АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ $2m-$*го* ПОРЯДКА

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Годжаева Хадиджа Рафаэль кызы**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку – 2021

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор

Вали Магеррам оглы Курбанов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

Мамед Байрамоглы

доктор физико-математических наук, профессор

Назим Бахыш оглы Керимов

кандидат физико-математических наук, доцент

Ширмаил Гасан оглы Багиров

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.–м.н., профессор

________________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Настоящая диссертация посвящена исследованию сходимости спектральных разложений по собственным и присоединенным функциям обыкновенного дифференциального оператора четного порядка.

Изучение вопросов асимптотики собственных значений и сходимости спектральных разложений для различных классов краевых задач начинаются с классических работ Ж.Лиувилля, Ш.Штурма, а более позднее с работ В.А.Стеклова, Я.Д.Тамаркина, Д.Биркгофа, М.Л.Расулова и других авторов.

При построении спектральной теории дифференциальных операторов важную роль играют вопросы о базисности систем корневых функций изучаемого дифференциального оператора, в том или ином пространстве; вопросы об абсолютной и равномерной сходимости спектрального разложения функции из класса, вообще говоря, не совпадающего с областью определения дифференциального оператора; вопросы о равносходимости спектрального разложения произвольной функции из того или иного класса по системе корневых функций изучаемого дифференциального оператора с разложением той же функции в тригонометрический ряд Фурье и т.д.

В течении длительного времени основным объектом изучения были спектральные свойства самосопряженных дифференциальных операторов. Однако, начиная со первой половины двадцатого века возник ряд новых задач математической физики, приводящих к изучению спектральных свойств несамосопряженных дифференциальных операторов. Примером задач такого рода может служить задача Бицадзе-Самарского с нелокальными краевыми условиями для уравнения теплопроводности.

При изучении несамосопряженных задач было замечено, что система собственных функций таких операторов, вообще говоря, не только не образует базиса в классе L_2, но и не является полной в L_2. Поэтому такие системы должны были быть пополнены присоединенными функциями. В этих задачах собственные и присоединенные функции (корневые функции), вообще говоря, не ортогональны в L_2 и ни их замкнутость, ни их минимальность, не влечет за собой их базисности в этом пространстве. Таким образом, исследования не самосопряженных задач потребовали новых подходов.

Факт полноты в L_2 специально построенной системы корневых функций для широкого класса краевых задач установил М.В.Келдыш. Изучение вопроса о полноте для широкого класса краевых задач в дальнейшем был продолжен многими математиками.

Класс усиленно регулярных краевых задач, обеспечивающих базисность Рисса систем корневых функций в L_2 удалось выделить в работах В.П.Михайлова и Г.М.Кесельмана. Блок-базисность (или базисность со скобками) систем корневых функций регулярных краевых задач установлена в работе А.А.Шкаликова.

Первый наибольший из результатов равномерной равносходимости для обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями и достаточными гладкими коэффициентами получен Я.Д.Тамаркиным. Значительно позже М.Стоун получил аналогичный результат для оператора с суммируемыми коэффициентами. А.П. Хромов распространил теорему равносходимости Тамаркина на интегральные операторы, ядра, которых обобщают свойства функции Грина дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями.

В основе выше перечисленных работ лежал резольвентный метод и получение в этих работах равносходимости являются блок–равно сходимостями (равносходимость со скобками).

Одним из методов изучения дифференциальных операторов является-метод разработанный В.А.Ильиным. Им было выявлено, что при наличии бесконечного числа присоединенных функций свойства базисности и равносходимости, в отличие от свойства полноты, существенно зависит от выбора корневых функций, а также не определяется только конкретным видом краевых условий. На эти свойства влияют также значения коэффициентов дифференциального оператора, причем, эти свойства изменяются при каком угодно малом изменении значений коэффициентов в метриках тех классов, которых заданы эти коэффициенты. Следовательно, этой ситуации нельзя сформулировать условия базисности и равносходимости в терминах краевых условий.

В связи с этим, В.А.Ильиным была предложена новая трактовка корневых функций, которые понимаются как регулярные решения соответствующего уравнения со спектральным параметром безотносительно к виду краевых условий. Она позволяет рассматривать произвольные краевые условия (как локальные, так и нелокальные), системы функций, не связанные какими-либо краевыми условиям и, а также некоторые системы, полученные объединением подмножеств корневых функций двух различных краевых задач.

В работах В.А.Ильина рассматривалась систем корневых функций обыкновенного дифференциального оператора и при определенных естественных условиях доказаны теоремы о равномерной равносходимости и базисности на компакте. Дальнейшее изучение этих и других вопросов спектральной теории дифференциальных операторов развивались в работах В.А.Ильина и его последователей В.В.Тихомирова, Ш.А.Алимов, И.Йо, И.С.Ломова, В.И.Каморника, Н.Б.Керимова, В.Д.Будаева, Н.Лажетича, В.М.Курбанова, Л.В.Крицковаи других.

В последнее время интенсивно исследуется зависимость скорости сходимости и равносходимости от различных характеристик и получен ряд важных результатов в работах В.М.Курбанова и А.Т.Гараевой, В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова, И.С.Ломоваи А.С.Маркова. Дифференциальные операторы второго и третьего порядка более основательно исследованы в работах В.М.Курбанова и А.Т.Гараевой, И.С.Ломова, А.Т.Гараевой, А.Т.Гараевой и Э.Б.Ахундовой.

Представляет интерес дальнейшее исследование этих и других вопросов для дифференциальных операторов более высокого порядка методом В.А.Ильина.

Цель и задачи исследования. Исследовать вопросы абсолютной и равномерной сходимости и скорости равномерной равносходимости на компакте спектральных разложений по корневым функциям обыкновенного дифференциального оператора четного порядка.

