AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

2m TƏRTİBLİ ADİ DİFERENSİAL OPERATORLARA UYĞUN SPEKTRAL AYRILIŞLARIN YIĞILMASININ TƏDQİQİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Qocayeva Xədicə Rafael qızı**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2021

Dissertasiya işi Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin «Riyazi analiz» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Məmməd Bayramoğlu

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nazim Baxış oğlu Kərimov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Şirmayıl Həsən oğlu Bağırov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f-r.e.d.. professor
Misir Cumail oğlu Mərdanov

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.r.e.n.
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi seminarın sədri: akademik, f.r.e.d., professor
Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi: Dissertasiya işi cüt tərtibli adi diferensial operatorların doğurduğu məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışların yığılmasının tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Məlumdur ki, adi diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi öz başlanğıcını Ş.Şturm, J.Luivilli sonralar isə V.A.Steklov, D.Ya.Tamakin, D.Birkkof, M.L.Rəsulov və digər məşhur riyaziyyatçıların klassik işlərindən götürür.

Diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin qurulmasında aşağıdakı sualların araşdırılması mühüm rol oynayır: öyrənilən diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin bu və ya digər fəzalarda bazisliyi; diferensial operatorun təyin oblastına daxil olan və olmayan funksiyaların spektral ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması; bu və ya digər fəzalardan olan funksiyaların diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyaları üzrə spektral ayrılışının həmin funksiyanın triqonometrik Furye sırası ilə birgəyığılması (eyniyığılması) və s.

Uzun müddət ərzində əsas araşdırma obyekti öz-özünə qoşma diferensial operatorların spektral xassələrinin öyrənilməsi olmuşdur. Buna baxmayaraq iyirminci əsrin birinci yarısından başlayaraq riyazi fizikanın bir sıra yeni məsələlərinin yaranması, öz-özünə qoşma olmayan diferensial operatorların spektral xassələrinin öyrənilməsinə təkan vermişdir. Belə məsələyə nümunə istilikeçirmə tənliyi üçün qeyi-lokal sərhəd şərtli Bitsadze-Samarski məsələsi ola bilər.

Öz-özünə qoşma olmayan sərhəd məsələlərinin öyrənilməsində aşkar olunmuşdur ki, belə operatorların məxsusi funksiyalar sistemi, ümumiyyətlə desək, nəinki L_2 – də bazis təşkil etmir, həm də L_2 – sinfində tam olmaya da bilər. Ona görə də belə sistemlər qoşulmuş funksiyalarla tamamlanmalıdır. Bu məsələlərdə məxsusi və qoşulmuş funksiyalar (kök funksiyalar) sistemi, ümumiyyətlə desək, L_2 fəzasında ortoqonal deyil, nə onun qapalılığı, nə də minimallılığı bu fəzada onun bazisliyini təmin etmir. Beləliklə, öz-özünə qoşma olmayan məsələlərin tədqiqi yeni yanaşmalar tələb edir.

Bu istiqamətdə M.V.Keldiş tərəfindən geniş sinif sərhəd məsələləri üçün xüsusi qurulmuş məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin L_2 – də tamlığı isbat edilmişdir. Geniş sinif sərhəd məsələləri üçün tamlıq məsələsinin öyrənilməsi bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən davam etdirilmişdir. Güclü requlyar sərhəd məsələlərinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin L_2 – də bazisliyi V.P.Mixaylov və Q.M.Keselman tərəfindən göstərilmişdir. Requlyar məsələlərinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin blok bazisliyi (və ya mörtərizəli bazisliyi) A.A.Şkalikovun işində göstərilmişdir.

Əmsalları kifayət qədər hamar, requlyar sərhəd şərtli adi diferensial operatorlar üçün müntəzəm birgəyığılma məsələləri üçün ilk mühüm nəticələr D.Ya.Tamarkin tərəfindən alınmışdır. Sonralar analoji nəticə cəmlənən əmsallı diferensial operatorlar üçün M.Stoun tərəfindən alınmışdır. A.P.Xromov D.Ya.Tamarkinin birgəyığılma teoremini nüvəsi requlyar sərhəd şərtli diferensial operatorun Qrin funksiyasının xassələrini cəmləşdirən inteqral operatorlar halına ümumiləşdirmişdir.

Yuxarıda sadalanan nəticələrin əsasında rezolvent metod dayanır və bu işlərdə alınmış birgəyığılma blok–birgəyığılmadır (mörtərizəli birgəyığılma).

Diferensial operatorların spektral xassələrinin öyrənilməsində digər bir metod akademik V.A.İlin tərəfindən təklif edilmişdir. İlin tərəfindən aydınlaşdırılmışdır ki, qoşulmuş funksiyaların ümumi sayı sonsuz olduqda məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin tamlıq xassəsindən fərqli olaraq bazislik və birgəyığılma (eyniyığılma) xassələri qoşulmuş funksiyaların seçilməsindən ciddi asılıdır və təkcə sərhəd şərtinin xüsusi forması ilə təyin olunmur. Bu xassələrə diferensial operatorun əmsallarının qiymətləri ciddi təsir edir, yəni, əmsalları öz sinfində saxlamaqla kiçik dəyişməsi bu xassənin yaranmasına və ya itməsinə səbəb ola bilər. Bu vəziyyətdə bazislik və birgəyığılma (eyniyığılma) şərtləri sərhəd şərtləri termini ilə ifadə edilə bilməz. Bu səbəbdən də V.A.İlin diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyalarını konkret sərhəd şərtləri ilə bağlamadan spektral parametrli diferensial tənliyin requlyar həlli kimi təyin etməyi təklif etmişdir. Bu yanaşma ixtiyari sərhəd şərtlərinə (həm lokal, həm də qeyri-lokal), heç bir sərhəd şərti ilə bağlı olmayan funksiyalar sisteminə, həm də iki müxtəlif sərhəd məsələsinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemlərinin alt çoxluqlarının birləşməsindən alınan sistemlərə baxmağa imkan verir.

V.A.İlinin işlərində adi diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminə baxılmış və müəyyən təbii şərtlər daxilində müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) və kompaktda bazislik teoremləri isbat edilmişdir.

Bu tədqiqatlar V.A.İlin və onun davamçılarının işlərində müxtəlif istiqamətlərdə inkişaf etdirilmişdir: V.V.Tixomirov, Ş.A.Alimov, İ.Yo, İ.S.Lomov, N.B.Kərimov, V.D.Budayev, V.İ.Kamornik, N.Lajetic, V.M.Qurbanov, L.V.Kriçkovun və digərlərinin işlərində bu məsələlər geniş tədqiq olunmuşdur. Son dövrlər yığılma və birgəyığılma (eyniyığılma) sürətlərinin müxtəlif xarakteritikalardan asılılığı intensiv olaraq araşdırılır və bu istiqamətdə V.M.Qurbanov və A.T.Qarayeva, V.M.Qurbanov və R.A.Səfərov, İ.S.Lomov, A.S.Markovun tədqiqatlarında əhəmiyyətli nəticələr alınmışdır. Bu məsələlər ikinci və üçüncü tərtib diferensial operatorlar üçün V.M.Qurbanov və A.T.Qarayeva, İ.S.Lomov, E.B.Axundovanın işlərində ətraflı araşdırılmışdır.

