

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ SPEKTRAL PARAMETR OLAN DİFFUZIYA OPERATORUNUN BƏRPASI

İxtisas: 1211.01 - Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Çinarə Qahir qızı Tariverdiyeva**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2025

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
İbrahim Mayıl oğlu Nəbiyev

Rəsmi opponentlər:

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
Şakir Şıxı oğlu Yusubov



riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
Elvin İbrahim oğlu Əzizbəyov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Anar Adil oğlu Nəbiyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya
Komissiyasının Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən
ED 2.17 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının
sədri:

AMEA-nın həqiqi üzvü,
f.-r.e.d., professor
Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev

Dissertasiya şurasının
elmi katibi:

Z. Rəhimov

f.-r.e.n., dosent
Zakir Fərman oğlu Xankişiyev

Elmi seminarın
sədri:



İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Dissertasiya işi sərhəd şərtinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan diffuziya operatoru üçün tərs spektral məsələlərin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Spektral analizin tərs məsələsi xətti operatorun müəyyən spektral verilənlərə görə bərpa olunmasından ibarətdir. Belə spektral verilənlər olaraq spektrlər, spektr və normallaşdırıcı ədədlər, spektral funksiya, Veyl funksiyası və s. ola bilər. Tərs məsələlər nəzəriyyəsi mexanikada, fizikada, geofizikada, meteorologiyada və başqa sahələrdə meydana çıxan tətbiqləri səbəbindən intensiv inkişaf etmişdir. Bu nəzəriyyə riyaziyyatın müxtəlif sahələrində, o cümlədən qeyri-xətti tənliklərin inteqrallanmasında xüsusi rol oynayır.

Spektral analizin tərs məsələləri nəzəriyyəsinə həsr olunan çoxlu elmi işlər mövcuddur. Bu nəzəriyyənin müasir vəziyyəti və onun müxtəlif tətbiqləri A.M. Axtyamovun, N.Ş. İsgəndərovun, B.M. Levitanın, V.A. Marçenkonun, J. Poshel və E. Truboviçin V.A. Sadovniçi, Y.T. Sultanayev və A.M. Axtyamovun, V.A.Yurkonun, İ.M. Nəbiyevin, A.X. Xanməmmədovun, monoqrafiyalarında əks olunmuşdur.

Düz və tərs spektral məsələlər nəzəriyyəsinə dair daha çox nəticə

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y$$

Şturm-Liuvill tənliyi üçün alınmışdır. Bu sahədə ilk tədqiqatlar D. Bernulli, Dalamber, Eyler, Liuvill və Şturma aiddir. Bu nəticələr simin rəqslərini təsvir edən tənliklə bağlıdır. l operatoru üçün tərs məsələlər nəzəriyyəsi XX əsrdə intensiv inkişaf etmişdir. İlk nəticə bir xüsusi halda Neyman sərhəd şərtli Şturm-Liuvill operatoru üçün alınmışdır. l operatorunun spektral informasiya üzrə bərpası məsələsinin ilk ciddi tədqiqi İsveç riyaziyyatçısı G. Borq tərəfindən aparılmışdır. O isbat etmişdir ki, sərhəd şərtlərindən biri üst-üstə düşən iki Şturm-Liuvill diferensial operatorunun spektrləri $q(x)$ funksiyasını birqismətli təyin edir.

Operatorların spektral nəzəriyyəsinin müxtəlif sahələrində çevirmə operatorları mühüm rol oynamışdır. İlk dəfə bu operatorları tərs məsələlərin araşdırılmasına V.A. Marçenko tətbiq etmişdir. O, Şturm-Liuvill operatoru üçün spektral funksiyaya görə tərs məsələnin və bir sıra digər tərs spektral məsələlərin həllinin yeganəliyini göstərmişdir. Çevirmə operatorları aparatı İ.M. Gelfand və B.M. Levitanın məlum fundamental elmi işində də tətbiq edilmişdir. Bu işdə Şturm-Liuvill operatorunun spektral funksiyaya görə tərs məsələsinin həlli üçün zəruri və kafi şərtlər və bərpa üsulu tapılmışdır. Klassik Şturm-Liuvill operatorunun iki spektr üzrə effektiv bərpasına M.G. Kreynin də müəyyən məqalələri həsr olunmuşdur. G. Borqun qoyuluşunda tərs məsələnin (yəni parçada l operatorunun iki spektr üzrə bərpası məsələsinin) tam həlli M.G. Qasımov və B.M. Levitanın məlum işində alınmışdır.

Q. Qardner, C. Grin, M. Kruskal və R. Miuranın 1967-ci ildə çap olunan məqaləsində tərs spektral məsələdən istifadə etməklə riyazi fizikada rast gəlin bir sıra qeyri-xətti evolyusiya tənliklərinin inteqralllanması metodunun əsası qoyulmuşdur. Sonralar V.Y. Zaxarov və A.B. Şabatın işində bu metodun digər tənliklərə də tətbiq olunması göstərilmişdir.

Qeyd edək ki, 1970-ci ildən başlayaraq ayrılmayan (o cümlədən periodik, antiperiodik və kvaziperodik) sərhəd şərtlili diferensial operatorlar üçün düz və tərs məsələlər tədqiq olunur. Belə məsələlərin müxtəlif üsullarla həlli İ.V. Stankeviç, V.A. Sadovniçi, Ya.T. Sultanayev, A.M. Axtiyamov, V.A. Marçenko, İ.V. Ostrovski, M.G. Qasımov, H.M. Hüseynov, İ.M. Nəbiyev, O.A. Plaksina, V.A. Yurko, Y.L. Korotyayev, A.S. Makin və digər müəlliflərin məqalələrində öz əksini tapmışdır.

Riyazi fizikanın bir çox məsələlərində spektral parametr həm diferensial tənlikdə, həm də sərhəd şərtlərində iştirak edir. Belə məsələlər sərhəd şərtlərinə zamana görə törəmə daxil olan xüsusi törəməli diferensial tənliklərə dəyişənlərin ayrılması üsulunu tətbiq edərkən meydana gəlir. Məsələn, bircins simin bir ucu bağlı olduqda, digər ucuna isə yük bağlandıqda simin rəqs tənliyi sərhəd şərtində spektral parametr olan məsələyə gətirilir. Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill tənlikləri üçün tərs spektral

məsələlərin öyrənilməsi o qədər də uzaq tarixə getmir. A. Benedek və P. Pansonenin, P.C. Braun və B.D. Slimanın, P.A. Baydinq, P.C. Braun və B.A. Vatsonun, X.R. Məmmədovun, N.B. Kərimovun, Z.S. Əliyevin, V. Pivovarçikin və onların tələbələrinin, N.C. Quliyevin işlərində müxtəlif qoyuluşlarda düz və tərs məsələlər öyrənilmişdir.

