir.(27) zəruri şərtlərində olan sinqulyarlıqları requlyarlaşdırmaq üçün aşağıdakı kimi kombinasiyaya baxaq.

$$\begin{aligned} A_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)) + A_2(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)) &= -\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1^1(x_1)}{\gamma_1^1(\sigma_1)+i}\cdot\frac{A_1(\xi_1)u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1 + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2^1(x_1)}{\gamma_2^1(\sigma_2)+i}\cdot\frac{A_2(\xi_1)u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1 + \frac{A_1(\xi_1)}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2^1(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot \\ &\cdot u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1 - \frac{A_2(\xi_1)}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1^1(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1, \end{aligned} \tag{28}$$

burada $\sigma_k = \sigma_k(x_1,\xi_1)$ $k=1,2$ olduqda x_1 və ξ_1 nöqtələri arasındadır.

(28)-də olan sinqulyar inteqralların əmsallarını saflaşdırıb və alınan ifadələri yerinə yazsaq və sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} -u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)) - \alpha_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)) &= \frac{\lambda i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{-1+i\gamma_1^1(\eta_1)}{\gamma_1(\eta_1)+i(\eta_1-x_1)}u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2^1(\eta_1)}{\gamma_2(\eta_1)+i(\eta_1-x_1)}u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))d\eta_1\right] - \frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1 + \\ &+ \frac{i\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_1^1(\sigma_1)-\gamma_1^1(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(\sigma_1)+i}dx_1 - \frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_2^1(\sigma_2)-\gamma_2^1(x_1)}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1 - \\ &- \frac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2^1(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_2(x_1)) + \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1^1(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1 \end{aligned} \tag{29}$$

requlyar münasibəti alınır. Nəticədə aşağıdakı hökmü alırıq:

Teorem 2. Əgər D - məhdud, x_2 - istiqamətində qabarıq müstəvi oblast, Γ sərhəddi Lyapunov xətti olmaqla, bu oblastı x_2-yə papalel olaraq x_1 -oxu üzrə proyeksiyalasaq, sərhəd Γ-nın bölündüyü Γ_1 və Γ_2 hissələrinin iki ortaq nöqtələri $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ absis oxu üzərindədirsə, $\alpha_1(x_1)$ Hölder sinfindəndirsə, onda (29) münasibəti requlyardır.

Verilmiş (26) sərhəd şərti və (29) requlyar ifadələrindən aşağıdakı sistem alınr:

$$\begin{aligned} & u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)) - \alpha_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)) = \lambda u(\xi_1,0) \\ & -u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)) - \alpha_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)) = \frac{-\lambda i}{2\pi^2}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1 \cdot \\ & \cdot\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1^1(x_1)}{(\eta_1-\xi_1)(\gamma_1(x_1+i(x_1-\eta_1))}d\eta_1 + \frac{\lambda i}{2\pi^2}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2^1(x_1)}{(\eta_1-\xi_1)(\gamma_2(x_1)+i(x_1-\eta_1))}\cdot \\ & \cdot d\eta_1 + \ldots, \end{aligned} \tag{30}$$

Nəticədə aşağıdakı hökm alınır:

Teorem 3. Teorem 2-nin şərtləri daxilində $\alpha_1(x_1) \ne 0$ şərti (1), (26) sərhəd məsələsinin fredholmluğu üçün kafidir.

İkinci fəsilin üçüncü yarımfəsilində məhdud müstəvi D -oblastında elə analitik funksiya axtarılır ki, sərhədin bir hissəsində axtarılan funksiyanın həqiqi hissəsi, digər hissəsində isə xəyali hissəsinin əmsalı bu ifadələrin inteqralları vasitəsi ilə göstərilmiş olsun:

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial w(x)}{\partial x_1}=0, \quad x=(x_1,x_2)\subset D\subset R^2, \tag{31}$$

$$u(x_1,\gamma_1(x_1))=\lambda\int_{a_1}^{b_1}\left[K_{11}(x_1,\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))+K_{12}(x_1,\xi_1)v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))\right]d\xi_1, \tag{32}$$

$$v(x_1,\gamma_2(x_1))=\lambda\int_{a_1}^{b_1}\left[K_{21}(x_1,\xi_1)u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))+K_{22}(x_1,\xi_1)v(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))\right]d\xi_1 \tag{33}$$