Методы исследования. В работе применяются методы спектральной теории дифференциальных операторов, теории функционального анализа и теории гармонического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Результаты исследования вопросов об абсолютной сходимости, скорость равномерной сходимости ортогонального разложения по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора произвольного четного порядка с суммируемыми коэффициентами.
- Результаты исследования вопросов об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных разложений функций из класса $W_2^1(G)$ по корневым функциям дифференциального оператора четного порядка с гладкими коэффициентами.
- Результаты исследования влияния интегрального модуля непрерывности коэффициента при *(2m-2)-ой* производной на скорость равномерной равносходимости биортогонального разложения с обычным тригонометрическим рядом Фурье.
- Результаты исследования скорости равномерной равносходимости на компакте для функций из функциональных пространств Соболева, Никольского, Бесова.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие результаты:

- Исследована абсолютная и равномерная сходимость спектрального разложения функции из класса $W_p^1(G)$, $p \geq 1, G = (0,1)$, по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* порядка и оценен остаток этого разложения в метрике $C(\overline{G})$.
- Найдена скорость равномерной равносходимости на компакте спектрального разложения функции из класса $W_1^1(G)$ по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* порядка с тригонометрическим разложением Фурье.

- Доказаны теоремы об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных разложений функций из класса $W_2^1(G)$ по системе корневых функций обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* порядка с гладкими коэффициентами и установлена скорость равномерной сходимости.
- Доказаны теоремы о равномерной равносходимости на компакте с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд произвольной функции из класса $L_p(G), p \geq 1$, по корневым функциям обыкновенного дифференциального опера-тора *2m-го* оператора с суммируемыми коэффициентами. Оценены скорости равномерной равносходимости для функций из различных функциональных классов ($H_p^{\omega}(G)$, $B_{p,\theta}^{\alpha}(G)$ $W_1^1(G)$,).

Теоретическая и практическая ценность исследования. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов; при обосновании методом Фурье решения задач математической физики и в теории аппроксимации функции.

Апробация работы и применение. Основные результаты диссертации докладывались: на Международной конференции посвященной 55-летию Института Математики и Механики (Баку,2014); на Международной конференции Азербайджан-Турция-Украина МАДЕА7 (Баку, 2015); International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators" (Baku, 2016); на Международной Научной Конференции посвященной 55-летию Сумгаитского (Сумгаит, 2017); на Республиканской Научной Конференции "Актуальные проблемы Математики и Механики" (Баку, 2018); An International Workshop Dedicated to the 80th anniversary of an academician Mirabbas Geogja oglu Gasymova "Spectral Theory and its Applications" (Baku,2019); Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компютерных наук (Россия, г. Махачкала, 2019 г.), на семинаре кафедры «Математический анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.А.Алиев) Азербайджанского Государственного Педагогического Университета, на семинаре отдела «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Г.И.Асланов) Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Личный вклад автора. Все выводы и полученные результаты принадлежат лично автору.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы –2137000 знаков (титульная страница – 320 знаков, содержание 2180 знаков, введение – 54000 знаков, первая глава – 110000 знаков, вторая глава – 46000 знаков, заключение – 1200). Список используемой литературы состоит из 88 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Перейдем к краткому изложению основных результатов диссертации.

В первой главе диссертации исследуется сходимость спектральных разложений функций из класса $W_p^1(G), p \geq 1$, $G=(0,1)$ по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора четного порядка с суммируемыми коэффициентами. Устанавливаются достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости, оцениваются скорость равномерной сходимости на $\overline{G}$ этих разложений.

В этой главе так же изучаются вопросы равномерной равносходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четвертого порядка с тригонометрическим рядом. Для функции из классов в

$W_p^1(G), p \geq 1, G=(0,1)$ устанавливается скорость равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$.

В параграфе 1.1 на интервале $G=(0,1)$ рассматривается дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(2m)} + P_2(x)u^{(2m-2)} + P_3(x)u^{(2m-3)} + \ldots + P_{2m}(x)u$$

с вещественными коэффициентами $P_l(x) \in L_1(G)$, $l=\overline{2,2m}$, $m \geq 1$.

Обозначим через $D_{2m}(G)$– класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своим производными до *(2m-1)*-го порядка включительно на отрезке $\overline{G}=[0,1]$.

Под $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$–собственной функцией оператора L отвечающей собственному значению λ будем понимать любую тождественно не равную нулю функцию $y(x) \in D_{2m}(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly + \lambda y = 0$ (см.[14]).

Пусть полная ортонормированная в $L_2(G)$ система, состоящая из собственных функций оператора L, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующая система собственных значений, причем $(-1)^{m+1}\lambda_k \geq 0$.

Через $W_p^1(G)$, $p \geq 1$, обозначим класс абсолютно непрерывных на $\overline{G}$ функций $f(x)$, для которых $f'(x) \in L_p(G)$.

Обозначая, $\mu_k = ((-1)^{m+1}\lambda_k)^{1/2m}$, введем частичную сумму ортогонального разложения функции $f(x) \in W_1^1(G)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x,f) = \sum_{\mu_k \leq \nu} f_k u_k(x), \nu > 0, \text{ где } f_k = (f, u_k) = \int_0^1 f(x)\overline{u_k(x)}dx$$

Главным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена,* $f(x) \in W_1^1(G)$ *и выполняются условия*

$$\left| f(x)\,\overline{u_k^{(2m-1)}(x)}\big|_0^1 \right| \le C(f)\,\mu_k^{\alpha},\;\; 0 \le \alpha < 2m-1,\;\; \mu_k \ge 4\pi \tag{1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}\,\omega_1\left(f', n^{-1}\right) < \infty \tag{2}$$

Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ *по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}=[0,1]$ *и справедлива оценка*

$$\max_{x\in\overline{G}} \left|\sigma_\nu(x,f) - f(x)\right| \le const\;\Big\{\, C(f)\,\nu^{\alpha-2m+1} + \\ + \sum_{n=[\nu]}^{\infty} n^{-1}\omega_1\left(f',n^{-1}\right) + \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_1\right)\nu^{-1}\sum_{l=2}^{2m}\|P_l\|_1\nu^{2-l} + \nu^{-1}\|f'\|_1 \,\Big\} \tag{3}$$

где $\nu \ge 2$, $\omega_1(\cdot,\delta)$ *– модуль непрерывности в* $L_1(G)$, $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r(G)}$, $r \ge 1$, $const$ *не зависит от функции* $f(x)$.