Beləliklə, yüksəktərtib diferensial operatorlar üçün bu və ya digər sualların V.A.İlin metodu ilə araşdırılması riyazi maraq kəsb edir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. 2m tərtibli adi diferensial operatorlara uyğun spektral ayrılışların mütləq və müntəzəm yığılması, triqonometrik Furye sırası ilə kompaktda müntəzəm birgəyığılma məsələlərini tədqiq etmək.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin, funksional analiz və harmonik analiz nəzəriyyələrinin üsullarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddüalar.

- İxtiyari cüt tərtibli cəmlənən əmsallı adi diferensial operatorun məxsusi funksiyaları üzrə ortoqonal ayrılışın mütləq yığılmasının və müntəzəm yığılma sürətinin tədqiqinin nəticələri.
- Cüt tərtibli hamar əmsallı adi diferensial operatorun kök funksiyaları üzrə $W_2^1(G)$ sinfindən olan funksiyaların biortoqonal ayrılışlarının mütləq və müntəzəm yığılmasının tədqiqinin nəticələri.
- *(2m-2)-ci* tərtib törəmənin əmsalının inteqral kəsilməzlik modulunun biortoqonal ayrılış ilə adi triqonometrik Furye sırasının müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürətinə təsirinin tədqiqinin nəticələri
- Sobolev, Nikolski, Besov funksional fəzalarından olan funksiyalar üçün kompaktda müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürətinin tədqiqinin nəticələri.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- $f(x) \in W_p^1(G),\ p \geq 1,\ G = (0,1),$ sinfindən olan funksiyanın 2m tərtibli adi diferensial operatorun məxsusi funksiyaları üzrə spektral ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb və bu ayrılışın qalığı $C(\overline{G})$ metrikasında qiymətləndirilib.
- $W_1^1(G)$ sinfindən olan funksiyanın *2m* tərtibli adi diferensial operatorun məxsusi funksiyaları üzrə spektral ayrılışının triqonometrik Furye ayrılışı ilə kompaktda müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürəti tapılıb.
- $W_2^1(G)$ sinfindən olan funksiyanın *2m* tərtibli hamar əmsallı diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyaları üzrə biortoqonal ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb və müntəzəm yığılma sürəti tapılıb.
- 2m tərtibli cəmlənən əmsallı adi diferensial operatorun məxsusi və qoşulmuş funksiyaları üzrə $L_p(G),\ p \geq 1,$ fəzasından olan ixtiyari funksiyanın biortoqonal ayrılışının triqonometrik ayrılışla

kompaktda müntəzəm birgəyığılması (eyniyığılması) haqqında teoremlər isbat edilmişdir. Müxtəlif funksional fəzalardan ($W_1^1(G)$, $H_p^{\omega}(G)$, $B_{p,\theta}^{\alpha}(G)$) olan funksiyalar üçün müntəzəm birgəyığılma sürəti qiymətləndirilib.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyada alınan nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Alınan nəticələr diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, riyazi fizika məsələlərinin həlli zamanı Furye metodunun əsaslandırılmasında və funksiyaların approksimasiyası nəzəriyyəsində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransında (Bakı, 2014); Azərbaycan-Türkiyə-Ukrayna MADEA 7 Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2015); İnternational Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators" (Baku, May 25-27, 2016); Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq Elmi konfransında (Sumqayıt, 2017); Riyaziyyatın və Mexanikanın Aktual Problemləri adlı Respublika Elmi Konfransında (Bakı, 2018); Akademik Mirabbas Göycə oğlu Qasımovun 80-illiyinə həsr olunmuş beynəlxalq workshop-da (Bakı, 2019); Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики приуроченная к 55-летию ФМиКН (Дагестан, 2019) adlı XIII beynəlxalq konfransında, Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin Riyazi analiz kafedrasının seminarında; AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Funksional analiz” şöbəsinin seminarında (rəhbər, f.r.e.d., prof.H.İ.Aslanov) məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhvəsi. Alınmış bütün nəticə və təkliflər müəllifə aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiyanın tam məzmunu müəllifin 12 elmi işində dərc edilmişdir, əsərlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin «Riyazi analiz» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi–2137000 işarə (titul səhifəsi–320 işarə, mündəricat–2180 işarə, giriş–54000 işarə, I fəsil–110000 işarə, II fəsil–46000 işarə, nəticə–1200 işarə). İstifadə olunan ədəbiyyat siyahısı 88 ədəbiyyatdan ibarətdir.

DISSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Hər bir fəsil paraqraflara ayrılmışdır.

İşin giriş hissəsində mövzunun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiyanın məzmunu ilə bağlı nəticələrin qısa xülasəsi verilir və əsas nəticələr şərh olunur.

Dissertasiyanın I fəslində $W_p^1(G),\ p \geq 1,\ G = (0,1),$ sinfindən olan funksiyaların cəmlənən əmsallı cüt tərtibli adi diferensial operatorun məxsusi funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışının $\overline{G} = [0,1]$ parçasında mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb, müntəzəm yığılma sürəti qiymətləndirilib.

Bu fəsildə həmçinin $W_p^1(G),\ p \geq 1,\ G = (0,1),$ sinfindən olan funksiyanın dördüncü tərtib adi diferensial operatora uyğun məxsusi funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışı ilə triqonometrik Furye ayrılışının ixtiyari $K \subset G$ kompaktında müntəzəm birgəyığılması (eyniyığılması) araşdırılıb, müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürəti tapılıb.

Paraqraf 1.1-də həqiqi əmsallı

$$Lu = u^{(2m)} + P_2(x)u^{(2m-2)} + P_3(x)u^{(2m-3)} + \ldots + P_{2m}(x)u$$

adi diferensial operatoruna baxılır. Burada $P_l(x) \in L_1(G)$, $l = \overline{2,2m}, m \geq 1.$

$D_{2m}(G)$– ilə *(2m-1)*-ci tərtibə qədər törəmələri $\overline{G} = [0,1]$ parçasında mütləq kəsilməz olan funksiyalar çoxluğunu işarə edək.

L operatorunun λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiyası dedikdə, eynilik kimi sıfır olmayan və G-də sanki hər yerdə $Ly+\lambda y=0$ tənliyini ödəyən ixtiyar $y(x)\in D_{2m}(G)$ funksiyası başa düşülür.

Tutaq ki, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – L operatorunun $L_2(G)$ -də məxsusi funksiyalarından təşkil olunmuş tam ortonormal sistemidir, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – isə uyğun məxsusi ədədlər sistemidir və $(-1)^{m+1}\lambda_k \geq 0$ bərabərsizliyi ödənir.

Əgər $f(x)$ funksiyası $\overline{G}$ – də mütləq kəsilməzdirsə və $f'(x)\in L_p(G)$ olarsa, onda deyəcəyik ki, $f(x)$ funksiyası $W_p^1(G),\, p\geq 1,$ sinfinə daxildir.

$\mu_k = ((-1)^{m+1}\lambda_k)^{1/2m}$ qəbul edərək, $f(x)\in W_1^1(G)$ funksiyasının $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə ortoqonal ayrılışının xüsusi cəmini daxil edək:

$$\sigma_\nu(x,f) = \sum_{\mu_k\leq\nu} f_k u_k(x),\ \nu>0, \qquad f_k = (f,u_k) = \int_0^1 f(x)\overline{u_k(x)}dx$$

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdə cəmlənir.

