АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Багыров Ширмайил Гасан оглы**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку– 2024

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнения» Бакинского Государственного Университета.

Научный консультант: член-корреспондент НАНА, доктор физико-математических наук, профессор
Рауф Вели оглы Гусейнов

Официальные оппоненты:

доктор математических наук, профессор
Рафиг Галендар оглы Тагиев

доктор физико-математических наук, профессор
Вали Магеррам оглы Курбанов

доктор математических наук, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев

доктор математических наук, доцент
Рабиль Аманулла оглы Аманов

Диссертационный совет ЭД 2.17 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики при Бакинском Государственном Университете

Председатель диссертационного совета:
академик, доктор физико-математических наук, профессор

Магомед Фарман оглы Мехтиев

Ученый секретарь диссертационного совета:
кандидат физико-математических наук, доцент

Закир Фарман оглы Ханкишиев

Председатель научного семинара:
доктор математических наук, профессор

Ягуб Амияр оглы Шарифов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Настоящая диссертация посвящена одному направлению чистой математики, актуальному в теоретическом плане и, в тоже время, имеющему прикладные аспекты, а именно вопросам существования, не существования глобальных решений и асимптотике решений вблизи бесконечности полулинейных эллиптических, параболических уравнений, а также систем в неограниченных областях. Математическое моделирование различных явлений и процессов механики, физики, гидродинамики, биологии сводится к исследованию некоторых вопросов для дифференциальных уравнений с частными производными. Вплоть до 50-х годов XX века основным объектом изучения теории уравнений с частными производными служили линейные уравнения. Следует отметить, что к настоящему времени теория линейных уравнений с частными производными эллиптического и параболического типов достаточно хорошо изучена и имеется достаточное количество книг, монографий и статьей посвященных таким уравнениям.

Примерно с середины прошлого века развитие функционального анализа дало сильный толчок развитию теории нелинейных уравнений. Бурное развитие теории нелинейных уравнений связано еще с их тесной связью с задачами прикладного характера. Например, квазилинейное уравнение теплопроводности в определенных условиях описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатическую фильтрацию газов и жидкостей в пористых средах, диффузию нейтронов и альфа-частиц; оно возникает при математическом моделировании процессов химической кинетики, различного рода биохимических реакций, процессов роста и миграции популяций и т.д.

В начале XX века в связи с астрофизическими исследованиями Эмдена и Фаулера возникло уравнение

$$y'' \pm x^{\alpha} |y|^{q-1} y = 0.$$

Оно также встречается в ядерной физике при изучении поведения электронов в тяжелом атоме в работах Томаса и Ферми.

Математическое моделирование некоторых физических процессов, таких как, прогнозирование некоторых процессов теплопередачи, самовозгорание угля, собранного в шахтах, фильтрация воздуха в определенной среде, процесс разделения газов в закрытой среде и т. д. приводят к исследованию вопросов существования, единственности и устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Тот факт, что состояние механических систем, описываемых нелинейными уравнениями, можно предсказать в любой момент времени, делает актуальным вопрос изучения существования глобальных решений таких уравнений (решений, которые могут быть определены в любой момент времени).

В настоящее время задачи, связанные с исследованием существования и отсутствия нетривиальных глобальных решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств вызывают большой интерес, и имеется огромное количество работ посвящённых таким задачам. Например, можно перечислить работы следующих авторов: В.А. Кондратьев, А.А. Коньков, С.Д. Эйдельман, С.И. Похожаев, В.А. Галактианов, Г.Г. Лаптев, В.В. Курта, Ш.М. Насибов, Ф. И. Мамедов, A.B. Aliev, B. Sirakov, C. Bandle, M. Essen, H. Brezis, H. Berestycki, L. Nirenberg, M.-F. Bidaut-Veron, P. Lions, L.Vazquez, H. Chen, M. Fall, B. Gidas, J. Spruck, T. Kato, I. Kombe, V. Liskevich, Z. Sobol, V. Moroz, İ.İ. Skrypnik, Y. Pinchover, R.G. Pinsky, A.Tesei, J. Serrin, H. Zou, M. Surnachev, S.Terracini, Y. Uda, C.P.Wang, S. Zheng, X. Xu, H. Xiong, Y.T. Shen., Y. Yao, Qi. S. Zhang.