Burada $D-x_2$ istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, $w(x)=u(x)+iv(x)$ -dir.Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən istifadə etməklə aşağıdakı zəruri şərtlər alınır:

$$\begin{cases} w(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{w(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{w(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}dx_1+ \\ +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{w(x_1,\gamma_2(x_1))\left[1-i\gamma_2'(x_1)\right]}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx_1, \\ w(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{w(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{w(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}dx_1- \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{w(x_1,\gamma_1(x_1))\left[1-i\gamma_1'(x_1)\right]}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx_1, \end{cases} \tag{34}$$

$w(x)$-i nəzərə alsaq (34) aşağıdakı şəklə malik olur:

$$\begin{cases} u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{v(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+..., \\ v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+..., \\ u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{v(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+..., \\ v(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+..., \end{cases} \tag{35}$$

Aldığımız (35) ifadələrində verilmiş (32),(33) sərhəd şərtlərini nəzərə alaq:

$$\begin{gathered} v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}\lambda\int_{a_1}^{b_1}\left[K_{11}(x_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))+K_{12}(x_1,\eta_1)v(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))\right]d\eta_1+ \\ +...=\frac{\lambda}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{K_{11}(x_1,\eta_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{\lambda}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}v(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{K_{12}(x_1,\eta_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+..., \end{gathered} \tag{36}$$

Teorem 4. Əgər $D\in R^2$ - x_2 istiqamətində qabarıq, məhdud oblast, $\Gamma=\overline{D}\setminus D$-sərhəddi Lyapunov xəttidirsə, $K_{ij}(x_1,\xi_1)\; i,j=1{,}2$ nüvələri kəsilməzdirlərsə, onda (32),(33) və (36) sistemi requlyar nüvəli ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənliklər sistemidir.

Üçüncü fəsil dörd yarımfəsildən ibarətdir və ikinci tərtib elliptik tip tənlik üçün məsələlərin həllərinin araşdırılmasına həsr olunub.

Bu fəsilin birinci yarımfəsilində Laplas tənliyi üçün Zaremba-Steklov məsələsinə baxılmışdır. Burada baxılan məsələ

$$\Delta u(x)\equiv\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}=0, \quad x=(x_1,x_2)\in D\subset R^2, \tag{37}$$

ikiölçülü Laplas tənliyi üçün sərhəd şərtlərinin qeyri-lokal hissələri birinci şərtdə yalnız axtarılan funksiya, ikinci şərtdə isə axtarılan funksiyanın normal istiqamətdə törəmələri iştirak edən

$$\begin{gathered} \alpha_1(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1))+\beta_1(x_1)u(x_1,\gamma_2(x_1))= \\ =\lambda\int_{a_1}^{b_1}K_1(x_1,\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))d\xi_1, \qquad x_1\in[a_1,b_1], \end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered} \alpha_2(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}+\beta_2(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}= \\ =\lambda\int_{a_1}^{b_1}K_2(x_1,\xi_1)u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))d\xi_1, \qquad x_1\in[a_1,b_1], \end{gathered} \tag{39}$$

sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılmışdır. Burada λ -spektral parametri yalnız sərhəd şərtlərinə daxildir. Sərhəd şərtlərinin verilənləri $\alpha_i(x_1),\ \beta_i(x_1)$ və $K_i(x_1,\xi_1),(i=1{,}2)$ kəsilməz funksiyalardır. Laplas tənliyinin

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, \tag{40}$$

fundamental həllinin köməyi ilə aşağıdakı əsas münasibətlər qurulur:

$$\int_\Gamma\left[u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)\right]\cdot\cos(\nu,x_1)dx+$$
$$+\int_\Gamma\left[u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)\right]\cdot\cos(\nu,x_2)dx=\begin{cases}u(\xi),\ \xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi),\xi\in\Gamma.\end{cases}\tag{41}$$

$$\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\right]\cdot\cos(\nu,x_1)dx+$$
$$+\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cos(\nu,x_2)dx=\begin{cases}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1},\ \xi\in D,\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1},\xi\in\Gamma.\end{cases}\tag{42}$$

$$\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cdot\cos(\nu,x_1)dx+$$
$$+\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cos(\nu,x_2)dx=\begin{cases}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2},\ \xi\in D,\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2},\xi\in\Gamma.\end{cases}\tag{43}$$