Teorem 1. *Fərz edək ki,* $W_1^1(G)$ *sinfindən olan* $f(x)$ *–funksiyası və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *məxsusi funksiyalar sistemi üçün*

$$\left| f(x)\,\overline{u_k^{(2m-1)}(x)}\Big|_0^1 \right| \leq C(f)\mu_k^{\alpha},\ \ 0\leq\alpha<2m-1,\ \ \mu_k\geq 4\pi \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}\,\omega_1\left(f',n^{-1}\right)<\infty \quad (2)$$

şərtləri ödənir. Onda $f(x)$ *funksiyasının* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}$ *mütləq və müntəzəm yığılır və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur.*

$$\max_{x\in\overline{G}}|\sigma_\nu(x,f)-f(x)|\leq const\ \Big\{\ C(f)\,\nu^{\alpha-2m+1}+ \\ +\sum_{n=[\nu]}^{\infty} n^{-1}\omega_1\left(f',n^{-1}\right)+\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\nu^{-1}\sum_{l=2}^{2m}\|P_l\|_1\nu^{2-l}+\nu^{-1}\|f'\|_1\ \Big\} \quad (3)$$

Burada $\nu \geq 2,\ \omega_1(\cdot,\delta) - f(x)$ *funksiyasını* $L_1(G) -$ *də kəsilməzlik modulududur,* $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r(G)},\ r \geq 1,$ *const sabiti* $f(x)$ *funksiyasından asılı deyil.*

Qeyd edək ki, oxşar nəticələr ikinci tərtib diferensial operatorlar üçün N.Lajetic, V.M.Qurbanov və R.A.Səfərov, A.T.Qarayevanın, dördüncü tərtib üçün isə Y.İ.Hüseynovanın işlərində alınmışdır.

Teorem 1—dən aşağıdakı bəzi nəticələr alınır:

Nəticə 1. *Əgər teorem 1—də* $f(x) \in W_1^1(G)$ *funksiyası* $f(0) = f(1) = 0,$ *münasibətini ödəyərsə, onda (1)—şərti ödənəcək, (* $C(f) = 0$ *ilə) və bu funksiyanın ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}$ *mütləq və müntəzəm yığılır.*

Nəticə 2. *Əgər teorem 1—də* $f(x) \in W_1^1(G)$ *funksiyası* $f(0) = f(1) = 0$ *münasibətini ödəyərsə və əlavə olaraq* $f'(x) \in H_1^\beta(G),\ 0 < \beta < 1$ *(* $H_1^\beta(G)$ *—Nikolski sinfidir) olarsa, onda bu funksiyanın ortoqonal ayrılışı* $\overline{G} -$ *mütləq və müntəzəm yığılır və*

$$\max_{x \in \overline{G}} \left| f(x) - \sigma_\nu(x, f) \right| \leq const\ \nu^{-\beta} \|f'\|_1^\beta,$$

qiymətləndirməsi doğrudur. *Burada* $\|f'\|_1^\beta = \|f'\|_1 + \sup_{\delta > 0} \dfrac{\omega_1(f',\delta)}{\delta^\beta}.$

Nəticə 3. *Əgər teorem 1—də* $f(x) \in W_1^1(G)$ *funksiyası* $f(0) = f(1) = 0$ *münasibətini ödəyərsə və* $\omega_1(f',\delta) = O\left(\ln^{-(1+\gamma)} \delta^{-1}\right),$ $\delta \to +0,\ \gamma > 0,$ *olarsa, onda bu funksiyanın ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}$ *mütləq və müntəzəm yığılır və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur.*

$$\max_{x \in \overline{G}} \left| f(x) - \sigma_\nu(x, f) \right| = O\left(\ln^{-\gamma} \nu\right), \qquad \nu \to +\infty \cdot$$

Paraqraf 1.2—də $W_p^1(G),\ p > 1,\ G = (0,1),$ sinfindən olan funksiyaların cəmlənən əmsallı cüt tərtibli adi diferensial operatorun məxsusi funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışının $\overline{G} = [0,1]$

parçasında mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb, müntəzəm yığılma sürəti qiymətləndirilib.

Bu paraqrafda aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 2. *Fərz edək ki,* $W_p^1(G), p>1,$ *sinfindən olan* $f(x)$ *funksiyası və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *məxsusi funksiyalar sistemi üçün*

$$\left| f(x)\,\overline{u_k^{(2m-1)}(x)}\Big|_0^1 \right| \le C(f)\mu_k^{\alpha}\left\|u_k\right\|_{\infty}, \quad 0\le\alpha<2m-1, \quad \mu_k\ge 1, \tag{4}$$

qiymətləndirməsi ödənir.

Onda $f(x)$ *funksiyasının* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}-$ də *mütləq və müntəzəm yığılır və sıranın* $R_\nu(x,f)=f(x)-\sigma_\nu(x,f)$ *qalığı üçün*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]} \le const\left\{C_1(f)\nu^{\alpha-2m+1}+\nu^{-\beta}\left\|f'\right\|_p+\nu^{-1}\left(\left\|f\right\|_\infty+\left\|f'\right\|_p\right)\sum_{l=2}^{2m}\nu^{2-l}\left\|P_l\right\|_1\right\}, \tag{5}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $\nu\ge 1,\ p^{-1}+q^{-1}=1$, $\beta=min\{2^{-1},q^{-1}\}$, $\left\|\cdot\right\|_p=\left\|\cdot\right\|_{L_p(G)}$, *const* $f(x)$ *funksiyasından asılı deyil.*

Nəticə 4. *Əgər teorem 2–də* $C_1(f)$ *əmsalı sıfır olarsa və ya* $0\le\alpha<2m-1-\beta$ *şərti ödənərsə, onda aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur.*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]}=o(\nu^{-\beta}), \quad \nu\to+\infty. \tag{6}$$

Nəticə 5. *Əgər teorem 2–də* $f(x)\in W_p^1(G), p>1,$ *funksiyası* $f(0)=f(1)=0$ *münasibətini ödəyərsə, (4) şərti ödənir və*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]}\le const\,\nu^{-\beta}\left\|f'\right\|_p, \quad \nu\ge 2, \tag{7}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. const $f(x)$ *funksiyasından asılı deyil, yəniki* $f(x)\in W_p^1(G), p>1,$ *sinfindən olan və* $f(0)=f(1)=0$ *münasibətini ödəyən funksiyaların* L *operatorunun məxsusi funksiyaları üzrə ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}$ *–də mütləq və müntəzəm yığılır və*

(7) qiymətləndirməsi doğrudur.

$\omega_{j,}\ j=\overline{1,2m}$, ilə vahidin $2m$ dərəcədən köklərini işarə edək, $\omega_1=-\omega_2=1$.

Yuxarı da qeyd olunan nəticələri isbat etmək üçün (4) şərtini ödəyən $f(x)\in W_1^1(G)$ funksiyasının f_k Furye əmsallarını qiymətləndirmək lazımdır.