M.V. Keldişin məqaləsində polinomial operatorlar dəstəsinin spektral nəzəriyyəsinə dair ilk dəfə ciddi nəticələr alınmışdır. Bu məqalədə həmin nəzəriyyənin əsas anlayışları daxil edilmiş, xətti və polinomial operatorlar dəstəsinin mühüm sinifləri üçün məxsusi və qoşulmuş elementlər sisteminin tamlığı haqqında teoremlər isbat edilmiş və məxsusi ədədlərin asimptotikası alınmışdır. Bu işdən sonra operatorlar dəstəsinin spektral nəzəriyyəsi intensiv inkişaf etmişdir. Parçada diferensial operatorlar dəstəsi üçün spektral analizin düz məsələləri A.Q. Kostyuçenko, A.A. Şkalikov və başqa riyaziyyatçıların işlərində öyrənilmişdir. Qeyd edək ki, xüsusi törəməli bəzi tənliklərin həlli ikinci tərtib adi diferensial operatorlar dəstəsi üçün spektral məsələlərə gətirilir.

M. Jolan və K. Jan, M.G. Qasımov, H.Ş. Hüseynov, H.M. Hüseynov, İ.M. Nəbiyev, R.X. Əmirov, A.A. Nəbiyev, V.A. Sadovniçi, Y.T. Sultanayev, A.M. Axtyamov, V.A. Yurko, S.A. Buterin, V.N. Pivovarçik, Ç.F. Yang, N.P. Bondarenko, X.Ç. Hu və başqa tədqiqatçılar tərəfindən

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0$$

diffuziya tənliyi üçün müxtəlif tərs spektral məsələlər öyrənilmişdir.

Bu tənliyin və ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələləri üçün müxtəlif spektral verilənlərə görə tərs məsələlərə H.M. Hüseynov, İ.M. Nəbiyev və V.A. Yurkonun elmi işlərində baxılmışdır.

Yuxarıda qeyd olunan işlərin əksəriyyəti ayrılan requlyar sərhəd şərtləri halına uyğundur. Lakin diffuziya tənliyi üçün ayrılmayan sərhəd şərtlərinin və sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olduğu halda spektral məsələlər az öyrənilmişdir. Sərhəd şərtlərinə spektral parametrin daxil olması tədqiqat zamanı əlavə çətinliklər yaradır. Buna görə də ayrılan sərhəd şərtlərinin və spektral parametr daxil olmayan ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu

sərhəd məsələləri üçün əvvəllər istifadə olunan bəzi metodları tətbiq etmək mümkün olmur. Bu isə öz növbəsində bəzi mühakimələrin dəyişdirilməsini tələb edir. Bundan başqa sərhəd şərtlərinə spektral parametrin daxil olması çətinliklər yaratmaqla yanaşı bəzi mürəkkəb qiymətləndirmələrdən qaçmağa da imkan verir. Bu səbəblərdən diffuziya tənliyinin və spektral parametrin daxil olduğu ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələləri üçün spektral analizin düz və tərs məsələlərinin öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Beləliklə, ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda Şturm-Liuvill operatorlarının kvadratik dəstəsi üçün tərs spektral məsələlərin öyrənilməsi aktualdır.

Tədqiqatın obyektı və predmeti. Tədqiqatın obyektini ayrılmayan sərhəd şərtində spektral parametrin xətti funksiyası olan diffuziya operatoru, predmetini isə baxılan operator üçün düz və tərs spektral məsələlərin həlli təşkil edir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda diffuziya operatoru üçün tərs məsələlərin həllindən ibarətdir. Baxılan sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin asimptotikasının tapılması, məxsusi ədədlərin təkrarlanması üçün meyarın verilməsi, bir sərhəd şərti eyni olan iki müxtəlif məsələnin məxsusi ədədlərinin yerləşməsinin öyrənilməsi, sərhəd məsələləri üçün iki spektr və işarələr ardıcılığına görə spektral analizin tərs məsələsinin araşdırılması işdə qarşıya qoyulan əsas vəzifələrdir.

Tədqiqat metodları. Dissertasiyada diferensial və integral tənliklər nəzəriyyəsinin, diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin, kompleks analizin, həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin üsullarından və asimptotik metodlardan istifadə olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Müdafiəyə əsasən aşağıdakı müddəalar çıxarılır:

- ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda diffuziya operatorunun məxsusi ədədlərinin asimptotikasının tapılması;

- baxılan sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanan olması üçün meyarın verilməsi, bu məsələlərin qoşulmuş funksiyalarının olmamasının isbat edilməsi;

- sərhəd məsələlərinin iki spektrə və işarələr ardıcılığına görə bərpası haqqında tərs məsələlərin həlli üçün yeganəlik teoremlərinin isbatı və həll alqoritmlərinin qurulması;

- müəyyən həqiqi ədədlər ardıcılıqlarının diffuziya tənliyinin və spektral parametrin daxil olduğu ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələlərinin spektral verilənlərinin olması üçün kafi şərtlərin müəyyən edilməsi.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- diffuziya tənliyinin və spektral parametrin daxil olduğu ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədləri üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır;

- sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanan olması üçün zəruri və kafi şərtlər verilmiş, bu məsələlərin qoşulmuş funksiyalarının olmadığı isbat edilmişdir;

- sərhəd məsələlərinin iki spektrə və işarələr ardıcılığına görə bərpası haqqında tərs məsələlərin həlli üçün yeganəlik teoremləri isbat edilmiş və effektiv həll alqoritmləri verilmişdir;

- müəyyən kəmiyyətlər yığımının ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametrin xətti funksiyasının daxil olduğu diffuziya operatorunun spektral verilənləri olması üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınan yeni nəticələr nəzəri xarakterlidir. Bu nəticələrdən bir sıra diferensial operatorlarla bağlı bərpa məsələlərinin həllində istifadə oluna bilər. Bundan başqa alınan nəticələr riyazi fizikanın bəzi qeyri-xətti evolyusion tənliklərinin inteqrallanması, həmçinin kvant mexanikasının bəzi məsələlərinin həlli zamanı tətbiq oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyaziyyat kafedrasının (rəhbər prof. H.D. Orucov), AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun Funksional analiz şöbəsinin (rəhbər prof. H.İ. Aslanov)

seminarlarında, akademik M.L. Rəsulovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri” Respublika elmi konfransında (Şəki, 2016), AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş “Актуальные проблемы математики и механики” (Bakı, 2014), professor Y.C. Məmmədovun 85 illiyinə həsr olunmuş (Bakı, 2015), “Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications” (Bakı, 2015), “Mathematical modeling of processes and systems” (Ufa, 2017), akademik A.F. Leontyevin anadan olmasının 100 illyinə həsr olunmuş (Ufa, 2017), professor Hamlet İsaخانlının 70 illik yubileyinə həsr olunmuş “Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference” (Bakı, 2018) Beynəlxalq elmi konfranslarında məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Dissertasiya işində alınan bütün nəticə və təkliflər iddiaçısı aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Tədqiqat üzrə Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK-ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 6 məqalə (3-ü Web of Science, Scopus siyahısına daxildir), 7 konfrans materialı və tezis (bunlardan 2-si ölkə xaricində beynəlxalq, 4-ü ölkə daxilində beynəlxalq, 1-i isə respublika səviyyəli) olmaqla ümumilikdə 13 iş nəşr olunmuşdur. Əsərlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyaziyyat kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi titul vərəqi və mündəricatdan (1214 işarə), girişdən (42000 işarə), 138000 işarə olmaqla 3 fəsildən (I fəsil - 68000, II fəsil - 52000, III fəsil - 18000), nəticədən (879 işarə) və 81 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 182093 işarədən ibarətdir.

DİSSERTASIYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış, tədqiqatın məqsədi, vəzifələri və elmi yeniliyi göstərilmiş, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti qeyd olunmuş, işin aprobasiyası barədə məlumat verilmiş, həmçinin dissertasiyanın qısa məzmunu şərh olunmuşdur.

Birinci fəsildə diffuziya tənliyinin və spektral parametrin daxil olduğu ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələləri üçün spektral analizin düz məsələləri öyrənilmişdir.

$W_2^n[0, \pi]$ ilə $[0, \pi]$ parçasında $n-1$ tərtibə qədər mütləq kəsilməz törəmələri olan və n -ci tərtib törəməsi isə kvadratı ilə cəmlənən (yəni $L_2[0, \pi]$ -yə daxil olan) funksiyalardan təşkil olunmuş Sobolev fəzasını işarə edək. Tutaq ki, $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ həqiqi qiymətli funksiyalardır. Paraqraf 1.1-də

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0, 0 \leq x \leq \pi \quad (1)$$

diffuziya tənliyinin və

$$\begin{aligned} y'(0) + (\alpha\lambda + \beta)y(0) + \omega y(\pi) &= 0, \\ y'(\pi) + \gamma y(\pi) - \overline{\omega}y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələsinə baxılır, burada λ spektral parametr, α, β, γ həqiqi ədədlər, ω isə kompleks ədəddir. Fərz olunur ki, $\alpha\omega \neq 0$, yəni (2) sərhəd şərtləri ayrılmayıdır və bu şərtlərin birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxildir. (1)-(2) sərhəd məsələsini $L(\omega, \alpha, \beta)$ ilə işarə edəcəyik.

Tərif. Əgər λ parametrinin $\lambda = \lambda_0$ qiyməti üçün $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin trivial olmayan $y_0(x)$ həlli varsa, onda λ_0 ədədinə bu məsələnin məxsusi ədədi, $y_0(x)$ həllinə isə bu məxsusi ədədə uyğun məxsusi funksiyası deyilir. Verilmiş λ_0 məxsusi ədədi üçün xətti asılı olmayan məxsusi funksiyaların maksimal sayına λ_0 məxsusi ədədinin təkrarlanma dərəcəsi deyilir. Əgər $y_1(x)$,

$y_2(x), \dots, y_r(x)$ funksiyaları mütləq kəsilməz törəmələrə malikdirsə və

$$y_j''(x) + [\lambda_0^2 - 2\lambda_0 p(x) - q(x)]y_j(x) + [2\lambda_0 - 2p(x)]y_{j-1}(x) + y_{j-2}(x) = 0$$

diferensial tənliyini, həmçinin

$$(\alpha\lambda_0 + \beta)y_j(0) + y_j'(0) + \omega y_j(\pi) + \alpha y_{j-1}(0) = 0,$$

$$-\overline{\omega}y_j'(0) + \gamma y_j(\pi) + y_j'(\pi) = 0,$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, r \quad (y_{-1}(x) \equiv 0).$$

sərhəd şərtlərini ödəyərsə, onda bu funksiyalara $y_0(x)$ məxsusi funksiyasına qoşulmuş funksiyalar deyilir.

Bu fəsilə fərz edəcəyik ki, aşağıdakı şərt ((A) şərti) ödənilir:
(2) sərhəd şərtlərini ödəyən bütün $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$ funksiyaları üçün

$$\gamma|y(\pi)|^2 - 2\operatorname{Re}[\omega\overline{y(0)}y(\pi)] - \beta|y(0)|^2 + \int_0^\pi \{y'(x)^2 + q(x)|y(x)|^2\}dx > 0, \quad (3)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (3) bərabərsizliyi

$$\beta \leq 0, \gamma \geq 0, |\omega| \leq \sqrt{|\beta|\gamma}, q(x) > 0$$

olduqda həmişə ödənilir.

$c(x, \lambda)$ və $s(x, \lambda)$ ilə (0.1) tənliyinin aşağıdakı başlanğıc şərtləri ödəyən həllərini işarə edək:

$$c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1, \quad c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0.$$

Bu paragrafda $c(x, \lambda)$ və $s(x, \lambda)$ həllərindən istifadə edərək göstərilir ki, $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri

$$\delta(\lambda) = 2\operatorname{Re}\omega - \eta(\lambda) + |\omega|^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\lambda) \quad (4)$$

funksiyasının sıfırları ilə üst-üstə düşür, burada

$$\eta(\lambda) = c'(\pi, \lambda) + \gamma c(\pi, \lambda), \quad \sigma(\lambda) = s'(\pi, \lambda) + \gamma s(\pi, \lambda). \quad (5)$$

(4) funksiyasına $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyası deyəcəyik.

Teorem 1. $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri

həqiqidir və sıfırdan fərqlidir.

Teorem 2. *Əgər $y(x)$ funksiyası $L(\omega, \alpha, \beta)$ məsələsinin λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiyası olarsa, onda*

$$2 \int_0^{\pi} [\lambda - p(x)] |y(x)|^2 dx + \alpha |y(0)|^2 \neq 0$$

münasibəti doğrudur. Bundan əlavə bu münasibətin sol tərəfinin işarəsi λ məxsusi ədədinin işarəsi ilə üst-üstə düşür.

Bunlardan başqa bu paraqrafda $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin məxsusi funksiyalarına qoşulmuş funksiyalarının olub-olmadığı məsələsi araşdırılır.

Teorem 3. *$L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin məxsusi funksiyalarına qoşulmuş funksiyaları yoxdur.*

Dissertasiya işində funksiyanın yuxarısında nöqtə yazıldıqda bunu λ parametrinə nəzərən diferensiallama kimi başa düşəcəyik.