Исторически одной из первых была изучена задача Коши для полулинейного параболического уравнения второго порядка

в полупространстве $R^n \times (0,+\infty)$. В 1966 году Фуджита[1] в своей знаменитой работе рассмотрел такую проблему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^q, \quad (q>1), \quad (x,t) \in R^n \times (0,+\infty) \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad u_0(x) \neq 0. \tag{2}$$

Известно, что для произвольного $q>1$ задача (1), (2) имеет локальное классическое решение. Ставиться вопрос: когда существует глобальное решение? Фуджита доказал, что существует значение $q_{cr} = 1 + \frac{2}{n}$ такое, что если $1 < q < q_{cr}$, то как бы мало не было $u_0 \geq 0$ глобальное решение отсутствует, локальное решение определено в ограниченной области по t и неограниченно растет. В то же время было доказано, что при $q > q_{cr}$ для достаточно маленьких u_0 такое решение существует. Позже было показано, что и в случае $q = 1 + \frac{2}{n}$ глобальные решения отсутствуют. Таким образом, появляется так называемый критический показатель нелинейности, разделяющий области значений степени q, в которых задача имеет или не имеет глобального решения. Отсутствие глобального решения означает, что как бы мало ни было начальное возбуждение системы, при некотором конечном значении времени решение уходит на бесконечность, т. е. изучаемый процесс не является устойчивым.

После этой знаменитой работы Фуджиты начал широко изучаться вопрос о том, как размер нелинейности влияет на наличие и отсутствие глобального решения. Работа Фуджиты начала расширяться в различных направлениях. Например,

---

[1] Fujita, H. On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci.Unix, Tokyo, Sect. I, 13, 1966, p.109-124.

вместо R^n брались различные ограниченные и неограниченные области, вместо оператора Лапласа–другие дифференциальные операторы, вместо нелинейности в уравнении (1) - нелинейности иного типа. Еще одно из возможных направлений распространения результата Фуджиты состоит в исследовании существования глобальных положительных решений у системы уравнений реакции-диффузии типа Фуджиты. Обзор таких работ имеется в статьях K. Deng, H.A. Levine[1], M. Fila, A. Levine, Y.A. Uda[2], в монографии С.И. Похожаев, Э. Митидиери[3] и в книгах А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов[4], P. Quittner and P. Souplet[5]. Заметим, что положительные решения представляют особый интерес из-за многообразия приложения, в которых участвуют неизвестные положительные величины.

Одним из основных критериев неугасающего интереса к существованию глобальных решений нелинейных уравнений эллиптического, параболического, гиперболического типа является то, что задачи такого типа имеют широкое применение в некоторых внутренних задачах механики, физики и в то же время математики. Например, в теории химических реакторов, в квантовой механике, механике жидкости, в биологи, в экологии и т. д.

---

[1] Deng, K., Levine, H.A. The role of criticial exponents in blow-up theorems: the sequel. J. Math. Anal. Appl. 243 (2000), no. 1, 85-126.

[2] Fila, M., Levine, A., Uda, Y.A. Fujita-type global existence-global nonexistence theorem for a system of reaction diffusion equations with differing diffusivities, Math. Methods Appl. Sci. 17 (1994), 807-835.

[3] Похожаев, С.И., Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. // Труды МИАН, 234, Наука, М.,2001, 1-383.

[4] А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[5] P. Quittner and P. Souplet Superlinear Parabolic Problems, Berlin, 2007.

Наряду с параболическими уравнениями также активно исследовались вопросы существования или несуществования глобальных решений нелинейных эллиптических и гиперболических уравнений и неравенств. Например, в 1980 году Като[1] доказал, что для гиперболической задачи критический показатель отсутствия глобального решения.

$$q_{cr} = 1 + \frac{2}{n-1}.$$

Вопросам существования глобальных решений стационарных полулинейных уравнений и неравенств, определенных в неограниченных областях, в математической литературе тоже отводится значительное место. Стационарные уравнения описывая стационарные состояния для уравнений реакции-диффузии, которые повсеместно распространены в приложениях, также широко используются в некоторых внутренних задачах математики. Например, проблема нахождения точных оценок в теоремах вложения в пространствах Соболева сводится к проблеме существования глобальных решений стационарных нелинейных уравнений. Стационарные нелинейные уравнения во всем R^n имеют важные приложения в геометрии (см. работы W. Y. Ding и W.-M. Ni[2], Qi.S. Zhang[3]) и результаты о несуществовании имеют прямое отношение к геометрическим приложениям (см. работу C.E. Kenig and W.-M. Ni[4]). Для стационарных уравнений в

---

[1] Като, T. Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations // Commun. Pure and Appl. Math. 1980. V. 33. P. 501–505.

[2] Ding, W. Y. and Ni, W. -M. On the elliptic equation Δu + Ku(n+2)/(n−2) = 0 and related topics, Duke Math. J. 52 (1985), 485–506.

[3] Zhang, Qi S. An optimal parabolic estimate and its applications in prescribing scalar curvature on some open manifolds with Ricci > 0, Math. Ann. 316 (2000), 703–731.

[4] Kenig, C. E. and Ni, W. -M. An exterior Dirichlet problem with applications to some nonlinear equations arising in geometry, Amer. J. Math. 106 (1984), no. 3, 689–702.