Lemma 1. *$f(x)\in W_1^1(G)$ sinfindən olan, (4) şərtini ödəyən funksiyaların f_k Furye əmsalları üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur ($\mu_k\ge 1$):*

$$|f_k|\le const\mu_k^{-1}\left\{\left[C_1(f)\mu_k^{\alpha-2m+1}+\sum_{Im\omega_j<0}\left|\int_0^1\overline{f'(t)}\exp(-i\omega_j\mu_k t)dt\right|+\right.\right.$$
$$+\sum_{Im\omega_j>0}\left|\int_0^1\overline{f'(1-t)}\exp(i\omega_j\mu_k t)dt\right|+\mu_k^{-1}\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\times$$
$$\left.\left.\times\sum_{l=2}^{2m}\mu_k^{2-l}\|P_l\|_1\right]\|u_k\|_\infty+\sum_{j=1}^{2}\left|\int_0^1\overline{f'(t)}exp(-i\omega_j\mu_k t)dt\right|\right\} \qquad (8)$$

Qeyd edək ki, N.İ.Lajetiçin işində ikinöqtəli öz-özünə qoşma sərhəd şərtli (sərhəd şərtlərinin əmsalları həqiqi olduqda) $Lu=-u''+q(x)u,\ x\in G=(0,1),\ q(x)\in L_1(G)$ Şturm-Liuvilli operatorunun doğurduğu məxsusi funksiyalar üzrə $f(x)\in W_p^1(G),\ 1<p\le 2,$ sinfindən olan, $f(0)=f(1)=0$ şərtini ödəyən funksiyaların ortoqonal ayrılışının $\overline{G}$ –də mütləq və müntəzəm yığılması isbat olunub və müntəzəm yığılma sürəti üçün $o(\nu^{\frac{1}{p}-1}),\nu\to\infty,$ qiymətləndirməsi alınıb. Burada ν funksiyasının spektral ayrılışının xüsusi cəminin tərtibidir. Əlavə olaraq $f'(x)\in L_\infty\cap H_1^\alpha(G),\ 0<\alpha\le 1,$ şərti ödəndikdə isə müntəzəm yığılma sürəti üçün $o(\nu^{-\frac{1}{2}})+O(\nu^{-\alpha}),\ \nu\to\infty,$ qiymətləndirməsi alınmışdır.

V.M.Qurbanov və R.A.Səfərovun işlərində (sərhəd şərtsiz, xüsusi halda sərhəd şərtlərinin əmsalları kompleks ola bilər) $q(x)\in L_1(G)$ həqiqi potensia L operatoruna baxılıb. $f(x)\in W_p^1(G),\ p\geq 1,$ sinfindən olan, $f(0)=f(1)=0$ şərtini ödəyən funksiyalar üçün p>1 olduqda alınan qiymətləndirmələr Nəticə 4. və Nəticə 5. ilə üst-üstə düşür.

Paraqraf 1.3–də $W_1^1(G)$ sinfindən olan funksiyaların L diferensial operatorunun məxsusi funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışının $\overline{G}=[0,1]$ parçasında mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb, müntəzəm yığılma sürəti qiymətləndirilib. Qeyd edək ki, burada $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ məxsusi funksiyalar sisteminin müntəzəm məhdudluğu tələb edilmir.

Teorem 3. *Fərz edək ki, $W_1^1(G)$ sinfindən olan $f(x)$ funksiyası üçün (4) şərti və (2) bərabərsizliyi ödənir. Onda $f(x)$ funksiyasının $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı $\overline{G}$ mütləq və müntəzəm yığılır və*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]}\leq const\left\{C_1(f)\nu^{\alpha-2m+1}+\sum_{n=[\nu]}^{\infty}n^{-1}\omega_1\left(f',n^{-1}\right)+\omega_1\left(f',\nu^{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\nu^{-1}\left\|f'\right\|_1+\nu^{-1}\left(\left\|f\right\|_\infty+\left\|f'\right\|_1\right)\sum_{l=2}^{2m}\nu^{2-l}\left\|P_l\right\|_1\right\},\tag{9}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $\nu\geq\nu_0,\ \nu_0=4\pi\left(\min\limits_{\mathrm{Re}\,\omega_j\neq 0}\mathrm{Re}\,\omega_j\right)^{-1}$, $\omega_1(\cdot,\delta)-L_1(G)-$ *də kəsilməzlik moduludur, const sabiti f(x) funksiyasından asılı deyil.*

Nəticə 6. *Əgər teorem 3–də $f(x)\in W_1^1(G)$ funksiyası $f(0)=f(1)=0$ münasibətini ödəyərsə, onda (4)–şərti ödənir ($C(f)=0$ ilə) və bu funksiyanın $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı $\overline{G}$–də mütləq və müntəzəm yığılır və müntəzəm yığılma sürəti üçün*

$$\left\| R_\nu(\cdot, f)\right\|_{C[0,1]} \le const \left\{ \sum_{n=[\nu]}^{\infty} n^{-1}\omega_1\left(f', n^{-1}\right) + \nu^{-1}\left\| f'\right\|_1 \left(1 + \sum_{l=2}^{2m} \nu^{2-l}\left\| P_l\right\|_1\right)\right\},$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Nəticə 7. *Əgər teorem 3–də* $f(x) \in W_1^1(G)$ *funksiyası* $f(0) = f(1) = 0$ *münasibətini ödəyərsə və əlavə olaraq* $f'(x) \in H_1^\beta(G),\ 0 < \beta < 1$ *(*$H_1^\beta(G)$*–Nikolski sinfidir) olarsa, onda (4), (2) şərtləri ödənilir və bu funksiyanın* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}$ *-də mütləq və müntəzəm yığılır və müntəzəm yığılma sürəti üçün*

$$\left\| R_\nu(\cdot, f)\right\|_{C[0,1]} \le const\ \ \nu^{-\gamma}\left\| f'\right\|_1^\gamma,\quad \nu \ge \nu_0, \tag{10}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $\left\| f'\right\|_1^\gamma = \left\| f'\right\|_1 + \sup\limits_{\delta>0}\dfrac{\omega_1(f',\delta)}{\delta^\gamma}$ *, const sabiti f(x) funksiyasından asılı deyil.*

Nəticə 8. *Əgər teorem 3–də* $f(x) \in W_1^1(G)$ *funksiyası* $f(0) = f(1) = 0$ *münasibətini ödəyərsə və* $\omega_1(f',\delta) = O\left(\ln^{-(1+\gamma)}\delta^{-1}\right)$, $\delta \to +0,\ \gamma > 0,$ *olarsa, onda (4), (2) şərtləri ödənili və onun* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı* $\overline{G}$ *-də mütləq və müntəzəm yığılır və müntəzəm yığılma sürəti üçün*

$$\max_{x\in G}\left| f(x) - \sigma_\nu(x, f)\right| = O\left(\ln^{-\gamma}\nu\right),\qquad \nu \to +\infty. \tag{11}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Yuxarı da qeyd olunan nəticələrin isbatları aşağıdakı lemmalara əsaslanır.

Lemma 2. $f(x) \in W_1^1(G)$ *sinfindən olan və (4) şərtini ödəyən funksiyaların* f_k *Furye əmsalları üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur* $\mu_k \ge \nu_0$*:*

$$| f_k | \le const\left\{ C_1(f)\mu_k^{\alpha-2m} + \mu_k^{-1}\omega_1(f', \mu_k^{-1}) + \mu_k^{-2}\left\| f'\right\|_1 + \right.$$

$$+\mu_k^{-2}\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\sum_{l=2}^{2m}\mu_k^{2-l}\|P_l\|_1\Big\}\|u_k\|_\infty . \qquad (12)$$

Lemma 3. *Fərz edək ki, $f(x)\in W_1^1(G)$ sinfindən olan funksiyalar üçün (2) şərti ödənir. Onda*

$$\sum_{\mu_k\ge\mu}\mu_k^{-1}\omega_1(f',\mu_k^{-1})\|u_k\|_\infty^2\le C_4\left(\sum_{n=[\mu]}^{\infty}n^{-1}\omega_1(f',n^{-1})+\omega_1(f',\mu^{-1})\right), \qquad (13)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $\mu_k\ge 2$; C_4 — sabiti μ və f(x) funsiyasından asılı deyil.