Отметим, что подобные результаты для оператора второго порядка установлены в работах Н.Б.Лажетича, В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова, А.Т.Гараевой а для оператора четвертого порядка данная теорема доказана в работе Я.И.Гусейновой.

Из теоремы 1 следует ряд следствий:

Следствие 1. *Если в теореме 1 функция* $f(x)\in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условию* $f(0)=f(1)=0$, *то условие (1) выполняется заведомо (с константой* $C(f)=0$*) и её спектральные разложение сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $\overline{G}=[0,1]$.

Следствие 2. *Если в теореме 1 функция* $f(x)\in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условиям* $f(0)=f(1)=0$ *и* $f'(x)\in H_1^{\beta}(G)$, $0<\beta<1$, *(* $H_1^{\beta}(G)$*–класс Никольского), то её спектральное разложение сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}=[0,1]$ *и выполняется оценка*

$$\max_{x\in\overline{G}} \left| f(x) - \sigma_\nu(x,f) \right| \le const\;\; \nu^{-\beta}\,\|f'\|_1^{\beta},$$

где $\|f'\|_1^{\beta} = \|f'\|_1 + \sup\limits_{\delta>0}\dfrac{\omega_1(f',\delta)}{\delta^{\beta}}$.

Следствие 3. *Если в теореме 1 функция* $f(x)\in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условиям* $f(0)=f(1)=0$ *и* $\omega_1(f',\delta)=O\left(\ln^{-(1+\gamma)}\delta^{-1}\right)$, $\delta\to+0,\ \gamma>0,$ *то её спектральное разложение сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}=[0,1]$ *и выполняется оценка*

$$\max_{x\in\overline{G}}\left|f(x)-\sigma_\nu(x,f)\right|=O\left(\ln^{-\gamma}\nu\right),\qquad \nu\to+\infty$$

В параграфе 1.2. исследуется сходимость спектральных разложений функций из класса $W_p^1(G),\ p>1,\ G=(0,1)$, по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора L четного порядка с суммируемыми коэффициентами. Найдены достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости, оценена скорость равномерной сходимости на $\overline{G}$ этих разложений.

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *принадлежащая классу* $W_p^1(G)$, $p>1$, *и система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условию*

$$|\,f(x)\overline{u_k^{(2m-1)}(x)}\,|_0^1|\le C_1(f)\mu_k^{\alpha}\|u_k\|_\infty,\ 0\le\alpha<2m-1,\ \mu_k\ge1. \quad (4)$$

Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ *по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}=[0,1]$ *и для остатка* $R_\nu(x,f)=f(x)-\sigma_\nu(x,f)$ *справедлива оценка*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]}\le const\left\{C_1(f)\nu^{\alpha-2m+1}+\nu^{-\beta}\|f'\|_p+\nu^{-1}\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_p\right)\sum_{l=2}^{2m}\nu^{2-l}\|P_l\|_1\right\}(5)$$

где $\nu\ge1$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\beta=min\{2^{-1},q^{-1}\}$, $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L_p(G)}$; *и постоянная* $const$ *не зависит от* $f(x)$.

Следствие 4. *Если в теореме 2 константа* $C_1(f)$ *равна нулю или* $0\le\alpha<2m-1-\beta$, *то справедлива оценка*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]}=o(\nu^{-\beta}),\ \ \nu\to+\infty. \quad (6)$$

Следствие 5. *Если в теореме 2 функция* $f(x)\in W_p^1(G),\ \ p>1$, *удовлетворяет условию* $f(0)=f(1)=0$, *то условие (4) выполняется заведомо и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} \le const\,\nu^{-\beta}\|f'\|_p, \quad \nu \ge 2, \tag{7}$$

Причем const не зависит от $f(x)$, т.е. для функций $f(x) \in W_p^1(G),\ p>1,\ f(0)=f(1)=0$, их спектральное разложение по собственным функциям полуограниченного самосопряженного оператора L сходится на $\overline{G}=[0,1]$ абсолютно и равномерно, и для таких функций имеет место оценка (7).

Для доказательства сформулированных выше результатов необходимо оценить коэффициенты Фурье f_k функции $f(x) \in W_1^1(G)$, удовлетворяющей условию (4).

Обозначим через $\omega_j,\ j=\overline{1,2m}$, различные корни $2m$-й степени из единицы, причем $\omega_1=-\omega_2=1$.

Лемма 1. *Для коэффициентов Фурье f_k функции $f(x) \in W_1^1(G)$, удовлетворяющей условию (4), имеет место оценка ($\mu_k \ge 1$):*

$$| f_k | \le const\,\mu_k^{-1}\Bigg\{\Bigg[C_1(f)\mu_k^{\alpha-2m+1} + \sum_{Im\omega_j<0} \Big|\int_0^1 \overline{f'(t)}\exp(-i\omega_j\mu_k t)dt\Big| +$$

$$+\sum_{Im\omega_j>0} \Big|\int_0^1 \overline{f'(1-t)}\exp(i\omega_j\mu_k t)dt\Big| + \mu_k^{-1}\Big(\|f\|_\infty + \|f'\|_1\Big)\times$$

$$\times\sum_{l=2}^{2m}\mu_k^{2-l}\|P_l\|_1\Bigg]\|u_k\|_\infty + \sum_{j=1}^{2}\Big|\int_0^1 \overline{f'(t)} exp(-i\omega_j\mu_k t)dt\Big|\Bigg\} \tag{8}$$