Teorem 4. *Əgər $\delta(\lambda_0) = 0$ və $\sigma(\lambda_0) \neq 0$ olarsa, onda $\dot{\delta}(\lambda_0) \neq 0$ münasibəti doğrudur.*

Teorem 5. *$\delta(0) < 0$ bərabərsizliyi doğrudur.*

Paraqraf 1.2-də əvvəlcə $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanan olması haqqında təklif isbat olunur.

Teorem 6. *$L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin λ_0 məxsusi ədədi yalnız və yalnız o zaman təkrarlanan olur ki, ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olsun və aşağıdakı bərabərliklər ödənilsin:*

$$\alpha \lambda_0 + \beta + \omega c(\pi, \lambda_0) = s'(\pi, \lambda_0) + \gamma s(\pi, \lambda_0) = 0. \quad (6)$$

Daha sonra bu paraqrafda $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasının sıfırlarının təkrarlanan olması üçün meyar göstərilir.

Teorem 7. *λ_0 ədədinin $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin (4) xarakteristik funksiyasının təkrarlanan sıfırı olması üçün zəruri və kafi şərt bu ədədin $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədi olmasıdır, yəni ω -nın sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması və (6) münasibətlərinin ödənilməsidir.*

Bunlardan başqa paraqraf 1.2-də göstərilir ki, $\delta(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarının tərtibi ikidən böyük deyil.

Teorem 8. Əgər $\delta(\lambda_0) = \dot{\delta}(\lambda_0) = 0$ olarsa, onda $\ddot{\delta}(\lambda_0) \neq 0$ olur, yəni $\delta(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarının tərtibi ikidən böyük ola bilməz.

Aşağıda hər yerdə fərz edəcəyik ki, ω həqiqi ədəddir. Paraqraf 1.3-də $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri üçün asimptotik düstur çıxarılır.

Teorem 9. $L(\omega, \alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin γ_k ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) məxsusi ədədləri üçün $|k| \rightarrow \infty$ olduqda aşağıdakı asimptotik bərabərlik doğrudur:

$$\gamma_k = k + a - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha + \frac{(-1)^{k+1} b \omega - B}{k \pi} + \frac{\tau_k}{k}, \quad (7)$$

burada

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx, \quad B = \frac{\beta + \alpha p_0}{1 + \alpha^2} - \gamma - \pi Q, \quad p_0 = p(0), \quad (8)$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [q(x) + p^2(x)] dx, \quad \{\tau_k\} \in l_2.$$

Birinci fəslin sonuncu 1.4 paraqrafında sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşməsi (növbələşməsi) haqqında təkliflər isbat olunur. Əvvəlcə $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$ ədədləri qeyd olunduqda və β dəyişdikdə (1), (2) məsələsinə baxılır. Bu halda sərhəd məsələsini $P(\beta)$ ilə işarə edəcəyik.

Bundan sonrakı mühakimələrdə hesab edəcəyik ki, j indeksi 1 və 2 qiymətlərini alır. $P(\beta_j)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasını $\delta_j(\lambda)$ ilə, bu sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərini isə $\gamma_k^{(j)}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ilə işarə edək. (4) və (7) bərabərliklərinə əsasən aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\delta_j(\lambda) = 2\omega - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta_j) \sigma(\lambda),$$

$$\gamma_k^{(j)} = k + a - \frac{1}{\pi} \arctg \alpha + \frac{(-1)^{k+1} b \omega - B_j}{k \pi} + \frac{\tau_k^{(j)}}{k},$$

burada

$$B_j = \frac{\beta_j + \alpha p_0}{1 + \alpha^2} - \gamma - \pi Q, \quad \{\tau_k^{(j)}\} \in l_2.$$

Teorem 10. $\beta_1 < \beta_2$ olduqda $P(\beta_1)$ və $P(\beta_2)$ sərhəd məsələlərinin $\gamma_k^{(1)}$ və $\gamma_k^{(2)}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ məxsusi ədədləri üçün $\omega < 0$ olduqda

$$0 < \gamma_{+0}^{(2)} \leq \gamma_{+0}^{(1)} \leq \gamma_1^{(2)} \leq \gamma_1^{(1)} < \gamma_2^{(2)} \leq \gamma_2^{(1)} \leq \gamma_3^{(2)} \leq \gamma_3^{(1)} < \dots,$$

$$0 > \gamma_{-0}^{(2)} \geq \gamma_{-0}^{(1)} \geq \gamma_{-1}^{(2)} \gamma_{2,-1} \geq \gamma_{-1}^{(1)} > \gamma_{-2}^{(2)} \geq \gamma_{-2}^{(1)} \geq \gamma_{-3}^{(2)} \geq \gamma_{-3}^{(1)} > \dots$$

bərabərsizlikləri, $\omega > 0$ olduqda isə

$$0 < \gamma_{+0}^{(2)} < \gamma_{+0}^{(1)} < \gamma_1^{(2)} \leq \gamma_1^{(1)} \leq \gamma_2^{(2)} \leq \gamma_2^{(1)} < \gamma_3^{(2)} \leq \gamma_3^{(1)} \leq \dots,$$

$$0 > \gamma_{-0}^{(2)} > \gamma_{-0}^{(1)} > \gamma_{-1}^{(2)} \gamma_{2,-1} \geq \gamma_{-1}^{(1)} \geq \gamma_{-2}^{(2)} \geq \gamma_{-2}^{(1)} > \gamma_{-3}^{(2)} \geq \gamma_{-3}^{(1)} \geq \dots$$

bərabərsizlikləri ödənilir, belə ki, əgər $\gamma_k^{(j)} = \gamma_{k+1}^{(j)}$, olarsa, onda $\gamma_{k-1}^{(3-j)} < \gamma_k^{(3-j)} < \gamma_{k+1}^{(3-j)}$ münasibəti doğrudur.

Paraqraf 1.4-də həmçinin $\beta \neq 0$, $\omega \neq 0$ ədədləri qeyd olunduqda (1), (2) məsələsinin α dəyişdikdə məxsusi ədədlərinin necə yerləşməsi öyrənilir. Bu halda sərhəd məsələsini $Y(\alpha)$ ilə işarə edəcəyik. $Y(\alpha_j)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasını $\Delta_j(\lambda)$ ilə, bu sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərini isə $\mu_k^{(j)}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ilə işarə edək. (4) düsturundan alırıq ki,

$$\Delta_j(\lambda) = 2\omega - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha_j \lambda + \beta) \sigma(\lambda).$$

Digər tərəfdən isə (7), (8) münasibətlərinə əsasən

$$\mu_k^{(j)} = k + \tilde{a}_j + \frac{(-1)^{k+1} b_j \omega - A_j}{k \pi} + \frac{\eta_k^{(j)}}{k},$$

burada

$$A_j = \frac{\beta + \alpha_j p_0}{1 + \alpha_j^2} - \gamma - \pi Q,$$

$$\tilde{a}_j = a - \frac{1}{\pi} \arctg \alpha_j, b_j = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha_j^2}}, \quad \{\eta_k^{(j)}\} \in l_2.$$