неограниченных областях, исторически сложившимися являются следующие две постановки задачи: найти условия, гарантирующие, что всякое решение из заданного класса тривиально (так называемые теоремы типа Лиувилля), и задача нахождения точных оценок при $r \to \infty$ максимального значения решения на сфере радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке (теоремы типа Фрагмена-Линделефа). Хорошо известно, что любая неотрицательная гармоническая функция в R^n является константой. Интерес к целым (глобальным) решениям стационарных нелинейных уравнений возник после пионерских работ Дж.Б. Келлера и Р. Оссермана. С тех пор на протяжении более, чем полувека интерес к этой проблематике не ослабевает, и к настоящему моменту накоплено поистине огромное количество публикаций. Упомянем лишь работы следующих авторов: Х. Берестуки, И. Капуззо-Долцета, Л. Ниренберг, Л. Росси, М.-Ф. Бидо-Верон, Х. Брезис, В. А. Штраусс, К. Кабре, Дж. Л. Вазкез, Л. Верон, Б. Гидас, Дж. Спрук, В.А. Кондратьев, Е.М. Ландис, В.В. Курта, Э. Митидиери и С. И. Похожаев. Имеется также ряд великолепных монографий и обзоров содержащих обширную библиографию. Отсутствие позитивных решений эллиптического уравнения означает, что существующие решения колеблются, что также важная информация в приложениях.

Данная диссертационная работа посвящена получению такого рода результатов. Сначала исследуется вопрос о существовании глобального решения полулинейных параболических уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами по времени и систем таких уравнений в неограниченной области. Затем изучается вопрос отсутствия неотрицательных глобальных решений полулинейных эллиптических, параболических уравнений и систем уравнений второго и четвертого порядка с сингулярным потенциалом во внешних областях. В заключение изучается асимптотика решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка вокруг бесконечности в цилиндрической области.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы являются полулинейные эллиптические, параболические уравнения и системы таких уравнений. Предметом исследования является отсутствие глобальных решений полулинейных эллиптических, параболических уравнений и систем уравнений в бесконечной области, а также исследование асимптотического поведения решений эллиптических уравнений в полуцилиндре.

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы – найти достаточные условия, обеспечивающие отсутствие положительных глобальных решений полулинейных параболических уравнений второго порядка с периодическими по времени коэффициентами и системы таких уравнений в бесконечной области. Получить результаты типа Фуджиты для параболических уравнений второго и четвертого порядков и систем таких уравнений с сингулярным потенциалом. Исследовать асимптотику вблизи бесконечности решений полулинейных эллиптических уравнений на полуцилиндре, удовлетворяющих однородному граничному условию Неймана на боковой поверхности.

Методы исследования. При изучении рассматриваемых вопросов были использованы некоторые методы функционального анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, теории функциональных пространств и метод пробных функций.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, исследование вопросов существования положительных глобальных решений полулинейных параболических уравнений с периодическими по времени коэффициентами со степенной и логарифмической нелинейностью, нахождение точных достаточных условий отсутствия таких решений и уточнение точности полученных условий.
2. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, исследование вопросов существования положительных

глобальных решений полулинейного параболического уравнения с периодическими коэффициентами по времени и с младшими членами, нахождение точных достаточных условий отсутствия таких решений и уточнение точности полученных условий.

3. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, исследование вопросов существования положительных глобальных решений полулинейного параболического уравнения с весом и периодическими коэффициентами по времени и нахождение точных достаточных условий отсутствия таких решений и уточнение точности полученных условий.
4. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, исследование вопросов существования положительных глобальных решений слабо связанных системы полулинейных параболических уравнений с весом и периодическими коэффициентами по времени и нахождение точных достаточных условий отсутствия таких решений и уточнение точности полученных условий.
5. В зависимости от веса, степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства, получение результата типа Фуджиты для полулинейного параболического уравнения с весом и с сингулярным потенциалом.
6. В зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства, получение результата типа Фуджиты для системы полулинейных параболических уравнений с сингулярным потенциалом.
7. Исследование вопросов отсутствия глобальных решений полулинейного бигармонического уравнения с сингулярным потенциалом, и, в зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства нахождение точного критического показателя.
8. Исследование вопросов отсутствия глобальных решений полулинейного бигармонического уравнения типа Бауенди-Грушина с сингулярным потенциалом, и, в зависимости от

степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства нахождение точного критического показателя.