Отметим, что в работе Н.И.Лажетича, рассматривался оператор Штурма-Лиувилля $Lu=-u''+q(x)u,\ \ x \in G=(0,1)$ с двухточечными самосопряженными краевыми условиями (коэффициенты в краевых условиях действительные) и при условии $q(x) \in L_1(G)$ доказана абсолютная и равномерная сходимость на $\overline{G}$ разложений функций $f(x)$ из класса $f(x) \in W_p^1(G),\ 1<p\le 2,$

$f(0)=f(1)=0$ по ортонормированным собственным функциям данного оператора. Также доказано, что скорость равномерной сходимости имеет порядок $o(\nu^{\frac{1}{p}-1})$, $\nu\to+\infty$, где ν-порядок частичной суммы спектрального разложения функции *f(x.)* При дополнительном условии $f'(x)\in L_\infty\cap H_1^\alpha(G)$, $0<\alpha\le1$, для скорости равномерной сходимости установлен порядок $o(\nu^{-\frac{1}{2}})+O(\nu^{-\alpha})$, $\nu\to\infty$,. В работах В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова рассматривался оператор L с вещественным потенциалом $q(x)\in L_1(G)$, не связанный с конкретными краевыми условиями (в частности допускаются и самосопряженные краевые условия с комплексными коэффициентами). Для функций $f(x)\in W_p^1(G)$, $p\ge1$, удовлет-воряющих условию *f(0)=f(1)=0* получены результаты, совподяющие при *p>1* с утверждениями следствий 4 и 5.

В параграфе 1.3 изучается сходимость разложения функции $f(x)\in W_1^1(G)$ по системе собственных функций того же оператора L, без требовании равномерной ограниченности системы собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $f(x)$ *принадлежит классу* $W_1^1(G)$ *выполняется условие (4) и неравенство (2).*

Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ *по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}$ *и справедлива оценка*

$$\left\|R_\nu(\cdot,f)\right\|_{C[0,1]}\le const\{\,C_1(f)\nu^{\alpha-2m+1}+\sum_{n=[\nu]}^{\infty}n^{-1}\omega_1\left(f',n^{-1}\right)+\omega_1\left(f',\nu^{-1}\right)+$$
$$+\nu^{-1}\|f'\|_1+\nu^{-1}\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\sum_{l=2}^{2m}\nu^{2-l}\|P_l\|_1\},\tag{9}$$

где $\nu\ge\nu_0$, $\nu_0=4\pi\left(\min\limits_{\mathrm{Re}\,\omega_j\ne0}\mathrm{Re}\,\omega_j\right)^{-1}$, $\omega_1(\cdot,\delta)-$ *модуль непрерывности в* $L_1(G)$, *const не зависит от функции f(x) .*

Следствие 6. *Если в теореме 3 функция* $f(x) \in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$*, то условие (4) выполняется заведомо (с константой $C_1(f)=0$) а ее спектральное разложение по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $\overline{G}$ *и справедлива оценка*

$$\left\|R_{\nu}(\cdot, f)\right\|_{C[0,1]} \le const \left\{\sum_{n=[\nu]}^{\infty} n^{-1}\omega_1\left(f', n^{-1}\right) + \nu^{-1}\left\|f'\right\|_1\left(1+\sum_{l=2}^{2m}\nu^{2-l}\left\|P_l\right\|_1\right)\right\},$$

Следствие 7. *Если в теореме 3 функция* $f(x) \in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$ *и* $f'(x) \in H_1^{\gamma}(G)$, $0 < \gamma \le 1$, *(* $H_1^{\gamma}(G)$ *-класс Никольского), то условия (4), (2) заведомо выполняются, а ее спектральное разложение по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на и* $\overline{G}$ *справедлива оценка*

$$\left\|R_{\nu}(\cdot, f)\right\|_{C[0,1]} \le const\, \nu^{-\gamma}\left\|f'\right\|_1^{\gamma}, \quad \nu \ge \nu_0, \tag{10}$$

$\left\|f'\right\|_1^{\gamma} = \left\|f'\right\|_1 + \sup\limits_{\delta>0}\delta^{-\gamma}\omega_1(f', \delta)$ *,const не зависит от функции* $f(x)$.

Следствие 8. *Если в теореме 3 функция* $f(x) \in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$ *и* $\omega_1(f', \delta) = O(ln^{-(1+\gamma)}\delta^{-1})$, $\delta \to +0$, $\gamma > 0$ *то условия (4), (2) заведомо выполняются, а ее спектральное разложение по сис-теме* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G} = [0,1]$. *При этом справедлива оценка*

$$\left\|R_{\nu}(\cdot, f)\right\|_{C[0,1]} = O(\ln^{-\gamma}\nu), \quad \nu \to +\infty. \tag{11}$$

Доказательства выше сформулированных результатов опираются на следующие вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Для коэффициентов Фурье* f_k *функции* $f(x) \in W_1^1(G)$*, удовлетворяющей условию (4), справедлива оценка (* $\mu_k \ge \nu_0$ *)*

$$| f_k | \le const\Big\{ C_1(f)\mu_k^{\alpha-2m} + \mu_k^{-1}\omega_1(f', \mu_k^{-1}) + \mu_k^{-2}\| f'\|_1 +$$
$$+ \mu_k^{-2}\left(\| f\|_\infty + \| f'\|_1\right)\sum_{l=2}^{2m}\mu_k^{2-l}\|P_l\|_1\Big\}\|u_k\|_\infty. \qquad (12)$$

Лемма 3. *Пусть функция* $f(x)\in W_1^1(G)$ *удовлетворяет условию (2). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{\mu_k \ge \mu} \mu_k^{-1}\omega_1(f', \mu_k^{-1})\|u_k\|_\infty^2 \le C_4\left(\sum_{n=[\mu]}^{\infty} n^{-1}\omega_1(f', n^{-1}) + \omega_1(f', \mu^{-1})\right), \qquad (13)$$

где $\mu \ge 2,$ C_4 *положительная постоянная не зависящая от* μ *и функции* $f(x)$.

В следующем параграфе результаты, полученные в параграфах 1.1.-1.3. применяются к некоторым конкретным дифференциальным операторам.