Teorem 11. $Y(\alpha_1)$ və $Y(\alpha_2)$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) sərhəd məsələlərinin $\mu_k^{(1)}$ və $\mu_k^{(2)}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ məxsusi ədədləri $\omega < 0$ olduqda

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} \leq \mu_{+0}^{(1)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} < \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} \leq \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} < \dots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} \geq \mu_{-0}^{(1)} \geq \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} > \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} \geq \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} > \dots$$

bərabərsizliklərini, $\omega > 0$ olduqda isə

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_{+0}^{(1)} < \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} \leq \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} < \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} \leq \dots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} > \mu_{-0}^{(1)} > \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} \geq \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} > \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} \geq \dots$$

bərabərsizliklərini ödəyir, belə ki, əgər $\mu_k^{(j)} = \mu_{k+1}^{(j)}$ olarsa, onda $\mu_{k-1}^{(3-j)} < \mu_k^{(3-j)} < \mu_{k+1}^{(3-j)}$ olur.

II fəsil $P(\beta)$ və $Y(\alpha)$ sərhəd məsələləri üçün iki spektrə və işarələr ardıcılığına görə tərs məsələnin həllinin yeganəliyinə və tərs məsələlərin həll alqoritmlərinin qurulmasına həsr olunur.

Paraqraf 2.1-də $P(\beta)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasının spektrə nəzərən birqiymətli bərpa olunması məsələsi araşdırılır.

Teorem 12. $a = 0$ olduqda $P(\beta)$ sərhəd məsələsinin $\{\gamma_k\}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) spektrinin verilməsi bu məsələnin $\delta(\lambda)$ xarakteristik funksiyasını

$$\delta(\lambda) = \frac{\pi}{\cos \pi d} (\gamma_{-0} - \lambda)(\gamma_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma_k - \lambda}{k},$$

düsturu ilə birqiymətli təyin edir, burada $d = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_k - k)$.

Paraqraf 2.2-də $P(\beta)$ və $Y(\alpha)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənlərə görə bərpa olunmasının yeganəliyi isbat olunur. Qeyd edək ki, $P(\beta_1)$, $P(\beta_2)$ və ya $Y(\alpha_1)$, $Y(\alpha_2)$ tipli məsələlərin spektrlərinə görə (1) tənliyinin $p(x)$ və $q(x)$ əmsallarını və ümumiyyətlə, sərhəd məsələlərinin özlərini birqiymətli təyin etmək

mümkün olmur. Bu məsələlərin birqiymətli bərpası üçün əlavə spektral verilənlərə ehtiyac var. Belə spektral verilənlər olaraq $\sigma_n = \text{sign } h_-(\nu_n)$ işarələr ardıcılığı götürülür, burada

$$h_-(\lambda) = \alpha\lambda\sigma(\lambda) - \eta(\lambda) - \omega^2 s(\pi, \lambda),$$

$\nu_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ isə $\sigma(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarıdır. Bu sıfırlar üçün $|n| \rightarrow \infty$ olduqda aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$\nu_n = n - \frac{1}{2} \text{sign } n + a + \frac{\pi Q + \gamma}{n\pi} + \frac{\xi_n}{n}, \quad \{\xi_n\} \in l_2. \quad (9)$$

$\{\gamma_k^{(1)}\}, \{\gamma_k^{(2)}\} \ (k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ və $\{\sigma_n\} \ (\sigma_n = -1, 0, 1; n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ həqiqi ədədlər ardıcılıqlarına $P(\beta_1)$ və $P(\beta_2)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri deyəcəyik. $P(\beta_1)$ və $P(\beta_2)$ sərhəd məsələləri üçün spektral analizin tərs məsələsi dedikdə spektral verilənlər məlum olduqda (1) tənliyinin $p(x), q(x)$ əmsallarının və sərhəd şərtlərinə daxil olan $\omega, \alpha, \beta_1, \beta_2$ və γ kəmiyyətlərinin bərpa olunması başa düşülür.

Teorem 13. $a = p_0 = 0$ olduqda $P(\beta_1)$ və $P(\beta_2)$ sərhəd məsələləri öz spektral verilənlərinə görə birqiymətli bərpa olunur.

Eyni qayda ilə $Y(\alpha_1), Y(\alpha_2)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri dedikdə $\{\mu_k^{(1)}\}, \{\mu_k^{(2)}\}$ spektrləri və $\{\sigma_n\}$ işarələr ardıcılığı başa düşülür. Bu sərhəd məsələləri üçün tərs spektral məsələ spektral verilənlərə görə (1) tənliyinin $p(x), q(x)$ əmsallarının və sərhəd şərtlərinə daxil olan $\omega, \beta, \alpha_1, \alpha_2$ və γ kəmiyyətlərinin bərpa olunmasından ibarətdir.

Teorem 14. $Y(\alpha_1)$ və $Y(\alpha_2)$ sərhəd məsələləri öz spektral verilənlərinə görə birqiymətli bərpa olunur.

Paraqraf 2.3

$$-y'' + 2\lambda p(x)y + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty$$

$$y(0) = 0$$

sərhəd məsələsi üçün səpilmənin yarımxolda tərs məsələsinə dair bəzi məlum köməkçi faktların verilməsinə həsr olunur, burada $p(x)$,

$q(x)$ funksiyaları

$$q(x) = p(x) = 0, x > \pi,$$

$$q(x) \in L_2[0, \pi], p(x) \in W_2^1[0, \pi]$$

şərtlərini ödəyir.

Paraqraf 2.4-də əvvəlcə

$$-y'' + 2\lambda p(x)y + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (10)$$

tənliyinin və

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (11)$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0. \quad (12)$$

ayrılan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələlərinə baxılır, burada $q(x) \in L_2[0, \pi], p(x) \in W_2^1[0, \pi]$ həqiqi qiymətli funksiyalardır. (10), (11) və (10), (12) sərhəd məsələləri üçün iki spektrə görə tərs məsələnin həll algoritmi verilir.

Alqoritm 1. Tutaq ki, $\{\lambda_n\}$ və $\{\theta_n\}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) ardıcılıqları (uyğun olaraq (10), (11) və (10), (12) məsələlərinin spektrləri) verilmişdir.

1) $\{\lambda_n\}$ və $\{\theta_n\}$ ardıcılıqlarının köməyi ilə

$$s(\lambda) = \pi \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n}, \quad s_1(\lambda) = \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\theta_n - \lambda}{n - \frac{1}{2} \operatorname{sign} n}$$

funksiyalarını qururuq.

2) $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda\pi} [s_1(\lambda) - i\lambda s(\lambda)]$ işarə edib

$$S(\lambda) = \frac{\overline{\varphi(\lambda)}}{\varphi(\lambda)}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

funksiyasını qururuq.