9. Исследование вопросов отсутствия глобальных решений слабосвязанной системы полулинейных бигармонических уравнений с сингулярным потенциалом, и, в зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства, нахождение точного критического показателя.
10. В полуцилиндре исследование асимптотического поведения решений вблизи бесконечности полулинейного эллиптического уравнения второго порядка с оператором Лапласа в главной части и с однородным граничным условием Неймана на боковой части полуцилиндра.
11. В полуцилиндре исследование асимптотического поведения решений вблизи бесконечности полулинейного эллиптического уравнения второго порядка с дивергентной главной части и с однородным граничным условием Неймана на боковой части цилиндра.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Найдено достаточное условие, обеспечивающее отсутствие положительного глобального решения в неограниченной области полулинейных параболических уравнений с периодическими по времени коэффициентами, со степенной и логарифмической нелинейностью; во всех случаях доказана точность полученных достаточных условий;
2. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, найден критический показатель отсутствия положительных глобальных решений полулинейного параболического уравнения с младшими членами и периодическими по времени коэффициентами;
3. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, найдено достаточное условие, обеспечивающее отсутствие положительных глобальных решений полулинейного

параболического уравнения с весом в главной части и периодическими коэффициентами по времени;

4. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, найдено достаточное условие, обеспечивающее отсутствие положительных глобальных решений слабо связанной системы полулинейных параболических уравнений с периодическими коэффициентами по времени;
5. В зависимости от веса, степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства получен результат типа Фуджиты для полулинейного параболического уравнения с весом и с сингулярным потенциалом;
6. В зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства получен результат типа Фуджиты для системы полулинейных параболических уравнений второго порядка с сингулярным потенциалом;
7. В зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства найден точный критический показатель отсутствия глобальных решений полулинейного бигармонического уравнения с сингулярным потенциалом;
8. В зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства найден точный критический показатель отсутствия глобальных решений полулинейного бигармонического уравнения типа Бауенди-Грушина с сингулярным потенциалом;
9. Найдено достаточное условие обеспечивающее отсутствие глобальных решений слабосвязанной системы полулинейных бигармонических уравнений с сингулярным потенциалом;
10. Получено асимптотическое поведение на бесконечности положительных и знакопеременных решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в полуцилиндре с однородным граничным условием Неймана на боковой поверхности.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер и в тоже время имеют прикладные аспекты. Эти результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений, в теоремах вложения, в некоторых задачах механики, физики, биологии, экологии и многих других областях.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах: Механико-математического факультета Бакинского Государственного Университета (рук. проф. З.С.Алиев), Механико-математического факультета Бакинского Государственного Университета (рук. проф. Н.Ш.Искендеров), на общеинститутском семинаре Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики (рук. член-корр. НАНА, проф. М.Дж. Марданов), на семинарах кафедры Дифференциальные и интегральные уравнения Бакинского Государственного Университета (рук. проф. Я.Т. Мегралиева), на семинаре отдела Уравнения математической физики Института Математики и Механики НАН Азербайджана (рук. член-корр. НАНА, проф. Р.В. Гусейнов), на семинаре отдела Уравнения математической физики Института Математики и Механики НАН Азербайджана (рук. А.Ф.Гулиев), на семинаре отдела Дифференциальные уравнения Института Математики и Механики НАН Азербайджана (рук. проф. А.Б. Алиев).

Кроме этого, были сделаны доклады на следующих научных конференциях: на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.-корр. НАНА, профессора И.Т. Мамедова (Баку – 2005), на международной конференции по математике и механике посвященной 70-летному юбилею чл.-корр. НАНА, профессора Б.А. Искендерова (Баку, 2006), на конференции посвященной 100-летнему юбилею со дня рождения чл.-корр. НАНА, профессора Г. Ахмедова (Баку- 2007), на международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики»,

посвящённой 80-летному юбилею чл.-корр. НАНА, профессора Я. Мамедова (Баку, 27 декабря 2010 г.), на международной конференции «Теория функций и проблемы гармонического анализа», посвященной 100-летнему юбилею акад. И.И. Ибрагимова (Баку, 2012 г.), на 6-й международной конференции по гашению и контролю искажений (10-13 сентября 2012 г., Чикаго, США), на европейском математическом конгрессе (ТСМ-2012), (02-07 июля. 2012, Краков), на международной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики» посвященной 90-летию со дня рождения Общенационального лидера Гейдара Алиева (Баку, 2013 г.), на научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 95-летию Бакинского Государственного Университета (2014 г.), на международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвящённой 55 летнему юбилею Института Математики и Механики НАНА (Баку 2014 г.), на VII международной конференции по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям - MADEA-7» (Баку 2015г.), на международном семинаре по «Негармоническому анализу и дифференциальным операторам» (Баку 2016 г.), на международной конференции «Современные проблемы математики и механики» посвящённой 80-летнему юбилею академика Акифа Гаджиева» (Баку 2017 г.), на международной конференции «Современные проблемы математики и механики» посвящённой 60-летнему юбилею Института Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку 2019 г.), на международной конференции «Операторы, функции и системы в математической физике», посвященной 70-летию проф. Г.А. Исаханлы (Баку, 2018), на международном семинаре «Спектральная теория и её приложения», посвящённый 80-летию выдающегося математика, академика Мираббаса Гасымова (Баку 2019 г.), на научной конференции посвященной 99-летию со дня рождения Общенационального лидера азербайджанского народа Гейдара Алиева (2022 г.), на международной конференции «Современные Проблемы