В параграфе 1.5. рассматривается дифференциальный оператор четвертого порядка на интервале $G=(0,1)$. Изучаются вопросы равномерной равносходимости спектрального разложения по собственным функциям данного оператора с тригонометрическим рядом. Для функции из классов $W_p^1(G), p\ge 1,$ установлена скорость равномерной равносходимости на любом компакте $K\subset G$.

Рассмотрим на интервале $G=(0,1)$ формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(4)} + P_2(x)u^{(2)} + P_3(x)u^{(1)} + P_4(x)u$$

с суммируемыми вещественными коэффициентами $P_i(x), i=\overline{2,4}$.

Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – полная ортонормированная в $L_2(G)$ система, состоящая из собственных функций оператора L, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k \le 0$, соответствующая система собственных значений.

Введем частичную сумму спектрального разложения функции $f(x)\in W_1^1(G)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$:

$$\sigma_\nu(x,f)=\sum_{\mu_k\le\nu}^{\infty} f_k u_k(x),\quad \nu>2,\qquad \mu_k=\sqrt[4]{-\lambda_k}$$

Обозначим $\Delta_\nu(x,f)=\sigma_\nu(x,f)-S_\nu(x,f)$, где $S_\nu(x,f),\nu>0,$ частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$S_\nu(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{0<2\pi k\le\nu}(a_k\cos 2\pi kx+b_k\sin 2\pi kx),$$

$$a_k=2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kxdx,\ k=0,1,2,...;\quad b_k=2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kxdx,\ k=1,2,...$$

Если $\max_{x\in K}\left|\Delta_\nu(x,f)\right|\to 0$ при $\nu\to+\infty$, то будем говорить, что разложения функции $f(x)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на компакте $K\subset G$.

Основные результаты данного параграфа сосредоточены в следующих теоремах.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(x)\in W_p^1(G),\ p>1,$ *и система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяют условию*

$$\left| f(x)\overline{u_k^{(3)}(x)}|_0^1\right|\le C_1(f)\mu_k^\alpha\|u_k\|_\infty,\ 0\le\alpha<3,\ \mu_k\ge 1 \qquad (14)$$

Тогда разложение функции $f(x)$ *в ортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K\subset G$ *и справедлива оценка*

$$\max_{x\in K}\left|\Delta_\nu(x,f)\right|=O(\nu^{\beta-1}),\ \nu\to+\infty, \qquad (15)$$

где $\beta=0$, *если система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *равномерна ограничена;* $\beta=\frac{1}{2}$, *если система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *не является равномерной ограниченной.*

Теорема 6. *Пусть* $f(x)\in W_1^1(G)$, *выполняются условия (14) и (2). Тогда разложения функции* $f(x)$ *в ортогональный ряд по* *системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K \subset G$ *и справедлива оценка (15).*

На основе доказательств теорем 5. и 6. лежат формула среднего значения для собственных функций $u_k(x)$ и оценки (9), (12) при *m=2* для коэффициентов Фурье f_k функции $f(x) \in W_1^1(G)$.

Во второй главе диссертации рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка на интервале *G=(0,1).* Исследуются абсолютная и равномерная сходимость на $\overline{G} = [0,1]$ биортогонального разложения функции из класса $W_2^1(G)$ по собственным и присоединенным функциям данного оператора. А также исследуются вопросы равномерной равносходимости на компакте биортогонального разложения функции из класса, $L_p(G)$, $p \geq 1$, с тригонометрическим рядам Фурье. Оценивается скорость равномерной равносходимости на компакте, изучается влияние модуля непрерывности коэффициента $P_2(x)$ на скорость равносходимости.

В параграфе 2.1. данной главы диссертации рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(2m)} + P_2(x)u^{(2m-2)} + P_3(x)u^{(2m-3)} + \ldots + P_{2m}(x)u$$

с комплекснозначными коэффициентами $P_l(x) \in W_1^{2m-l}(G),\, l = \overline{2,2m}.$

Изучается абсолютная и равномерная сходимость биортогонального разложения функции *f(x)* из класса $W_2^1(G)$, удовлетворяющей условию *f(0)=f(1)=0,* по собственным и присоединенным функциям данного оператора и оценивается скорость равномерной сходимости этого разложения на $\overline{G} = [0,1]$.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ состоящую из собственных и присоединенных функций оператора *L*, отвечающую системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и потребуем чтобы вместе с каждой корневой функцией порядка $r \geq 1$ это система содержала также соответствующие ей корневые функции порядка меньше r и ранг собственных функцией был равномерно ограничен. Это означает, $u_k(x) \in D_{2m}(G)$ и удовлетворяет почти всюду в G уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1},$$

где θ_k равно либо 0 (в этом случае $u_k(x)$ -собственная функция), либо 1 (в этом случае требуем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ называем $u_k(x)$ присоединенной функцией). Обозначим через $\mu_k = \left[(-1)^{m+1}\lambda_k\right]^{\frac{1}{2m}}$ где $(\rho e^{i\varphi})^{\frac{1}{2m}} = \rho^{\frac{1}{2m}} e^{\frac{i\varphi}{2m}}$, $-\pi < \varphi \le \pi, \quad Re\,\mu_k \ge 0$.