3) $F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2i\pi\lambda} - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda$ düsturu ilə $F(x)$ funksiyasını

təyin edirik, burada $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - n)$.

4) Hər bir qeyd olunmuş x üçün

$$F(x+y) + \overline{K_0(x,y)} + \int_x^\infty K_0(x,t)F(t+y)dt = 0, 0 \leq x \leq y,$$

$$iF(x+y) + \overline{K_1(x,y)} + \int_x^\infty K_1(x,t)F(t+y)dt = 0, 0 \leq x \leq y$$

tənliklərini həll edib $K_0(x,y) \in L_1(x,\infty)$, $K_1(x,y) \in L_1(x,\infty)$ həllərini tapırıq.

5) $\alpha(x)$ funksiyasını aşağıdakı Volter tipli integral tənliyin həlli kimi təyin edirik:

$$\alpha(x) = \int_x^\infty V(t, \alpha(t))dt, x \geq 0,$$

burada

$$V(t, z) = [\operatorname{Re} K_0(t, t) - \operatorname{Im} K_1(t, t)] \sin 2z +$$

$$+ 2[\operatorname{Re} K_1(t, t)] \sin^2 z - 2[\operatorname{Im} K_0(t, t)] \cos^2 z.$$

6) $p(x)$, $q(x)$ əmsallarını

$$p(x) = -\alpha'(x),$$

$$q(x) = -p^2(x) - 2 \frac{d}{dx} [\operatorname{Re}[K(x, y)] \cos \alpha(x) + \operatorname{Im}[K(x, y)] \sin \alpha(x)]$$

düsturları vasitəsi ilə bərpa edirik, burada

$$K(x, y) = K_0(x, y) \cos \alpha(x) + K_1(x, y) \sin \alpha(x).$$

Bundan sonra Alqoritm 1-dən istifadə etməklə paragraf 2.4-də həmçinin $P(\beta_1)$, $P(\beta_2)$ və $Y(\alpha_1)$, $Y(\alpha_2)$ tipli məsələlər üçün tərs məsələlərin həll alqoritmləri verilir.

Alqoritm 2. Tutaq ki, $\{\gamma_k^{(1)}\}$, $\{\gamma_k^{(2)}\}$, $\{\sigma_n\}$ ardıcılıqları $P(\beta_1)$ və $P(\beta_2)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləridir və $a = p_0 = 0$.

1) α və ω kəmiyyətlərini

$$\alpha = -\operatorname{tg} \pi d, \quad \omega = \frac{\pi}{b} \lim_{k \rightarrow \infty} k (\gamma_{2k+1}^{(j)} - \gamma_{2k}^{(j)} - 1)$$

düsturları ilə təyin edirik, burada

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_k^{(j)} - k), \quad b = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

2) $\{\gamma_k^{(j)}\}$ ardıcılıqları və α parametrinin köməyi ilə sonsuz hasil şəklində $\delta_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ funksiyalarını qururuq:

$$\delta_j(\lambda) = \pi \sqrt{1 + \alpha^2} (\gamma_{-0}^{(j)} - \lambda) (\gamma_{+0}^{(j)} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(j)} - \lambda}{k}.$$

3) $\beta_2 - \beta_1$ fərqlərini

$$\beta_2 - \beta_1 = \pi (1 + \alpha^2) \lim_{k \rightarrow \infty} k (\gamma_k^{(1)} - \gamma_k^{(2)})$$

bərabərliyi vasitəsilə tapırıq.

4) Aşağıdakı düsturla $\sigma(\lambda)$ funksiyasını təyin edirik:

$$\sigma(\lambda) = \frac{\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2}.$$

5) $\sigma(\lambda)$ funksiyasının ν_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ sıfırlarını tapırıq və β_j parametrlərini

$$\beta_j = (1 + \alpha^2) \lim_{k \rightarrow \infty} \left[b\omega - 2k\pi \left(\gamma_{2k+1}^{(j)} - \nu_{2k+1} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

düsturları ilə bərpa edirik.

6) $h_+(\lambda)$ funksiyasını qururuq:

$$h_+(\lambda) = \frac{\beta_2 \delta_1(\lambda) - \beta_1 \delta_2(\lambda)}{\beta_2 - \beta_1}$$

7) $h_-(\lambda)$ funksiyasının $\sigma(\lambda)$ -nin ν_n sıfırlarındakı qiymətlərini

$$h_-(\nu_n) = (-1)^k \sigma_n \sqrt{h_+^2(\nu_n) - 4\omega^2}$$

düsturu vasitəsilə tapırıq.

8) $\sigma(\lambda)$ və onun ν_n sıfırlarından istifadə edərək

$$g(\lambda) = \sigma(\lambda) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{g(\nu_n)}{(\lambda - \nu_n) \dot{\sigma}(\nu_n)}$$

funksiyasını qururuq, burada

$$g(v_n) = h_+(v_n) - (-1)^n \sigma_n \sqrt{h_+^2(v_n) - 4\omega^2} - 2\omega^2 \frac{\sin v_n \pi}{v_n}.$$

9) $h_-(\lambda)$ funksiyasını

$$h_-(\lambda) = h_+(\lambda) - g(\lambda) - 2\omega^2 \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda}$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin edirik.

10) $s(\pi, \lambda)$ funksiyasını

$$s(\pi, \lambda) = \frac{1}{2\omega^2} [h_+(\lambda) - h_-(\lambda)]$$

düsturu ilə bərpa edirik (bu funksiya (10), (11) məsələsinin xarakteristik funksiyasıdır) və onun $\lambda_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ sıfırlarını tapırıq.

11) $s(\pi, \lambda)$ funksiyasının λ_n sıfırlarının və $\sigma(\lambda)$ funksiyasının v_n sıfırlarının köməylə γ parametrini müəyyən edirik:

$$\gamma = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} k \left(v_n - \lambda_n + \frac{1}{2} \right).$$

12) $s'(\pi, \lambda)$ funksiyasını

$$s'(\pi, \lambda) = \sigma(\lambda) - \gamma s(\pi, \lambda)$$

düsturu ilə qururuq (bu funksiya (10), (12) məsələsinin xarakteristik funksiyasıdır). $s'(\pi, \lambda)$ funksiyasının $\{\theta_n\}$ sıfırlarını tapırıq.

13) $s(\pi, \lambda)$ və $s'(\pi, \lambda)$ funksiyalarının $\{\lambda_n\}$ və $\{\theta_n\}$ sıfırları ardıcılıqlarına görə Alqoritm 1-in köməylə (1) tənliyinin $p(x), q(x)$ əmsallarını bərpa edirik.

Alqoritm 3. Tutaq ki, $\{\mu_k^{(1)}\}, \{\mu_k^{(2)}\}, \{\sigma_n\}$ ardıcılıqları $Y(\alpha_1)$ və $Y(\alpha_2)$ sərhəd məsələlərinin spektral verilənləridir.