Математики и Механики», посвященной 110-летию со дня рождения академика Ибрагим Ибрагимова (Баку, 2022 г.), на научной конференции «Diferensial və inteqral operatorlar», посвященной 100-летнему юбилею Общенационального лидера Г.А. Алиева (Баку, 2023 г.), на международной конференции «Современные проблемы математики и механики» посвященной 100-летнему юбилею Общенационального лидера Гейдара Алиева (26-28 апреля 2023 г. – Баку).

Личный вклад автора. Все результаты, полученные в диссертации, являются личным вкладом автора.

Публикации автора. Содержание диссертации отражено в 19 статьях и 23 тезисах, 9 из которых включены в международные обобщающие и индексирующие периодические издания.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнения» Механико-математического факультета Бакинского Государственного Университета.

Структура и объём диссертации (в знаках, с указанием объёма каждого структурного подразделения в отдельности) Общий объем диссертационной работы - 379055 знаков (титульная страница - 455 знаков, оглавление - 3472 знаков, введение 69010 знаков, первая глава - 136000 знаков, вторая глава - 28000 знаков, третья глава - 95401 знаков, четвёртая глава - 44000 знаков, заключение - 2717 знаков). Список используемой литературы состоит из 244 наименований.

Основное содержание диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, включающих 12 параграфов, заключения и списка используемой литературы.

Первая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена исследованию вопросов существования положительных глобальных решений полулинейных

параболических уравнений с периодическими коэффициентами по времени в цилиндре, где основание есть внешность некоторого компакта содержащее начало координат. Вопросы существования положительных периодических по времени глобальных решений параболических уравнений также были предметом многочисленных исследований и рассматривались в работах следующих авторов: M.J. Esteban, Y. Giga, N. Mizoguchi, N. Hirano, N. Mizoguchi, J. Huska. Среди ранних работ в этом направлении можно отметить работу Т. Сейдмана[1], в которой исследовалось существование нетривиального периодического решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a(x,t)u^q, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty),\ u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $q > 1$, $a(x,t)$ - периодическая по t функция, $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область. В дальнейшем существование периодических решений у этой задачи при $q > 0$ исследовалось многими авторами. В работе A. Beltramo, P. Hess[2] показано, что при $q = 1$ и при специально выбранных $a(x,t)$ это задача может иметь периодические решения. В работе M.J. Esteban[3] установлено, что при $n \le 2$ для любых $q > 1$, а при $n > 2$ для любых $q \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$ это задача имеет положительные периодические решения при любой положительной функции $a(x,t)$. Кроме того доказано, что если $n > 2$ и $q \ge \frac{n+2}{n-2}$, то

[1] Seidman, T. I. Periodic solutions of a non-linear parabolic equation, Journal of Differential Equations, vol. 19, no. 2, pp. 242-257, 1975.

[2] A. Beltramo, and P. Hess On the principal eigenvalue of a periodic-parabolic operator, Communications in Partial Differential Equations, vol. 9, no. 9, pp. 919-941, 1984.

[3] Esteban, M. J. A remark on the existence of positive periodic solutions of superlinear parabolic problems, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 102, no. 1, pp. 131-136, 1988.

положительные периодические решения отсутствуют. При некоторых ограничениях на функцию $a(x,t)$ в работе P. Quittner[1] установлено, что при любом $q \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$ задача имеет положительные периодические решения.

Сначала вводиться следующие обозначения:

$x = (x_1,...,x_n) \in R^n, \quad n \geq 1, \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $B_R = \{x : |x| < R\}$,

$B_{R_1,R_2} = \{x : R_1 < |x| < R_2\}$, $B'_R = \{x : |x| > R\}$, $Q_T^R = B_R \times (0,T)$,

$Q_T^{R_1,R_2} = B_{R_1,R_2} \times (0,T)$, $Q_T^{R,\infty} = B'_R \times (0,T)$, $Q'_R = B'_R \times (-\infty,+\infty)$,

$S_R = \{x : |x| = R\} \times (-\infty,+\infty)$, $S_T^R = \{x : |x| = R\} \times (0,T)$, Ω - область в R^n, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $Q = \Omega \times (-\infty,+\infty)$.