Через L^* обозначим формально сопряженный оператор к оператору L т.е.

$$L^* y = (-1)^{2m} y^{(2m)}(x) + (-1)^{2m-2}\overline{P_2}(x) y^{(2m-2)} + ... + \overline{P_{2m}}(x) y$$

требовать, что система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям, которые мы будем называть условиями А:

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $L_2(G)$

2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц»

$$\left|\operatorname{Im}\mu_k\right| \le const \ , \quad k = 1,2...... \tag{16}$$

$$\sum_{\tau \le \rho_k \le \tau+1} 1 \ \le const \ , \quad \forall \tau \ge 0, \ \rho_k = Re\,\mu_k \ . \tag{17}$$

3) система $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ биортогонально сопряженная к $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой корневых функций формально сопряженного оператора L^*, т.е.

$$L^*\upsilon_k + \overline{\lambda}_k u_k = \theta_{k+1} u_{k+1}$$

4) выполняются следующие анти-априорные оценки

$$\theta_k \left\|u_{k-1}\right\|_2 \le const \ \left(1 + |\mu_k|\right)^{2m-1} \left\|u_k\right\|_2 \tag{18}$$

$$\theta_{k+1} \left\|\upsilon_{k+1}\right\|_2 \le const \ \left(1 + |\mu_k|\right)^{2m-1} \left\|\upsilon_k\right\|_2 \tag{19}$$

5) существует постоянная C_0 такая, что

$$\|u_k\|_2 \|\upsilon_k\|_2 \le C_0 \tag{20}$$

6) для любого $\tau \ge 0$ выполняются оценки

$$\sum_{0\le\rho_k\le\tau} \|u_k\|_\infty^2 \|u_k\|_2^{-2} \le const\,(1+\tau) \tag{21}$$

$$\sum_{0\le\rho_k\le\tau} \|\upsilon_k\|_\infty^2 \|\upsilon_k\|_2^{-2} \le const\,(1+\tau) \tag{22}$$

Для произвольной функции $f(x) \in W_2^1(G)$ введем частичную сумму ее биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$

$$\sigma_\nu(x,f) = \sum_{\rho_k\le\nu} f_k\, u_k(x),\ \nu>0, \qquad f_k = (f,\upsilon_k) = \int_0^1 f(x)\overline{\upsilon_k(x)}dx.$$

Главным результатом данного параграфа является следующая теорема об абсолютной и равномерной сходимости биортогонального разложения.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия A и функция* $f(x)\in W_2^1(G)$ *удовлетворяет условию* $f(0)=f(1)=0$. *Тогда биортогональное разложение функции* $f(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $\overline{G}=[0,1]$ *и справедлива оценка*

$$\|\sigma_\nu(\cdot,f)-f\|_{C[0,1]} \le const\left\{\nu^{-\frac{1}{2}}\|f'\|_2 + \sum_{l=2}^{2m-1}\nu^{\frac{1}{2}-l}\|q_l f\|_2 + \nu^{1-2m}\|q_{2m} f\|_1\right\}, \nu\ge 2 \tag{23}$$

где $q_l(x) = -\sum_{s=0}^{l-2}(-1)^{2m-l+s} C_{2m-l+s}^s P_{l-s}^{(s)}(x), \quad l=\overline{2,2m},$ *и const не зависит от функции f(x).*

Следствие 9. *Пусть выполняются условия A. Тогда биортогональное разложение функции* $f(x)\in W_2^1(G)$, $f(0)=f(1)=0$ *сходится абсолютно и равномерно и справедливы оценки:*

$$\|\sigma_\nu(\cdot,f)-f\|_{C[0,1]} \le const\,\nu^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{W_2^1(G)}, \qquad \nu\ge 2, \tag{24}$$

$$\|\sigma_\nu(\cdot,f)-f\|_{C[0,1]} = o(\nu^{-\frac{1}{2}}), \qquad \nu\to+\infty, \tag{25}$$

где const не зависит от f(x), символ «o» зависит от функции f(x).

В параграфе 2.2 исследуются вопросы равномерной равносходимости на компакте спектрального разложения по корневым функциям дифференциального оператора четного порядка с тригонометрическим разложением. Выявляется зависимость скорости равномерной равносходимости от модуля непрерывности коэффициента при $(2m-2)-$ой производной в данном операторе. Исследование проводятся методом В.А.Ильина.

Равномерная равносходимость на компакте исчерпывающим образом исследована в работах В.А.Ильина, В.М.Курбанова дифференциального оператора произвольного порядка. Влияние степени суммируемости коэффициентов дифференциального оператора на скорость равносходимости изучались в работах В.М.Курбанова, И.С.Ломова.

Отметим, что в работах В.М.Курбанова установлены оценки равномерной равносходимости в терминах интегральных модулей непрерывности разлагаемых функций.

Зависимость скорости равномерной равносходимости от модулей непрерывности потенциала одномерного оператора Шредингера изучена в работах В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова В.М.Курбанова и А.Т.Гараевой. В данном параграфе мы распространяем эти результаты на случай произвольного дифференциального оператора четного порядка.

Рассмотрим на интервале $G=(0,1)$ оператор L с комплекснозначными коэффициентами $P_l(x)\in L_1(G), l=\overline{2,2m}$, и пусть система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из его корневых функций, удовлетворяет условиям A_p (условия В.А.Ильина):

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L_p(G)$ при фиксированном $p\geq 1$;

2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц»

$$|\operatorname{Im}\mu_k|\leq const,\ k=1,2,...;$$

$$\sum_{\tau\leq \operatorname{Re}\mu_k\leq \tau+1} 1\leq const\ ,\quad \forall\tau\geq 0,$$

3) для любого компакта $K \subset G$ существует постоянная $C_0(K)$ такая, что

$$\|u_k\|_{p,K}\|\vartheta_k\|_q \le C_0(K), \text{ где } p^{-1}+q^{-1}=1, \quad (p=1,\ q=\infty),$$

$\{\vartheta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ биортогонально сопряженная система к системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\|\cdot\|_{p,K}=\|\cdot\|_{L_p(K)}$, $\|\cdot\|_q=\|\cdot\|_{L_q(G)}$.