Birinci əsas münasibətdən alınan zəruri şərtlər requlyar, ikinci və üçüncü əsas münasibətlərdən alınan zəruri şərtlər isə özündə sinqulyar inteqrallar saxlayır. Ikinci əsas münsibətlərdən alınan zəruri şərtlərdə sinqulyarlıqlar saflaşdırılaraq

$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots\tag{44}$$
$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\cdot\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots\tag{45}$$

münasibətləri alınır. 3-ci əsas münsibətlərdən alınan zəruri şərtlərdə sinqulyarlıqlar saflaşdırılaraq

$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots,\tag{46}$$
$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots,\tag{47}$$

münasibətləri alınır. Bu saflaşdırılmış ifadələrin köməyi ilə qurulmuş

$$\chi_1(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\chi_2(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+\chi_3(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+$$
$$+\chi_4(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left\{-\chi_1(x_1)\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}+\chi_2(x_1)\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}+\right.$$
$$\left.+\chi_3(x_1)\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}-\chi_4(x_1)\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right\}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots,\tag{48}$$

münasibətində

$$\begin{cases}\chi_3(x_1)=\alpha_1(x_1),\\ -\chi_4(x_1)=\beta_1(x_1),\\ -\chi_1(x_1)=\alpha_1(x_1)\gamma_1'(x_1),\\ \chi_2(x_1)=\beta_1(x_1)\gamma_2'(x_1),\end{cases}\tag{49}$$

$$\begin{cases}\chi_3(x_1)=\alpha_2(x_1)\cos(\nu,x_1),\\ -\chi_4(x_1)-\beta_2(x_1)\cos(\nu,x_1),\\ -\chi_1(x_1)=\alpha_2(x_1)\cos(\nu,x_2),\\ \chi_2(x_1)=\beta_2(x_1)\cos(\nu,x_2),\end{cases}\tag{50}$$

şərtlərini qəbul etməklə

$$-\alpha_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_1(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+$$
$$+\alpha_1(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}-\beta_1(\xi_1)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left\{\lambda\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial K_1(x_1,\eta_1)}{\partial x_1}u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1-\right.\tag{51}$$
$$\left.-\alpha_1'(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1))-\beta_1'(x_1)u(x_1,\gamma_2(x_1))\right\}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots,$$

və

$$-\alpha_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_2)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_2)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+$$

$$+\alpha_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}-\beta_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}= \tag{52}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left\{\lambda\int_{a_1}^{b_1}K_2(x_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))d\eta_1\right\}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots$$

requlyar münasibətləri alınır. Bu requlyar münasibətləri verilmiş sərhəd şərtlərinə qoşmaqla qoyulmuş məsələnin Fredholmluğunu alırıq.Beləliklə aşağıdakı hökmü alırıq:

Teorem 5. Əgər $D\subset R^2$ məhdud müstəvi oblastı x_2 istiqamətində qabarıq, $\Gamma=\overline{D}\setminus D$ sərhəddi Lyapunov xəttidirsə, $\alpha_1(x_1),\beta_1(x_1)$ və $K_1(x_1,\xi_1)$ funksiyaları x_1-ə nəzərən kəsilməz diferensiallanan olub, $K_2(x_1,\xi_1)$ funksiyası kəsilməz, $\alpha_2(x_1),\beta_2(x_1)$ Hölder sinfindən olmaqla

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1(\xi_1) & \beta_1(\xi_1) & \alpha_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1) & \beta_1(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\\ \alpha_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1) & \beta_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1) & \alpha_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_2) & \beta_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_2)\\ -\alpha_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1) & \beta_1(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1) & \alpha_1(\xi_1) & -\beta_1(\xi_1)\\ -\alpha_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1) & \beta_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_2) & \alpha_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1) & \beta_2(\xi_1)\cos(\nu,\xi_1)\end{vmatrix}\neq 0,$$

şərti ödənilərsə, onda (37)-(39) məsələsi Fredholm tiplidir.