Под $W_2^{1,1/2}(Q_T)$ понимается пространство функций $u(x,t)$, для которых

$$u(x,t+T) = u(x,t), \; u(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_T) \text{ и}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \int_{\Omega} |u_k(x)|^2 dx < \infty,$$

где

$$u_k(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x,t) \exp\left\{-ik\frac{2\pi}{T}t\right\} dt.$$

Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q_T)} = \|u\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \int_{\Omega} |u_k(x)|^2 dx$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ обозначается пополнение $C^{0,\infty}(Q_T)$ по норме

---

[1] P. Quittner Multiple equilibria, periodic solutions and a priori bounds for solutions in superlinear parabolic problems, Nonlinear Differential Equations and Applications, vol. 11, no. 2, pp. 237-258, 2004.

$\|\cdot\|_{W_2^{1,1/2}(Q_T)}$, где $C^{0,\infty}(Q_T)$ - множество бесконечно гладких, T - периодических по t функций, которые в окрестности $\partial\Omega$ равны нулю.

Параграф 1.1 начинается с вопроса о существовании положительных глобальных решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(A(x,t)\nabla u) + a_0(x,t)|u|^{p-1}u \qquad (3)$$

в цилиндре $Q = \Omega \times (-\infty;+\infty)$, где Ω - внешность компакта в R^n содержащая начало координат, $p > 1$, $A(x,t) = \left(a_{ij}(x,t)\right)_{i,j=1}^{n}$ симметрическая матрица, $a_{ij}(x,t)$, $a_0(x,t)$ - ограниченные, измеримые функции такие, что $a_{ij}(x,t+T) = a_{ij}(x,t)$, $a_0(x,t+T) = a_0(x,t)$ и

$$\lambda_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \lambda_2|\xi|^2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 = const > 0, \qquad (4)$$

для любой $(x,t) \in Q, \xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in R^n$.

Здесь

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),\ A\nabla u = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{i=1}^{n},\ (A\xi,\eta) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j,$$

$\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$, $\eta = (\eta_1....,\eta_n)$, $div(A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j})$.

Решение уравнения (3) называется функция $u(x,t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,1/2}(Q_T) \cap L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)\int_{\Omega} u_k(x)\varphi_{-k}(x)dx + \int_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dxdt =$$

$$= \int_{Q_T} a_0(x,t)|u|^{p-1}u\varphi\,dxdt$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$.

Обозначим

$$L_0 u := div(A(x,t)\nabla u) - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

При доказательстве основных теорем этого параграфа используются следующие две важные леммы.

Лемма 1.1. *Пусть* $n \geq 3$ *и* $u(x,t) \in W_{2,loc}^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{R,\infty})$ *непрерывная, неотрицательная функция в* $\overline{Q}_T^{R,\infty} = Q_T^{R,\infty} \cup S_T^R$ *такая, что* $L_0 u \leq 0$ *в* $Q_T^{R,\infty}$ *и* $u(x,t) > 0$ *на* S_T^R. *Тогда существует* $\alpha_0 = const > 0$ *такая, что* $u(x,t) \geq \alpha_0 |x|^{2-n}$, $(x,t) \in Q_T^{R,\infty}$.

Рассмотрим следующее линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(A(x,t)\nabla u) + Q(x,t)u \quad \text{в} \quad Q_T^{R,\infty}, \tag{5}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ удовлетворяют условию (4),

$Q(x,t+T) = Q(x,t), Q(x,t) \in L_{\infty,loc}(Q_T^{R,\infty})$.

Лемма 1.2. *Существует константа* $C_0 > 0$, *зависящая от* n, λ_1 *и* λ_2 *такая, что если* $Q(x,t) \geq \frac{C_0}{|x|^2}$, *то уравнение (5) не имеет положительных суперрешений в* $Q_T^{R,\infty}$.

Верна следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $n \geq 3$, $a_0(x,t) \geq C|x|^{\sigma}$, $C = const > 0$, $\sigma > -2$ *и* $2 + \sigma + (2-n)(p-1) \geq 0$. *Тогда уравнение (3) не имеет положительных решений в* Q_T.

Сначала показывается, что полученная оценка в теореме точная, т.е. в случае $2 + \sigma + (2-n)(p-1) < 0$ уравнение вида (3) может иметь положительные решения.

Для этого в $Q_T^{R,\infty}$ рассматривается уравнение

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + a_0 |x|^{\sigma} |u|^{p-1} u = 0, \qquad (6)$$

где $a_0 = const > 0,\ p > 1,\ \sigma > -2,\ n \geq 3$. Тогда прямым вычислением можно показать, что функция

$$u(x,t) = a_0^{-\frac{1}{p-1}} \left[\frac{(n-2)(\sigma+2)}{p-1} - \frac{(\sigma+2)^2}{(p-1)^2} \right]^{\frac{1}{p-1}} |x|^{-\frac{\sigma+2}{p-1}} > 0$$

есть положительное решение уравнения (6) при условии $2 + \sigma + (2-n)(p-1) < 0$.