Вводим следующие обозначения:

$$\Delta_\nu(K,f)=\|\sigma_\nu(\cdot,f)-S_\nu(\cdot,f)\|_{C(K)};$$

$$\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},\varepsilon\right)=\nu^{-1}\sum_{1\le\rho_k\le\frac{\nu}{2}}\left|\hat{f}_k\right|\rho_k^{-\varepsilon}, \quad \hat{f}_k=f_k\|\vartheta_k\|_q^{-1}, \quad 0\le\varepsilon\le 1$$

$$\Phi_p(f,\nu)=\nu^{-1}\|f\|_p+\max_{\rho_k\ge\frac{\nu}{2}}\left|\hat{f}_k\right|; \quad Q_p(f,\nu)=\nu^{-1}\|f\|_p+\max_{2\pi k\ge\frac{\nu}{2}}\left|\tilde{f}_k\right|$$

где $\tilde{f}_k$ -коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по нормированной в $L_q(G)$ тригонометрической системе;

$$D(\nu)=\inf_{\substack{\alpha>1\\ n\ge2}}\left\{\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},0\right)\omega_1(P_2,n^{-1})+n^{2(1-\alpha^{-1})}\|P_2\|_1\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},1-\alpha^{-1}\right)\right\}+\max_{l=\overline{3,2m}}\left\{\|P_l\|_1\right\}\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},1\right)$$

где $\omega_1(f,\delta)$-модуль непрерывности функции $f(x)$ в $L_1(G)$;

$$\mathrm{T}(f,\ell,\beta)=\sum_{i=1}^{\ell}i^{-\beta}\omega_1\left(f,i^{-1}\right), \quad \beta\ge0;$$

$$N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],1\right)=T\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],1\right)+\|f\|_1$$

$$N_p\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],1-s^{-1}\right)=T\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],1-s^{-1}\right)+\frac{s}{s-1}\|f\|_p, \ s>1;$$

$$\varphi_p(f,\nu)=\omega_1\left(f,\nu^{-1}\right)+\nu^{-1}\|f\|_p;$$

$$E(P_2,\nu)=\inf_{\substack{\alpha>1\\ n\geq 2}}\left\{\ \omega_1(P_2,n^{-1}\left(T\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],0\right)+\ln\nu\|f\|_1\right)+\|P_2\|_1 n^{2(1-\alpha^{-1})}\left(T\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],1-\alpha^{-1}\right)+\frac{\alpha}{\alpha-1}\|f\|_1\right)\right\}$$

где $\lfloor \nu/2 \rfloor$ целая часть число $\nu/2$.

Пусть $\omega(t)$ не убывающая, не прерывная функция на $[0,\infty)$ и удовлетворяет условиям

a) $\omega(0)=0,\ \omega(t)>0$ при $t>0$; b) $t^{-1}\omega(t)$ не возрастает.

Через $H_p^{\omega}(G),\ p\geq 1$, обозначим множество функций из $L_p(G)$ удовлетворяющих условию $\omega_p(f,\delta)\leq C(f)\omega(\delta)$, где $C(f)$-постоянная зависящая от $f(x)$. Норма в $H_p^{\omega}(G)$ определяется равенством

$$\|f\|_p^{\omega}=\|f\|_p+\sup_{\delta>0}\frac{\omega_1(f,\delta)}{\omega(\delta)}.$$

А через $B_{p,\theta}^{\alpha}(G),\ 0<\alpha<1,\ 1\leq\theta\leq\infty$, обозначим класс функций Бесова с нормой

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\alpha}(G)}=\|f\|_p+\left(\int_0^{h_0}\left(t^{-\alpha-\frac{1}{\theta}}\omega_p(f,t)\right)^{\theta}dt\right)^{1/\theta},\ h_0>0\cdot$$

Отметим что, $B_{p,\infty}^{\alpha}(G)\equiv H_p^{\alpha}(G);\ H_p^{\omega}(G)=H_p^{\alpha}(G)$ при $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0<\alpha<1$ ($H_p^{\alpha}(G)$-класс функций Никольского).

Теорема 8. *Пусть* $P_2(x)\in L_r(G),\ r\geq 1,\ P_l(x)\in L_1(G)$, $l=\overline{3,2m}$ *и система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* A_p. *Тогда разложения произвольной функции* $f(x)\in L_p(G)$ *в биортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K\subset G$, *т.е.*

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Delta_\nu(K,f)=0\tag{26}$$

и справедливы оценки

$$\Delta_{\nu}(K,f)\le C_1(K)\left\{\|P_2\|_r\,\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},\,1-r^{-1}\right)+\right. \qquad \text{при } r>1; \qquad (27)$$

$$\left.+\max_{l=\overline{3,2m}}\left\{\|P_l\|_1\right\}\Omega\left(f,\frac{\nu}{2},\,1\right)+\Phi_p(f,\nu)+Q_p(f,\nu)\right\}$$

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_2(K)\left\{D(\nu)+\Phi_p(f,\nu)+Q_p(f,\nu)\right\} \qquad \text{при} \quad r=1 \qquad (28)$$

где $C_1(K)$, $C_2(K)$ *положительные постоянные не зависящие от* ν *и* $f(x)$.

Теорема 9. *Пусть выполняются условия теоремы 8 при* $p=1$ *и для коэффициентов* $\hat{f}_k$ *функции* $f(x)\in L_1(G)$ *выполняется оценка*

$$\left|\hat{f}_k\right|\le const\left\{\omega_1(f,\rho_k^{-1})+\rho_k^{-1}\|f\|_1\right\},\ \rho_k\ge 1\ . \qquad (29)$$

Тогда при $r>1$ *справедлива оценка*

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_3(K)\nu^{-1}\left\{\|P_2\|_r\,N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],\,1-r^{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\max_{l=\overline{3,2m}}\left\{\|P_l\|\right\}_1\times N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],\,1\right)+\nu\varphi_1(f,\nu)\right\}, \qquad (30)$$

а при $r=1$ *справедлива оценка*

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_4(K)\nu^{-1}\left\{E(P_2,\nu)+\max_{l=\overline{3,2m}}\left\{\|P_l\|\right\}_1N_1\left(f,\left[\frac{\nu}{2}\right],\,1\right)+\nu\varphi_1(f,\nu)\right\} \qquad (31)$$

где постоянные $C_3(K)$, $C_4(K)$ *не зависят от* ν *и* $f(x)$.

Из теоремы 9 следуют следующие следствия.