1) $\tilde{a}_j, j = 1, 2$ kəmiyyətlərini

$$\tilde{a}_j = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k^{(j)} - k)$$

ilə təyin edirik.

2) $\{\mu_k^{(j)}\}$ ardıcılıqları və $\tilde{a}_j$ parametrinin köməyilə $\Delta_j(\lambda)$, $j=1,2$, funksiyalarını sonsuz hasil şəklində qururuq:

$$\Delta_j(\lambda) = \frac{\pi}{\cos \tilde{\pi} \tilde{a}_j} (\mu_{-0}^{(j)} - \lambda)(\mu_{+0}^{(j)} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k^{(j)} - \lambda}{k}.$$

3) $a, \alpha_1, \alpha_2, \omega$ kəmiyyətlərini

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \pi a &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1 \left(2k + \frac{1}{2} \right) + \Delta_2 \left(2k - \frac{1}{2} \right)}{\Delta_1(2k) + \Delta_2(2k-1)}, \\ \alpha_j &= \frac{\operatorname{tg} \pi a - \operatorname{tg} \tilde{\pi} \tilde{a}_j}{1 + \operatorname{tg} \pi a \cdot \operatorname{tg} \tilde{\pi} \tilde{a}_j}, \\ \omega &= \frac{\pi \sqrt{1 + \alpha_j^2}}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} k (\mu_{2k+1}^{(j)} - \mu_{2k}^{(j)} - 1), \end{aligned}$$

düsturları ilə bərpa edirik.

4) Aşağıdakı düsturla $\sigma(\lambda)$ funksiyasını təyin edirik:

$$\sigma(\lambda) = \frac{\Delta_1(\lambda) - \Delta_2(\lambda)}{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

$\sigma(\lambda)$ funksiyasının ν_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) sıfırlarını tapırıq.

5) $\sigma(\lambda)$ funksiyasının ν_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) sıfırlarının (9) asimtotikasından istifadə edərək β parametrini aşağıdakı kimi bərpa edirik:

$$\beta = \frac{\alpha_1 d_2 - \alpha_2 d_1}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

burada

$$d_j = (1 + \alpha_j^2) \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \alpha_j^2}} \omega - 2k\pi \left(\mu_{2k+1}^{(j)} - \nu_{2k+1} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha_j - \frac{1}{2} \right) \right].$$

6) $h_+(\lambda)$ funksiyasını qururuq:

$$h_+(\lambda) = \frac{\alpha_2 \Delta_1(\lambda) - \alpha_1 \Delta_2(\lambda)}{\alpha_2 - \alpha_1} - 2\omega.$$

7) $h_-(\lambda)$ funksiyasının $\sigma(\lambda)$ funksiyasının v_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) sıfırlarındakı qiymətlərini

$$h_-(v_n) = (-1)^{n+1} \sigma_n \sqrt{h_+^2(v_n) - 4\omega^2}$$

düsturu vasitəsilə tapırıq.

8) $\sigma(\lambda)$ funksiyası və v_n sıfırlarından istifadə edərək

$$g(\lambda) = \sigma(\lambda) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{g(v_n)}{(\lambda - v_n) \dot{\sigma}(v_n)}$$

funksiyasını qururuq, burada

$$g(v_n) = h_+(v_n) - (-1)^n \operatorname{sgn} h_-(v_n) \sqrt{h_+^2(v_n) - 4\omega^2} - 2\omega^2 \frac{\sin(v_n - a)\pi}{v_n}.$$

9) $h_-(\lambda)$ funksiyasını

$$h_-(\lambda) = h_+(\lambda) - g(\lambda) - 2\omega^2 \frac{\sin(\lambda - a)\pi}{\lambda}$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin edirik.

10) $s(\pi, \lambda)$ funksiyasını

$$s(\pi, \lambda) = \frac{1}{2\omega^2} [h_+(\lambda) - h_-(\lambda)]$$

düsturu ilə tapırıq, belə ki, bu funksiya (10), (11) məsələsinin xarakteristik funksiyası olur. Bu funksiyanın λ_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ sıfırlarını müəyyən edirik.

11) $s(\pi, \lambda)$ funksiyasının λ_n sıfırlarının və $\sigma(\lambda)$ funksiyasının v_n sıfırlarının köməyiylə γ parametrini tapırıq:

$$\gamma = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} k \left(v_n - \lambda_n + \frac{1}{2} \right).$$

12) $s'(\pi, \lambda)$ funksiyasını

$$s'(\pi, \lambda) = \sigma(\lambda) - \gamma s(\pi, \lambda)$$

düsturu ilə qururuq, belə ki, bu funksiya (10), (12) məsələsinin xarakteristik funksiyası olur. $s'(\pi, \lambda)$ funksiyasının $\{\theta_n\}$ sıfırlarını müəyyən edirik.

13) $s(\pi, \lambda)$ və $s'(\pi, \lambda)$ funksiyalarının $\{\lambda_n\}$ və $\{\theta_n\}$ sıfırları ardıcılıqlarına görə Alqoritm 1-in köməyi ilə (1) tənliyinin $p(x), q(x)$ əmsallarını tapırıq.

Dissertasiya işinin III fəslı $Y(\alpha_1), Y(\alpha_2)$ tipli məsələlər üçün tərs məsələnin birqiymətli həll olunması üçün kafi şərtlərin tapılmasına həsr olunur.

Paraqraf 3.1-də (5) düsturu ilə təyin olunan $\sigma(\lambda)$ funksiyası üçün göstəriliş alınır. III fəslin ikinci və sonuncu paraqrafında $\{\mu_k^{(1)}\}$, $\{\mu_k^{(2)}\}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) və $\{\sigma_n\}$ ($\sigma_n = -1, 0, 1$; $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) həqiqi ədədlər ardıcılıqlarından təşkil olunan kəmiyyətlər yığımının $Y(\alpha_1)$ və $Y(\alpha_2)$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) şəklində sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri olması üçün kafi şərtlər tapılır.