Növbəti paraqrafda isə 1.1—1.3 paraqraflarında alınmış nəticələr konkret diferensial operatorlara tətbiq edilib.

Paraqraf 1.5—də G=(0,1) intervalında təyin olunmuş dördüncü tərtib diferensial operatoruna baxılıb. $W_p^1(G),\, p\ge 1,\, G=(0,1),$ sinfindən olan funksiyaların operatorun doğurduğu məxsusi funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışı ilə triqonometrik Furye ayrılışının ixtiyari $K\subset G$ kompaktda müntəzəm birgəyığılması (eyniyığılması) araşdırılıb, müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürəti qiymətləndirilib.

G=(0,1) intervalında təyin olunmuş, həqiqi əmsallı

$$Lu=u^{(4)}+P_2(x)u^{(2)}+P_3(x)u^{(1)}+P_4(x)u$$

adi diferensial operatoruna baxaq. *Burada* $P_i(x)\in L_1(G),\, i=\overline{2,4}.$

Tutaq ki, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – L operatorunun L_2 —də məxsusi funksiyalarından təşkil olunmuş tam ortonormal sistemdir , $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$— isə uyğun məxsusi ədədlər sistemidir və $\lambda_k\le 0$ bərabərsizliyini ödənir. $f(x)\in W_1^1(G)$ funksiyasının $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə ortoqonal ayrılışının xüsusi cəmini daxil edək:

$$\sigma_\nu(x,f)=\sum_{\mu_k\le\nu}f_k u_k(x),\quad \nu>2,\quad \mu_k=\sqrt[4]{-\lambda_k}$$

$\Delta_\nu(x, f) = \sigma_\nu(x, f) - S_\nu(x, f)$, işarələməsi daxil edək, burada $S_\nu(x, f)$, $\nu > 0$, *f(x)* funksiyasının triqonometrik Furye sırasına ayrılışının xüsusi cəmidir.

$$S_\nu(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0<2\pi k\le\nu} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx),$$

$$a_k = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kx dx,\ k = 0,1,2,...;\quad b_k = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx dx,\ k = 1,2,...$$

$\max\limits_{x\in K}\left|\Delta_\nu(x, f)\right| \to 0$, $\nu \to \infty$, münasibəti ödəndikdə deyəcəyik ki, $f(x)$ funksiyasının $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı ilə triqonometrik Furye sırası ixtiyari $K \subset G$ kompaktda müntəzəm birgəyığılır (eyniyığılır).

Bu paraqrafda birgəyığılma məsələsi üçün alınan nəticələr aşağıdakı teoremlərdə cəmləşirlər.

Teorem 5. *Fərz edək ki,* $f(x) \in W_p^1(G), p > 1,$ *funksiyası və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üçün*

$$\left| f(x)\overline{u_k^{(3)}(x)}|_0^1 \right| \le C_1(f)\mu_k^{\alpha}\left\|u_k\right\|_\infty,\quad 0 \le \alpha < 3,\quad \mu_k \ge 1 \quad (14)$$

qiymətləndirməsi ödənir.

Onda $f(x)$ *funksiyasının* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı ilə triqonometrik Furye ayrılışı ixtiyari* $K \subset G$ *kompaktda müntəzəm birgəyığılır və müntəzəm birgəyığılma sürəti üçün*

$$\max_{x\in K}\left|\Delta_\nu(x, f)\right| = O(\nu^{\beta-1}),\ \nu \to +\infty, \quad (15)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi müntəzəm məhdud olduqda* $\beta = 0$ *; əks halda isə* $\beta = 1/2$ *– dir.*

Teorem 6. *Fərz edək ki,* $f(x) \in W_1^1(G)$ *funksiyası və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üçün (14) və (2) şərtləri ödənir.*

Onda $f(x)$ *funksiyasının* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə ortoqonal ayrılışı ilə triqonometrik Furye ayrılışı ixtiyari* $K \subset G$ *kompaktda* *müntəzəm birgəyığılır və müntəzəm birgəyığılma sürəti üçün (15) qiymətləndirməsi doğrudur.*

Teorem 5 və Teorem 6–nın isbatı $u_k(x)$ məxsusi funksiyaları üçün orta qiymət düsturlarına və *m=2* olduqda $f(x)\in W_1^1(G)$ sinfindən olan funksiyaların f_k Furye əmsalları üçün (9), (12) qiymətləndirmələrinə əsaslanır.

Dissertasiyanın II fəslində *G=(0,1)*intervalında təyin olunmuş cüt tərtibli adi diferensial operatoruna baxılır. $W_2^1(G)$ sinfindən olan funksiyaların baxılan operatorun doğurduğu məxsusi və qoşulmuş funksiyaları üzrə biortoqonal ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb, müntəzəm yığılma sürəti qiymətləndirilib. Bundan əlavə L operatoruna uyğun məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemi üzrə $L_p(G),\ p\geq 1,$ fəzalarından olan funksiyaların biortoqonal ayrılışı ilə triqonometrik Furye sırasının kompaktda müntəzəm birgəyığılması məsələsi araşdırılıb və *P₂(x)*– əmsalının kəsilməzlik modulunun müntəzəm birgəyığılma sürətinə təsiri araşdırılır.

Paraqraf 2.1 – də əmsalları kompleksqiymətli funksiyalar olan

$$Lu = u^{(2m)} + P_2(x)u^{(2m-2)} + P_3(x)u^{(2m-3)} + \ldots + P_{2m}(x)u$$

adi diferensial operatoruna baxılır. Burada $P_l(x)\in W_1^{2m-l}(G), l=\overline{2,2m}.$

$W_2^1(G)$ sinfindən olan *f(0)=f(1)=0* münasibətini ödəyən funksiyaların baxılan operatorun doğurduğu məxsusi və qoşulmuş funksiyalar üzrə biortoqonal ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması araşdırılıb, $\overline{G}=[0,1]$ parçasında müntəzəm yığılması sürəti qiymətləndirilib.

L operatorunun məxsusi və qoşulmuş funksiyalarından təşkil olunmuş ixtiyari $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə baxaq və $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ uyğun məxsusi ədədlər sistemi olsun. Tələb edək ki, bu sistemə daxil olan $r\geq 1$ tərtibli qoşulmuş funksiya ilə yanaşı ona uyğun r –dən kiçik tərtibli bütün qoşulmuş funksiyalar da daxildir və məxsusi funksiyaların ranqı müntəzəm məhduddur. Bu o deməkdir ki, $u_k(x) \in D_{2m}(G)$ və $G-$ də sanki hər yerdə

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1},$$

tənliyini ödəyir. Burada θ_k ya 0 (bu halda $u_k(x)$ — məxsusi funksiya olur) ya da 1 (bu halda $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ olunduğu tələb olunur və $u_k(x)$ qoşulmuş funksiya olur) qiymətini alır.