Следствие 10. *При условиях теоремы 9 справедливы оценки*

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_5(K)\nu^{-\alpha}\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)}\ \text{при}\ \ r=1,\ f\in B^\alpha_{p,\theta}(G); \qquad (32)$$

$$\Delta_\nu(K,f)\le C_6(K)\omega\left(\nu^{-1}\right)\begin{cases}\|f\|_p^\omega & \text{при } r>1\\ (1+R(\nu))\|f\|_p^\omega & \text{при } r=1,\end{cases} \qquad (33)$$

если $f\in H_p^\omega(G)$, *где* $R(\nu)=\inf\limits_{n\ge 2}\left\{\omega_1(P_2,n^{-1})\ln\nu+\|P_2\|_1\ln n\right\}+\max\limits_{l=\overline{3,2m}}\left\{\|P_l\|\right\}_1.$

Следствие 11. *Пусть* $r = 1$ *и выполняются условия теоремы 9. Тогда для любой функции* $f(x) \in H_p^{\omega}(G)$ *выполняется оценка*

$$\Delta_\nu(K, f) = O\left(\omega\left(\nu^{-1}\right)\ln\nu\right), \quad \nu \to \infty, \tag{34}$$

а если дополнительно требовать, что $\omega_1(P_2, \delta) = O(\ln^{-\gamma}\delta^{-1})$, $\delta \to +0$, $\gamma > 0$, *то при* $\nu \to +\infty$ *выполняется оценка*

$$\Delta_\nu(K, f) = O\left(\omega\left(\nu^{-1}\right)\ln^{\frac{1}{1+\gamma}}\nu\right)B(\gamma), \tag{35}$$

где $B(\gamma) = 2^\gamma \gamma^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}} + 2\gamma^{\frac{1}{1+\gamma}}$, *символ «O» зависит от функции* f. *В частности при* $\gamma = 1$, $p = 1$, $f(x) \in W_1^1(G)$ *справедлива оценка*

$$\Delta_\nu(K, f) = O\left(\nu^{-1}\ln^{\frac{1}{2}}\nu\right), \quad \nu \to +\infty \tag{36}$$

В заключении, выражаю глубокую благодарность научному руководителю профессору В.М.Курбанову за постановку задачи, постоянное внимание и полезные советы к работе.

ВЫВОД

- Исследована абсолютная и равномерная сходимость спектрального разложения функции из $W_p^1(G)$, $p \geq 1$, $G = (0,1)$, по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* порядка и оценен остаток этого разложения в метрике $C(\overline{G})$.
- Найдена скорость равномерной равносходимости на компакте спектрального разложения функции из класса $W_1^1(G)$ по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* порядка с тригонометрическим разложением Фурье.
- Доказаны теоремы об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных разложений функций из класса $W_2^1(G)$ по системе корневых функций обыкновенного диффе-

ренциального оператора *2m-го* порядка с гладкими коэффициентами и установлена скорость равномерной сходимости.

- Доказаны теоремы о равномерной равносходимости на компакте с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд произвольной функции из класса $L_p(G), p \geq 1,$ по корневым функциям обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* оператора с суммируемыми коэффициентами. Оценены скорости равномерной равносходимости для функций из различных функциональных классов ($W_1^1(G)$, $H_p^{\omega}(G)$, $B_{p,\theta}^{\alpha}(G)$).

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1.Годжаева (Мехдизаде), Х.Р. О скорости равномерной равно-сходимости разложения по собственным функциям дифференциального четного порядка. //Актуальные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции посвященной 55-летно Института Математики и Механики, -Bakı: -2014. - с.250-251

2.Годжаева (Мехдизаде), Х.Р. Сходимости спектрального разложения функции из класса $W_1^1(G)$ по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. // Известия Педагогического Университета, -Bakı: -2015. №2, -с. 35-38.

3.Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. On convergence of spectral expansion in eigen functions of an even order differential operator. // Mathematical Analysis. Differential Equations and their applications. Madea-7. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference, -Baku: -2015. -pp.97.

4. Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. İnfluence of summability degree of the expanded function on equiconvergence rate for differential operator even order. // İnternational Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators, Baku: -2016. May 25-27; - pp.66.

5. Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. Convergence of biorthogonal expansion of a function $W_2^1(G)$ in eigen an associated functions of even order ordinary differential operator // Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics. NAS of Azerbaijan, - 2017. v.43, №2, -

pp. 252-260.
6.Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. On influence of modulus of continuty of the coefficient $P_2(x)$ on uniform equiconvergence rate for an even order differential operator. // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, -2017. v.XXXVII, №4. -pp77-86.
7.Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения функции из класса $W_1^1(G)$ по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq Elmi Konfransın materialları. –Sumqayıt: -2017. -s.71-72.
8.Годжаева, Х.Р. О сходимости биортогонального разложения по собственным и присоединенным функциям дифференциального оператора четного порядка. “Riyaziyyatın və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları, May; 17-18 . -Bakı: -2018. - s.145-146.
9.Годжаева, Х.Р. О скорости равносходимости спектрального разложения с тригонометрическим рядом для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка. // Известия Педагогического Университета, - Bakı: -2019. №1, - с.1-16.
10.Годжаева, Х.Р. О скорости равномерной равносходимости на компакте для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка. // XIII Международная конференция Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики, приуроченная к 55-летию ФМиКН ДГУ, - Махачкала: -2019 г. - с.56-57.
11.Курбанов, В.М., Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. // Дифференциальные уравнения, -2019, т.55, №1, - с.10-24.
12. Kurbanov, V.M., Gojayeva X.R. On equiconvergence rate of spectral expansion in eigen function of even order differential operator with trigonometric series.//Spectral Theory and Its Applications, An International Workshop dedicated to the 80^{th} anniversary of an academician Mirabbas Geogja oglu Gasymov,-Baku: -2019.–pp.101-102.

Защита диссертации состоится 31 мая 2021 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 26 апреля 2021 года.

Подписано в печать: 26.04.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 80000
Тираж: 70