Üçüncü fəsilin ikinci yarımfəsilində Laplas tənliyi üçün həm qeyri-lokal, həm də qlobal hədd iştirak edən

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}=\beta(x_1)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}+\lambda\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}K(x_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1,\\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}=\alpha(x_1)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}, \quad x_1\in[a_1,b_1],\end{cases} \tag{53}$$

sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılır. Burada $K(x_1,\eta_1),\alpha(x_1),\beta(x_1)$

kompleks qiymətli, $\gamma_1(x_1)$ və $\gamma_2(x_1)$ isə həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyalar, λ-spektral parametrdir. Laplas tənliyinin fundamental həllindən istifadə etməklə aşağıdakı münasibətlər alınır:

$$\int_\Gamma\left[u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)\right]\cdot\cos(\nu,x_1)dx+\int_\Gamma\left[u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)\right]\cdot$$

$$\cdot\cos(\nu,x_2)dx=\int_D u(x)\left[\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_2^2}\right]dx=\begin{cases}u(\xi),\ \xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi),\xi\in\Gamma,\end{cases} \tag{54}$$

$$\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\right]\cdot\cos(\nu,x_1)dx+\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\right]\cdot\cos(\nu,x_2)dx=\int_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_2^2}\right]dx==\begin{cases}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1},\ \xi\in D,\\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1},\xi\in\Gamma,\end{cases} \tag{55}$$

$$\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cdot\cos(\nu,x_1)dx+\int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cdot\cos(\nu,x_2)dx=\int_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\left[\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_2^2}\right]dx==\begin{cases}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2},\ \xi\in D,\\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2},\xi\in\Gamma.\end{cases} \tag{56}$$

Burada 6 zəruri şərt var və onların 4-i özündə sinqulyarlıq saxlayır. Bu ikinci əsas münasibətdə olan zəruri şərtlər özündə sinqulyarlıq saxlayırlar. Bu sinqulyarlıqlar özünə məxsus üsulla requlyarlaşdırılır.Həmin münasibətlər verilmiş sərhəd şərtləri ilə birləşərək, qoyulmuş məsələnin fredholmluğu üçün kafi şərt almağa imkan verir. Beləliklə aşağıdakı hökm isbat olunur.

Teorem 6. Əgər $D\in R^2$- x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, $\Gamma=\overline{D}\setminus D$ sərhəddi Lyapunov xəttidirsə, $K(x_1,\eta_1)$ nüvəsi kəsilməz, $\alpha(x_1),\beta(x_1)$ əmsalları Hölder sinfindən olan və $\alpha(x_1)+\beta(x_1)\neq 0$ şərtini ödəyən funksiyalar olarsa, onda (37), (53) sərhəd məsələsi Fredholm tiplidir.

Bu fəsilin üçüncü yarımfəsilində sərhəddi qeyri məhdud olan qeyri məhdud müstəvi oblastda Laplas tənliyi üçün lokal Neyman şərtli

$$\frac{du(x)}{d\nu_x} = \lambda u(x), \quad x \in \Gamma = \overline{D} \setminus D, \tag{57}$$

sərhəd məsələsinə baxılır. Burada $D = \{x = (x_1, x_2) : x_2 > x_1^2,\ x_1 \in R\}$, qeyri məhdud müstəvi oblast, $\lambda \in C$ -parametr, ν_x isə Γ sərhəddinə x nöqtəsində çəkilmiş xarici normaldır. Qeyd edək ki, (37), (57) məsələsinin həlli dedikdə elə $u(x)$ funksiyası başa düşülür ki, $\lim\limits_{x_2 \to \infty} u(x) = 0$ -dır. Baxılan məsələ klassik ikinci sərhəd məsələsi olsa da onun araşdırılma üsulu yenidir. Nəticədə zəif məxsusiyyətli ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənlik alınr:

$$u(\xi_1, \xi_1^2) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_R u(x_1, x_1^2) \ln|x_1 - \xi_1| \ln\sqrt{1 + (x_1 + \xi_1)^2}\sqrt{1 + 4x_1^2}\,dx_1 + \frac{1}{\pi}\int_R u(x_1, x_1^2)\frac{dx_1}{1 + (x_1 + \xi_1)^2}$$