$\mu_k = \left[(-1)^{m+1}\lambda_k\right]^{\frac{1}{2m}}$ spektral parametrini daxil edək. Burada $(\rho e^{i\varphi})^{\frac{1}{2m}} = \rho^{\frac{1}{2m}} e^{\frac{i\varphi}{2m}}, \ -\pi < \varphi \le \pi, \ \operatorname{Re}\mu_k \ge 0.$

L operatoruna formal qoşma operatoru L^* işarə edək, yəni

$$L^* y = (-1)^{2m} y^{(2m)}(x) + (-1)^{2m-2}\overline{P_2}(x) y^{(2m-2)} + ... + \overline{P_{2m}}(x) y.$$

L operatorunun $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ məxsusi və qoşulmuş sisteminin A şərtlərini ödəməsi tələb olunur:

1) $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $L_2(G)$-də tam və minimaldır;

2) Karleman və «birlərin cəmi» şərtləri ödənir

$$\left|\operatorname{Im}\mu_k\right| \le const, \ \ k = 1,2..., \tag{16}$$

$$\sum_{\tau \le \rho_k \le \tau+1} 1 \le const, \quad \forall \tau \ge 0, \ \rho_k = \operatorname{Re}\mu_k; \tag{17}$$

3) $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə biortoqoal qoşma $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi L^* formal qoşma operatorunun məxsusi və qoşulmuş funksiyalarından təşkil olunub, yəni

$$L^*\upsilon_k + \overline{\lambda_k} u_k = \theta_{k+1} u_{k+1};$$

4) Aşağıdakı antiaprior qiymətləndirmələr ödənir

$$\theta_k \left\|u_{k-1}\right\|_2 \le const\left(1+\left|\mu_k\right|\right)^{2m-1}\left\|u_k\right\|_2, \tag{18}$$

$$\theta_{k+1}\left\|\upsilon_{k+1}\right\|_2 \le const\left(1+\left|\mu_k\right|\right)^{2m-1}\left\|\upsilon_k\right\|_2; \tag{19}$$

5) Elə C_0 sabiti var ki,

$$\left\|u_k\right\|_2 \left\|\upsilon_k\right\|_2 \le C_0; \tag{20}$$

6) İxtiyari müsbət $\tau \geq 0$ üçün aşağıdakı qiymətləndirmə ödənir

$$\sum_{0\leq \rho_k \leq \tau} \|u_k\|_\infty^2 \|u_k\|_2^{-2} \leq const\ (1+\tau), \tag{21}$$

$$\sum_{0\leq \rho_k \leq \tau} \|\upsilon_k\|_\infty^2 \|\upsilon_k\|_2^{-2} \leq const\ (1+\tau); \tag{22}$$

$f(x) \in W_2^1(G)$ funksiyanın $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə biortoqonal ayrılışının xüsusi cəmini daxil edək

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{\rho_k \leq \nu} f_k\, u_k(x),\ \nu > 0, \qquad f_k = (f, \upsilon_k) = \int_0^1 f(x)\overline{\upsilon_k(x)}dx.$$

Bu paraqrafın əsas nəticəsi aşağıdakı biortoqonal ayrılışın mütləq və müntəzəm yığılması haqqında teoremdə cəmləşir.

Teorem 7. *Fərz edək ki, A şərtləri ödənir və $f(x) \in W_2^1(G)$ funksiyası f(0)=f(1)=0 şərtini ödəyir.*

Onda $f(x)$ funksiyasının $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə biortoqonal ayrılışı $\overline{G} = [0,1]$ parçasında mütləq və müntəzəm yığılır, müntəzəm yığılması sürəti üçün

$$\|\sigma_\nu(\cdot, f) - f\|_{C[0,1]} \leq const\left\{\nu^{-\frac{1}{2}}\|f'\|_2 + \sum_{l=2}^{2m-1} \nu^{\frac{1}{2}-l}\|q_l f\|_2 + \nu^{1-2m}\|q_{2m} f\|_1\right\}, \nu \geq 2 \tag{23}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada

$q_l(x) = -\sum_{s=0}^{l-2}(-1)^{2m-l+s} C_{2m-l+s}^{s}\, P_{l-s}^{(s)}(x), \quad l = \overline{2, 2m},$ *və const sabiti f(x) funksiyasından asılı deyil.*

Nəticə 9. *Fərz edək ki, A şərtləri ödənir. Onda $f(x) \in W_2^1(G)$ və f(0)=f(1)=0 şərtini ödəyən f(x) funksiyasının biortoqonal ayrılışı $\overline{G} = [0,1]$ parçasında mütləq və müntəzəm yığılır, müntəzəm yığılması sürəti üçün*

$$\|\sigma_\nu(\cdot, f) - f\|_{C[0,1]} \leq const\, \nu^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{W_2^1(G)}, \qquad \nu \geq 2, \tag{24}$$

$$\|\sigma_\nu(\cdot, f) - f\|_{C[0,1]} = o(\nu^{-\frac{1}{2}}), \qquad \nu \to +\infty, \tag{25}$$

qiymətləndirmələri doğrudur. Burada const sabiti f(x) funksiyasından asılı deyil və «o» simvolu isə f(x) funksiyasından asılıdır.

Paraqraf 2.2 - də cüt tərtibli adi diferensial operatora uyğun kök funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışın triqonometrik Furye sıra ilə müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) məsələləri tədqiq olunur. Operatordakı $(2m-2)-$ ci tərtib törəmənin əmsalının kəsilməzlik modulunun müntəzəm birgəyığılma sürətinə təsiri araşdırılır. Tədqiqat V.A.İlin metodu ilə aparılır.

Kompaktda müntəzəm birgəyığılma məsələləri V.A.İlin, V.M.Qurbanov tərəfindən ixtiyari tərtib diferensial operator üçün hərtərəfli tədqiq edilmişdir. Diferensial operatorun əmsallarının cəmlənmə dərəcəsinin birgəyığılma sürətinə təsiri V.M.Qurbanov və İ.S.Lomovun işlərində tədqiq edilmişdir. Qeyd edək ki, V.M.Qurbanov tərəfindən ayrılışı öyrənilən funksiyanın inteqral modul kəsilməzlikləri terminində müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) üçün qiymətləndirmələr alınmışdır.

Müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürətinin birölçülü Şredinger operatoru üçün potensial kəsilməzlik modulundan asılılığı V.M.Qurbanov və R.A.Səfərov, V.M.Qurbanov və A.T.Qarayevanın işlərində tədqiq edilmişdir.

Bu paraqrafda yuxarıda qeyd olunan nəticələr ixtiyari cüt tərtibli diferensial operatorlar halına genişləndirilir.