Teorem 15. $\{\mu_k^{(1)}\}$, $\{\mu_k^{(2)}\}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) və $\{\sigma_n\}$ ($\sigma_n = -1, 0, 1$; $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) həqiqi ədədlər ardıcılıqlarının $Y(\alpha_1)$ və $Y(\alpha_2)$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) şəklində sərhəd məsələlərinin spektral verilənləri olması üçün aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi kafidir:

1) $|k| \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mu_k^{(j)} = k + a + a_j + \frac{(-1)^{k+1} A_j - B_j}{k\pi} + \frac{\tau_k^{(j)}}{k}$$

asimptotik düsturu doğrudur, burada $A_j = 2\omega \cos \pi a_j$, ω, a, a_j, B_j həqiqi ədədlərdir və

$$a < 0, \quad 0 < a_j < \frac{1}{2}, \quad a_1 > a_2, \quad \omega \neq 0, \quad \{\tau_k^{(j)}\} \in l_2;$$

2) $\mu_k^{(1)}$ və $\mu_k^{(2)}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ədədləri $\omega < 0$ olduqda

$$\begin{aligned} 0 < \mu_{+0}^{(2)} \leq \mu_{+0}^{(1)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} < \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} \leq \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} < \dots, \\ 0 > \mu_{-0}^{(2)} \geq \mu_{-0}^{(1)} \geq \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} > \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} \geq \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} > \dots \end{aligned}$$

bərabərsizliklərini, $\omega > 0$ olduqda isə

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_{+0}^{(1)} < \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} \leq \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} < \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} \leq \dots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} > \mu_{-0}^{(1)} > \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} \geq \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} > \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} \geq \dots$$

bərabərsizliklərini ödəyir, belə ki, əgər

$$\mu_k^{(j)} = \mu_{k+1}^{(j)}$$

olarsa, onda

$$\mu_{k-1}^{(3-j)} < \mu_k^{(3-j)} < \mu_{k+1}^{(3-j)}$$

bərabərsizlikləri ödənilir;

3) hər bir $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ və $j = 1, 2$ üçün

$$b_n \stackrel{\text{def}}{=} |\delta_j(\nu_n) - 2\omega| - 2|\omega| \geq 0$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada

$$\delta_j(\lambda) = \frac{\pi(\mu_{-0}^{(j)} - \lambda)(\mu_{+0}^{(j)} - \lambda)}{\cos \pi a_j} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k^{(j)} - \lambda}{k},$$

ν_n ədədləri $\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)$ funksiyasının sıfırlarıdır;

4) σ_n kəmiyyəti $b_n = 0$ olduqda sıfıra bərabər olur, $b_n > 0$ olduqda isə 1 və ya -1 qiymətlərini alır, belə ki, elə $N > 0$ nömrəsi var ki, $|n| \geq N$ olduqda $\sigma_n = 1$ olur.

Asanlıqla görmək olar ki, (A) şərti və $[0, \pi]$ -də $p(x) < 0$ bərabərsizliyi ödənildikdə sonuncu teoremin şərtləri həm də zəruridir.

İddiaçı elmi rəhbəri f.-r.e.d., prof. İ.M. Nəbiyevə məsələlərin qoyuluşuna və məsləhətlərinə görə öz təşəkkürünü bildirir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametr daxil olan halda diffuziya operatoru üçün spektral analizin düz və tərs məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda diffuziya operatorunun məxsusi ədədləri üçün asimptotik düsturlar alınmışdır;

- sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanan olması üçün zəruri və kafi şərtlər verilmiş, bu məsələlərin qoşulmuş funksiyalarının olmadığı isbat edilmişdir;

- sərhəd məsələlərinin iki spektrə və işarələr ardıcılığına görə bərpası haqqında tərs məsələlərin həlli üçün yeganəlik teoremləri isbat edilmiş və effektiv həll alqoritmləri verilmişdir;

- müəyyən kəmiyyətlər yığımının ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametrin xətti funksiyasının daxil olduğu diffuziya operatorunun spektral verilənləri olması üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Ибадзаде, Ч.Г. Кратность собственных значений оператора диффузии со спектральным параметром в граничном условии // – Баку: Journal of Qafqaz University - Mathematics and computer science, – 2015. v. 3, № 2, – p. 188-195.
2. Ибадзаде, Ч.Г. Обратная задача для оператора диффузии со спектральным параметром в граничном условии // Papers of the VII International youth scientific-practical conference «Mathematical modeling of processes and systems», – Ufa: – 7-9 December, – 2017, – p. 330-334.
3. Ибадзаде, Ч.Г., Набиев И.М. О спектре квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 55-летию ИММ НАН Азербайджана, – Баку: – May 15-16, – 2014, – с. 175.

4. Ибадзаде, Ч.Г., Набиев И.М. Об алгоритме восстановления оператора диффузии со спектральным параметром в граничном условии // Материалы Международной Конференции, посвященной 85-летию Я.Д. Мамедова, – Baku: – December, – 2015, – с. 175-178.
5. Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М. Свойства спектра оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının həqiqi üzvi, əməkdar elm xadimi, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Məcid Lətif oğlu Rəsulovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri” mövzusunda Respublika elmi konfransının materialları, Şəki, 28-29 oktyabr 2016, s.162-165.
6. Ибадзаде, Ч.Г., Набиев И.М. О разрешимости одной обратной задачи спектрального анализа // Межд. конф. по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. Сборник тезисов, – Уфа: 24-27 мая, – 2017, – с. 61-62.
7. Ибадзаде, Ч.Г., Набиев И.М. Восстановление оператора Штурма-Лиувилля с неразделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничном условии // Киев: Украинский математический журнал, – 2017. т. 69, № 9, – с. 1217-1223.
8. Ибадзаде, Ч.Г., Набиев И.М. Асимптотика и взаимное расположение собственных значений операторов диффузии с неразделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничном условии // – Баку: Вестник БГУ, серия физ.-матем.наук, – 2017. № 3, – с. 49-56.
9. Ибадзаде, Ч.Г., Маммадова Л.И., Набиев И.М. О разрешимости обратной задачи для оператора диффузии на отрезке // International conference «Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference» (OFSMPC), dedicated to Professor Hamlet Isakhanli's 70th anniversary, – Baku: – 20-24 May, – 2018, – p. 199-200.

10. Таривердиева, Ч.Г. Восстановление характеристической функции краевой задачи по своим нулям // – Баку: Вестник БГУ, сер. физ.-матем., – 2019. № 3, – с. 81-86.
11. Ibadzadeh, Ch. G., Nabiev, I. M. On uniqueness of renewal of Sturm-Liouville operator with nonseparated boundary conditions and with a spectral parameter in the boundary condition // Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conf. “Math. Analysis, Diff. Eq. and their Applications”. Azerbaijan, Baku, – 2015, – p. 74.
12. Ibadzadeh, Ch. G., Nabiev, I. M. An inverse problem for Sturm–Liouville operators with nonseparated boundary conditions containing the spectral parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl., – 2016, v. 24, № 4, – p. 407-411.
13. Ibadzadeh, Ch. G., Mammadova, L.I., Nabiev, I. M. Inverse problem of spectral analysis for diffusion operator with nonseparated boundary conditions and spectral parameter in boundary condition // Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2019, v. 9, № 1, – p. 171-189.



Dissertasiyanın müdafiəsi "27" may 2025-ci il tarixində saat 14⁰⁰-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.17 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z. Xəlilov küçəsi, 23.

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat "22" aprel 2025-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.