Üçüncü fəsilin dördüncü yarımfəsilində Laplas tənliyi üçün məhdud müstəvi oblastda törəmələrə nəzərən qeyri-lokal

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2 = \gamma_2(x_1)} + \alpha(x_1)\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2 = \gamma_1(x_1)} = \lambda u(x_1, \gamma_1(x_1)), \\
\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2 = \gamma_2(x_1)} + \beta(x_1)\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2 = \gamma_1(x_1)} = \lambda u(x_1, \gamma_2(x_1)), \quad x_1 \in [a_1, b_1],
\end{gathered} \tag{58}$$

sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılır. Yuxarıdakı qaydaya analoji olaraq baxılan məsələnin Fredholmluğu tədqiq edilir. Nəticədə aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 7. Tutaq ki, $D \subset R^2$ - x_2 istiqamətində qabarıq, məhdud oblast, $\Gamma = \partial D$ - sərhəddi Lyapunov xətti, $\alpha(x_1), \beta(x_1)$ əmsalları müəyyən müsbət indeksli Hölder sinfindən olarsa, onda $\alpha(x_1) \neq \beta(x_1)$ şərtləri daxilində (37), (58) məsələsi Fredholm tiplidir.

Sonda elmi rəhbərim **professor N.Ə.Əliyevə** məsələlərin qoyuluşuna, işə daimi diqqətinə və dəyərli məsləhətlərinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Dissertasiyanın məzmunu aşağıdakı işlərdə nəşr olunmuşdur:

1. Əliyev N.Ə.,Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün qlobal hədd tutan sərhəd şərti daxilində Steklov məsələsinin həllinin araşdırılması// AMEA-nın xəbərləri, fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, XXX cild,Bakı,“Elm”, 2010, № 3, s.75-80.
2. Əliyev N.Ə.,Zeynalov R.M. Birinci tərtib Elliptik tip tənlik üçün Steklov məsələsi// Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası,№2.2012, s. 13-20.
3. Aliev N. A., Abbasova A. K., Zeynalov R. Non-local boundary condition Steklov problem for a Laplace equation in bounded domain// Science Journal of Applied Mathematics and Statistics, New York, USA,Vol.1, № 1, 2013, pp.1-6
4. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M., Bir qeyri-məhdud oblastda Laplas tənliyi üçün Steklov məsələsi/ (Riyaziyyat, İnformatika və İqtisadiyyatın müasir problemləri mövzusunda Respublika elmi konfransının materialları).BDU, 2010, s.199-202.
5. Əliyev N.Ə.,Zeynalov R.M.Laplas tənliyi üçün Zaremba-Steklov məsələsi/ Tələbə, magistrant və gənc tədqiqatçıların“Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri” adlı Resp., Elmi konfransın materialları, Bakı-2012, s.37-38.
6. Алиев Н.А., Масталиев В.Ю., Зейналов Р.М. Об одной граничной задаче уравнения Коши-Римана// Elmi Əsərlər fundamental elmlər,Azərb.Resp.Təhs.Nazirl., ATU, №1, cild XII(45), Bakı- 2013, s. 67-71.
7. Əliyev N.Ə.,Zeynalov R.M.Koşi-Riman tənliyi üçün qlobal hədd tutan sərhəd şərti daxilində Steklov məsələsinin həllinin araşdırılması/Beynəlxalq Astronomiya ilinə həsr olunmuş astronomiya, fizika və riyaziyyat üzrə beynəlxalq konfransın materialları, Naxçıvan-2009, s. 27.
8. ZeynalovR.M., Yarımmüstəvidə Koşi-Riman tənliyi üçün Steklov məsələsi/AMEA-nın Aspirantların elmi konfrans.material.,Bakı-2010,s.105-107
9. Zeynalov R.M. Analitik funksiyalar üçün Steklov məsələsi/ 1 st İnternational Scientific Conference of Young scientists and specialists.Baku /Azerbaijan, 15-16 October, 2014, pp. 281-282