$G=(0,1)$ intervalında təyin olunmuş, əmsalları kompleks-qiymətli, cəmlənən funksiyalar L operatoruna baxaq, burada $P_l(x)\in L_1(G)$, $l=\overline{2,2m}$. Fərz edək ki, L operatorunun məxsusi və qoşulmuş funksiyalarından təşkil olunmuş $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi A_p (V.A.İlin şərtləri) şərtlərini ödəyir:

1) $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi müəyyən qeyd olunmuş $p\geq 1$ üçün $L_p(G)$ -də qapalı və minimaldır;

2) Karleman və «birlərin cəmi» şərtləri ödənir

$$\left|\operatorname{Im}\mu_k\right|\leq const,\ k=1,2,...,$$

$$\sum_{\tau \le \operatorname{Re}\mu_k \le \tau+1} 1 \le const\ , \quad \forall \tau \ge 0.$$

3) İxtiyari $K \subset G$ kompaktı üçün elə $C_0(K)$ sabiti var ki,

$$\|u_k\|_{p,K} \|\upsilon_k\|_q \le C_0(K), \quad k = 1,2,..$$

qiymətləndirməsi ödənir. Burada $p^{-1} + q^{-1} = 1,\ (p = 1,\ q = \infty)$, $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ —nın biortoqonal qoşma sistemidir. $\|\cdot\|_{p,K} = \|\cdot\|_{L_p(K)}$, $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L_q(G)}$.

Növbəti işarələmələri daxil edək.

$$\Delta_\nu(K, f) = \|\sigma_\nu(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f)\|_{C(K)};$$

$$\Omega\left(f, \frac{\nu}{2}, \varepsilon\right) = \nu^{-1} \sum_{1 \le \rho_k \le \frac{\nu}{2}} \left|\hat{f}_k\right| \rho_k^{-\varepsilon}, \quad \hat{f}_k = f_k \|\vartheta_k\|_q^{-1}, \quad 0 \le \varepsilon \le 1$$

$$\Phi_p(f, \nu) = \nu^{-1}\|f\|_p + \max_{\rho_k \ge \frac{\nu}{2}} \left|\hat{f}_k\right|; \quad Q_p(f, \nu) = \nu^{-1}\|f\|_p + \max_{2\pi k \ge \frac{\nu}{2}} \left|\tilde{f}_k\right|$$

Burada $\tilde{f}_k$ — $f(x)$ funksiyasının $L_q(G)$ – də normallaşmış triqonometrik sistem üzrə Furye əmsallarıdır;

$$D(\nu) = \inf_{\substack{\alpha > 1 \\ n \ge 2}} \left\{\Omega\left(f, \frac{\nu}{2}, 0\right)\omega_1(P_2, n^{-1}) + n^{2(1-\alpha^{-1})}\|P_2\|_1 \Omega\left(f, \frac{\nu}{2}, 1-\alpha^{-1}\right)\right\} + \max_{l = 3, 2m} \left\{\|P_l\|_1\right\} \Omega\left(f, \frac{\nu}{2}, 1\right)$$

Burada $\omega_1(f, \delta)$ — $f(x)$ funksiyasının $L_1(G)$ də modul kəsilməzliyidir;

$$\mathrm{T}(f, l, \beta) = \sum_{i=1}^{l} i^{-\beta}\omega_1(f, i^{-1}), \quad \beta \ge 0; \qquad N_1\left(f, \left[\frac{\nu}{2}\right], 1\right) = T\left(f, \left[\frac{\nu}{2}\right], 1\right) + \|f\|_1$$

$$N_p\left(f, \left[\frac{\nu}{2}\right], 1 - s^{-1}\right) = T\left(f, \left[\frac{\nu}{2}\right], 1 - s^{-1}\right) + \frac{s}{s-1}\|f\|_p, \ s > 1;$$

$$\varphi_p(f, \nu) = \omega_1(f, \nu^{-1}) + \nu^{-1}\|f\|_p;$$

$$E(P_2, \nu) = \inf_{\substack{\alpha > 1 \\ n \ge 2}} \left\{ \omega_1(P_2, n^{-1}\left(T\left(f, \left[\frac{\nu}{2}\right], 0\right) + \ln \nu \|f\|_1\right) + \right.$$

$$\left. + \|P_2\|_1 n^{2(1-\alpha^{-1})}\left(T\left(f, \left[\frac{\nu}{2}\right], 1 - \alpha^{-1}\right) + \frac{\alpha}{\alpha - 1}\|f\|_1\right)\right\}$$

burada $\lfloor \nu/2 \rfloor$ $\nu/2$ -nin tam hissəsidir.

Tutaq ki, $\omega(t)$ — $[0,\infty)$ yarımintervalında təyin olunmuş, kəsilməz azalmayan və aşağıdakı şərtləri ödəyən funksiyadır

a) $\omega(0)=0,\ \omega(t)>0,\ t>0$ olduqda; b) $t^{-1}\omega(t)$ artmayandır.

$H_p^{\omega}(G),\ p\ge 1,$ ilə $L_p(G)$ sinfindən olan və $\omega_p(f,\delta)\le C(f)\omega(\delta)$, şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğunu işarə edək, burada $C(f)$ sabiti $f(x)$-dən asılıdır. $H_p^{\omega}(G)$ fəzasında norma aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$\|f\|_p^{\omega}=\|f\|_p+\sup_{\delta>0}\frac{\omega_1(f,\delta)}{\omega(\delta)}.$$

$B_{p,\theta}^{\alpha}(G),\ 0<\alpha<1,\ 1\le\theta\le\infty,$ – Besov funksiyalar sinfini işarə edək. Bu fəzada norma

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\alpha}(G)}=\|f\|_p+\left(\int_0^{h_0}\left(t^{-\alpha-\frac{1}{\theta}}\omega_p(f,t)\right)^{\theta}dt\right)^{\frac{1}{\theta}},\ h_0>0.$$

münasibəti ilə təyin edilir.

Qeyd edək ki, $B_{p,\infty}^{\alpha}(G)\equiv H_p^{\alpha}(G);$ $\omega(t)=t^{\alpha},\ 0<\alpha<1$ olduqda isə $H_p^{\omega}(G)=H_p^{\alpha}(G)$ ($H_p^{\alpha}(G)$-Nikolski sinfidir).

Teorem 8. *Fərz edək ki,* $P_2(x)\in L_r(G),\ r\ge 1,\ P_l(x)\in L_1(G),$ $l=\overline{3,2m}$ *və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi* A_p *şərtlərini ödənir.*

Onda ixtiyari $f(x)\in L_p(G)$ *funksiyasının* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə biortoqonal ayrılışı ilə triqonometrik Furye ayrılışı ixtiyari* $K\subset G$ *kompaktında müntəzəm birgəyığılırlar (eyniyığılırlar), yəni*

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Delta_\nu(K,f)=0 \qquad (26)$$

və $r>1$ *olduqda*

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_1(K)\left\{\|P_2\|_r\,\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},1-r^{-1}\right)+\right.$$
$$\left.+\max_{l=\overline{3,2m}}\left\{\|P_l\|_1\right\}\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},1\right)+\Phi_p(f,\nu)+Q_p(f,\nu)\right\} \qquad (27)$$

r=1 olduqda isə

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_2(K)\left\{D(\nu)+\Phi_p\left(f,\nu\right)+Q_p\left(f,\nu\right)\right\} \qquad (28)$$

qiymətləndirmələri doğrudur. Burada $C_1(K)$, $C_2(K)$ — ν və $f(x)$ — dən asılı olmayan müsbət sabitlərdir.