Теорема 1.2. *Пусть* $n \geq 3$, $a_0(x,t) \geq C|x|^{\sigma} \ln^s |x|$, $C = const > 0$. *Если* $2 + \sigma + (2-n)(p-1) > 0$, $s \in (-\infty, +\infty)$ *или* $2 + \sigma + (2-n)(p-1) = 0$, $s \geq -1$, *то уравнение (3) не имеет положительных решений в* $Q_T^{R,\infty}, R > 1$.

Показывается, что условия теоремы 1.2 являются точными, т.е. при $2 + \sigma + (2-n)(p-1) < 0$, $s \in (-\infty, +\infty)$ или $2 + \sigma + (2-n)(p-1) = 0$, $s < -1$ уравнение (3) может иметь положительные решения. Для этого в $Q_T^{R,\infty}$ рассматривается уравнение

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + a_0 |x|^{\sigma} (\ln^s |x|) |u|^{p-1} u = 0, \qquad (7)$$

где $a_0 = const > 0,\ p > 1,\ \sigma > -2,\ n \geq 3$, и показывается, что при указанных условиях уравнение (7) имеет положительное решение. Это решение ищется в виде $u(x) = u(r)$. Тогда после некоторых замен уравнение (7) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\omega_{rr} + a_0 (n-2)^{-(s+2)} \tau^{-2+(\sigma+2(2-n)(p-1))/(n-2)} (\ln^s \tau) |\omega|^{p-1} \omega = 0. \qquad (8)$$

Известно, что уравнение

$$\omega_{\tau\tau} + q(\tau) |\omega|^{p-1} \omega = 0,\ p > 1,\ q(\tau) > 0$$

имеет знакопостоянное решение, если

$$\int_0^{\infty} \tau |q(\tau)| d\tau < \infty. \qquad (9)$$

Очевидно, что если $2+\sigma+(2-n)(p-1)<0$, $s \in (-\infty,+\infty)$ или $2+\sigma+(2-n)(p-1)=0$, $s<-1$, то для уравнения (8) условие (9) выполнено. Значит, уравнение (8) имеет положительное решение. Тогда возвращаясь назад получим, что и уравнение (7) тоже имеет положительное решение.

В конце параграфа 1.1 в цилиндре $Q=\Omega\times(-\infty;+\infty)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_0(x,t)\ln^{p-1}(1+|u|)u, \qquad (10)$$

где $p>1$, коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $a_0(x,t)$ тоже ограниченные измеримые, T - периодические по t функции и удовлетворяют условию (4).

Для этого уравнения доказывается следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть* $n\geq 3$, $a_0(x,t)\geq C|x|^{\sigma}$, $C=const>0$ *и* $2+\sigma+(2-n)(p-1)\geq 0$. *Тогда уравнение (10) не имеет положительных решений в* Q.

Показывается, что полученная оценка в теореме точная, т.е. в случае $2+\sigma+(2-n)(p-1)<0$ уравнение (10) имеет положительные решения. Для этого в $Q_T^{R,\infty}$ рассматривается уравнение

$$Lu\equiv -\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u+a_0|x|^{\sigma}\ln^{p-1}(1+|u|)u=0, \qquad (11)$$

где $a_0=const>0$, $p>1$, $\sigma>-2$, $n\geq 3$.

Методом верхних и нижних функций доказывается, что при $2+\sigma+(2-n)(p-1)<0$ уравнение (11) имеет положительное решение.

Теорема 1.4. *Пусть* $n=1$ *или* $n=2,\ \ a_0(x,t)\ge C|x|^{\sigma},\ \ \sigma>-2,\ C=const>0$. *Тогда при любой* $p>1$ *уравнение (10) не имеет положительных решений в* $Q_T^{R,\infty}$.

В параграфе 1.2 в цилиндре $Q=\Omega\times(-\infty;+\infty)$ исследуется вопрос о существовании положительных решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=div(A(x,t)\nabla u)+h(x,t,u), \qquad (12)$$

где Ω-внешность компакта в R^n содержащая начало координат, $n\ge 3,\ A(x,t)=\left(a_{ij}(x,t)\right)_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij}(x,t)$ также ограничены измеримы, T-периодические по t функции и удовлетворяют условию (4), $h(x,t,u):Q\times[0,+\infty)\to R$ измеримая функция и $h(x,t,u(x,t))\in L_{\infty,loc}(Q_T)$.

Под решением уравнения (12) понимается функция $u(x,t)\in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,1/2}(Q_T)\cap L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}ik\int_{\Omega}u_k(x)\varphi_{-k}(x)dx+\int_{Q_T}(A(x,t)\nabla u,\nabla\varphi)dxdt=\int_{Q_T}h(x,t,u)\varphi dxdt$$

для любой $\varphi(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$.