10. Əliyev N.Ə.,Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün Lavrentyev-Bitsadze şərtli Steklov məsələsinin fredholmluğu//Pedaqoji Universitet Xəbərləri, Təbiət elmləri bölməsi, Bakı-№1- 2012, s.16-19.
11. Алиев Н.А., Зейналов Р.М., Аббасова А.Х. Об одной задаче Стеклова для уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, Москва, №11(58), 2013, 10-13
12. Алиев Н.А., Зейналов Р.М. Задача Стеклова-Зарембы для уравнения Коши-Римана/ XII Школа Молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики" Материалы. Кабардино- Балкарская Республика, Терскол 3-7 декабря 2014 г, с.8-11.
13. Zeynalov R.M. Birinci tərtib elliptik tip tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin həlli/ Azərbaycanın Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ciildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyatın Tətbiqi Problemləri" Respublika Elmi Konfransının materialları, Bakı-2015, s.107-109.
14. Р.М.Зейналов, Н.А.Алиев. Задача Зарембы-Стеклова для уравнения Коши-Римана// Министерство Образование и Науки РФ, «Вестник Дагестанского государственного университета», 2015, том 30, Вып.6, с.74-79.

РАМИН МУБАРИЗ оглы ЗЕЙНАЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ И ГЛОБАЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

РЕЗЮМЕ

Излагаемая работа посвящена фредгольмовости граничных задач для эллиптического уравнения первого и второго порядка. В первых двух главах рассмотрена граничная задача для уравнения Коши-Римана в различных областях.

В первой главе с помощью полученные нами фундаментального решения по направлению определен основные соотношении. Указанное фундаментальное решение содержит дельта-функцию Дирака с комплексными аргументами. Необходимые условия, полученные из основных соотношений, содержат сингулярные интегралы, которые регуляризируются своеобразной схемой с помощью заданных граничных условий. Далее, полученные регулярные соотношения совместно с заданными граничными условиями приводят к достаточному условию фредгольмовости поставленных граничных задач. Первая и вторая главы посвящены граничным задачам для уравнения Коши-Римана с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничном условии.

Третья глава рассматриваемой диссертации посвящена граничным задачам с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничных условиях для двумерного уравнения Лапласа. Здесь в каждой из четырех задач получены три основных соотношения. Первое из них регулярно, а остальные два соотношения содержат сингулярные интегралы.

Регуляризация проводится подобно предыдущим главам, и доказывается фредгольмовость поставленных задач.

ZEYNALOV RAMIN MUBARIZ

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH NON-LOCAL AND GLOBAL TERMS IN THE BOUNDARY CONDITIONS FOR ELLIPTIC EQUATIONS IN AN ARBITRARY DOMAIN

SUMMARY

The stated work is devoted to Fredholmness of boundary value problems for elliptic equations of first and second orders. In the first two chapters there is considered the boundary value problem for the Cauchy-Riemann equation in various domains. In the first chapter with the help of the fundamental solution by the direction we have obtained basic relationships. The mentioned fundamental solution contains the Dirac delta-function with complex arguments. Necessary conditions, derived from the basic relations, contain singular integrals which are regularized by the original scheme with the help of the given boundary conditions. Further, received regular relationships together with the given boundary conditions lead to sufficient condition of the Fredholm property of the boundary problems. The first two chapters are devoted to boundary value problems for the Cauchy-Riemann equations with non-local and global terms in the boundary condition.

The third chapter of the discussed thesis is devoted to boundary problems with non-local and global terms in the boundary conditions for the two-dimensional Laplace equation. Here, in each of the four problems there are obtained three basic relationships. The first of them is regular, and the other two relationships contain singular integrals.

The regularization is carried out similar to the previous chapters, and the Fredholm property of the problems is proved.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

РАМИН МУБАРИЗ оглы ЗЕЙНАЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ И ГЛОБАЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
доктора философии по математике

БАКУ - 2016