Teorem 9. *Fərz edək ki, teorem 8 — in şərtləri p=1 olduqda ödənir və $f(x)\in L_1(G)$ funksiyasının $\hat{f}_k$ əmsalları üçün aşağıdakı qiymətləndirmə ödənir*

$$\left|\hat{f}_k\right|\le const\left\{\omega_1(f,\rho_k^{-1})+\rho_k^{-1}\|f\|_1\right\},\ \rho_k\ge 1. \qquad (29)$$

Onda $r>1$ olduqda

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_3(K)\nu^{-1}\left\{\|P_2\|_r N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],\ 1-r^{-1}\right)+\right.$$
$$\left.+\max_{\overline{l=3,2m}}\left\{\|P_l\|\right\}_1\times N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],\ 1\right)+\nu\varphi_1\left(f,\nu\right)\right\}, \qquad (30)$$

$r=1$ olduqda isə

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_4(K)\nu^{-1}\left\{E\left(P_2,\nu\right)+\max_{\overline{l=3,2m}}\left\{\|P_l\|\right\}_1 N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],\ 1\right)+\nu\varphi_1\left(f,\nu\right)\right\}, \qquad (31)$$

qiymətləndirmələri doğrudur. Burada $C_1(K)$, $C_2(K)$ — ν və $f(x)$ — dən asılı olmayan sabitlərdir.

Teorem 9 — dan aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 10. *Teorem 9 — un şərtləri daxilində aşağıdakı qiymətləndirmələri doğrudur:*

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_5(K)\nu^{-\alpha}\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)}\quad r=1,\ \text{olduqda}\ f\in B^\alpha_{p,\theta}(G); \qquad (32)$$

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_6(K)\omega\left(\nu^{-1}\right)\begin{cases}\|f\|_p^\omega & ;\quad r>1\quad \text{olduqda,}\\ (1+R(\nu))\|f\|_p^\omega & ;\quad r=1\quad \text{olduqda.}\end{cases}\qquad f(x)\in H_p^\omega(G) \qquad (33)$$

burada $R(\nu)=\inf\limits_{n\ge 2}\left\{\omega_1(P_2,n^{-1})\ln\nu+\|P_2\|_1\ln n\right\}+\max\limits_{\overline{l=3,2m}}\left\{\|P_l\|\right\}_1.$

Nəticə 11. *Teorem 9–un şərtləri ödəndikdə* $f(x)\in H_p^{\omega}(G)$ *funksiyaları üçün* $r=1$ *halında aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur,*

$$\Delta_\nu(K,f)=O\left(\omega\left(\nu^{-1}\right)\ln\nu\right),\quad \nu\to\infty; \qquad (34)$$

əgər əlavə olaraq $\omega_1(P_2,\delta)=O(\ln^{-\gamma}\delta^{-1})$, $\delta\to+0$, $\gamma>0$, *olarsa, onda*

$$\Delta_\nu(K,f)=O\left(\omega\left(\nu^{-1}\right)\ln^{\frac{1}{1+\gamma}}\nu\right)B(\gamma),\quad \nu\to+\infty \qquad (35)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $B(\gamma)=2^{\gamma}\gamma^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}+2\gamma^{\frac{1}{1+\gamma}}$, *«O» simvolu f–dən asılıdır. Xüsusi halda* $\gamma=1$, $p=1$, $f(x)\in W_1^1(G)$ *olarsa*

$$\Delta_\nu(K,f)=O\left(\nu^{-1}\ln^{\frac{1}{2}}\nu\right),\quad \nu\to+\infty \qquad (36)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Sonda məsələlərin qoyuluşuna, dəyərli məsləhətlərinə və müntəzəm diqqətinə görə elmi rəhbərim professor V.M.Qurbanova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

- İxtiyari cüt tərtibli cəmlənən əmsallı adi diferensial operatorun məxsusi funksiyaları üzrə ortoqonal ayrılışın mütləq yığılmasının və müntəzəm yığılma sürətinin tədqiqinin nəticələri.
- Cüt tərtibli hamar əmsallı adi diferensial operatorun kök funksiyaları üzrə $W_2^1(G)$ sinfindən olan funksiyaların biortoqonal ayrılışlarının mütləq və müntəzəm yığılmasının tədqiqinin nəticələri.
- *(2m-2)-ci* tərtib törəmənin əmsalının inteqral kəsilməzlik modulunun biortoqonal ayrılış ilə adi triqonometrik Furye sırasının müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürətinə təsirinin tədqiqinin nəticələri
- Sobolev, Nikolski, Besov funksional fəzalarından olan funksiyalar üçün kompaktda müntəzəm birgəyığılma (eyniyığılma) sürətinin tədqiqinin nəticələri.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1.Годжаева (Мехдизаде), Х.Р. О скорости равномерной равносходимости разложения по собственным функциям дифференциального четного порядка. //Актуальные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции посвященной 55-летно Института Математики и Механики, -Bakı: -2014. - с.250-251.

2.Годжаева (Мехдизаде), Х.Р. Сходимости спектрального разложения функции из класса $W_1^1(G)$ по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. // Известия Педагогического Университета, -Bakı: -2015. №2, -с. 35-38.

3.Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. On convergence of spectral expansion in eigen functions of an even order differential operator. // Mathematical Analysis. Differential Equations and their applications. Madea-7. Azerbaijan-Turkey- Ukrainian International conference, -Baku: -2015. -pp.97.

4. Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. İnfluence of summability degree of the expanded function on equiconvergence rate for differential operator even order. // İnternational Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators, Baku: -2016. May 25-27; -pp.66.

5. Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. Convergence of biorthogonal expansion of a function $W_2^1(G)$ in eigen an associated functions of even order ordinary differential operator // Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics. NAS of Azerbaijan, - 2017. v.43, №2, - pp. 252-260.

6.Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. On influence of modulus of continuty of the coefficient $P_2(x)$ on uniform equiconvergence rate for an even order differential operator. // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, -2017. v.XXXVII, №4. -pp77-86.

7.Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения функции из класса $W_1^1(G)$ по собственным функциям дифференциаль-

ного оператора четного порядка. Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq Elmi Konfransın materialları. –Sumqayıt: -2017. -s.71-72.
8.Годжаева, Х.Р. О сходимости биортогонального разложения по собственным и присоединенным функциям дифференциального оператора четного порядка. “Riyaziyyatın və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları, May; 17-18 . -Bakı: -2018. - s.145-146.
9.Годжаева, Х.Р. О скорости равносходимости спектрального разложения с тригонометрическим рядом для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка. // Известия Педагогического Университета, - Bakı: -2019. №1, - с.1-16.
10.Годжаева, Х.Р. О скорости равномерной равносходимости на компакте для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка. // XIII Международная конференция Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики, приуроченная к 55-летию ФМиКН ДГУ,-Махачкала: -2019 г. -с.56-57.
11.Курбанов, В.М., Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. // Дифференциальные уравнения, -2019, т.55, №1, - с.10-24.
12. Kurbanov, V.M., Gojayeva X.R. On equiconvergence rate of spectral expansion in eigen function of even order differential operator with trigonometric series. // Spectral Theory and Its Applications, An International Workshop dedicated to the 80^{th} anniversary of an academician Mirabbas Geogja oglu Gasymov, -Baku: -2019. –pp.101-102.

Dissertasiyanın müdafiəsi 31 may 2021-ci il tarixində saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının nəzdində fəaliyyət göstərən Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər AkademiyasıRiyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyasıyaları Azərbaycan Milli Elmlər AkademiyasıRiyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 26 aprel 2021-ci il tarixdə zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 26.04.2021
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcmi: 80000
Tiraj: 50