Как видно здесь нелинейность имеет более общий вид, а именно предполагается, что для всех $(x,t)\in Q$ $h(x,t,u)\ge\tilde{h}(x,u)\ge 0$ и $\tilde{h}:\Omega\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ есть функция, удовлетворяющая следующим условиям (H):

a) для любого $x\in B_e'$

$$\frac{\tilde{h}(x,s_1)}{s_1}\ge\frac{\tilde{h}(x,s_2)}{s_2}\quad\text{если}\quad s_1\ge s_2>0,$$

b) для любого $\tau>0$,

$$\lim_{|x|\to+\infty}\inf\tilde{h}(x,\tau|x|^{2-n})|x|^n>C_0,$$

Если b) не выполняется, то предполагается, что

b1) существует $\sigma_1 \in (0,1)$ такое, что для любого $\tau > 0$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \inf \widetilde{h}(x, \tau|x|^{2-n})|x|^n (\ln|x|)^{\sigma_1} > 0,$$

или

b2) существует $\gamma > 1$ такое, что для любого $\tau > 0, \beta \geq 0$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \inf \widetilde{h}(x, \tau|x|^{2-n}(\ln|x|)^{\beta})|x|^n (\ln|x|)^{-\beta\gamma+1} > 0,$$

и

b3) существует $\sigma_2 > 0$ такое, что для любого $\tau > 0$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} \inf \frac{\widetilde{h}(x, \tau|x|^{2-n}(\ln|x|)^{\sigma_2})}{\tau|x|^{-n}(\ln|x|)^{\sigma_2}} > C_0.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть* $n \geq 3$, $A(x,t)$ *удовлетворяет условию (4). Тогда, если выполняются условия (H), то уравнение (12) не имеет положительных решений в* Q.

В параграфе 1.3 в области Q_R' рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(|x|^{\alpha} A \nabla u\right) + a_0(x,t)|u|^{q-1}u, \qquad (13)$$

где $q > 1$, $\alpha < 2$, $A = A(x,t) = \left(a_{ij}(x,t)\right)_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij}(x,t), a_0(x,t)$ - ограниченные, измеримые, T - периодические по t функции и выполняется условие (4).

Функция $u(x,t)$ называется решением уравнения (13) в $Q_T^{R,\infty}$, если $u(x,t) \in W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{R,\infty}) \cap L_{\infty,loc}(Q_T^{R,\infty})$ и для любой $\varphi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{R,\infty})$ выполняется следующее интегральное тождество:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik) \int_{\Omega} u_k(x)\varphi_{-k}(x)dx + \iint_{Q_T^{R,\infty}} |x|^{\alpha} (A\nabla u, \nabla\varphi)dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_T^{R,\infty}} a_0(x,t)|u|^{q-1}u\varphi dxdt .$$

Доказываются следующие вспомогательные факты.

Обозначим:

$$Lu \equiv div\left(|x|^{\alpha} A\nabla u\right) - \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Лемма 1.3. *Пусть* $W(x,t) \in L_{\infty,loc}(Q_T^{R,\infty})$, $W(x,t+T) = W(x,t)$. *Если* $0 < u(x,t)$ *есть решение неравенства* $Lu + Wu \le 0$, *тогда для любой* $f(x) \in C_0^{\infty}(B_R')$ *выполняется неравенство*

$$\iint\limits_{Q_T^{R,\infty}} W(x,t) f^2(x) dxdt \le C \int\limits_{B_R'} |x|^{\alpha} (\nabla f)^2 dx .$$

Лемма 1.4. *Пусть* $n \ge 3$, $2 - n \le \alpha < 2$, *неотрицательная, непрерывная на* $\overline{Q}_T^{R,\infty}$ *функция* $u(x,t) \in W_{2,loc}^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{R,\infty})$ *удовлетворяет неравенству* $Lu \le 0$ *в* $Q_T^{R,\infty}$ *и* $u(x,t) > 0$ *на* S_R. *Тогда существует* $\beta_0 = const > 0$, *такая, что* $u(x,t) \ge \beta_0 |x|^{2-n-\alpha}$ *для* $(x,t) \in Q_T^{R,\infty}$.

Лемма 1.5. *Пусть* $\alpha < 2$ *и* $\upsilon(x,t)$ *неотрицательное решение уравнения* $L\upsilon + \beta^2 |x|^{\alpha-2}\upsilon = 0$ *в* $Q_T^{R,\infty}$. *Тогда для* $\rho > 2R$ *справедливо следующее неравенство*

$$\iint\limits_{Q_T^{\rho,2\rho}} |x|^{\alpha} |\nabla \upsilon|^2 dxdt \le C \iint\limits_{Q_T^{\rho/2,5\rho/2}} |x|^{\alpha-2} \upsilon^2 dxdt .$$

Лемма 1.6. *Пусть* $\alpha < 2$, $0 \le W(x,t) \in L_{\infty,loc}(Q_T^{R,\infty})$, $W(x,t+T) = W(x,t)$ *и* $|x|^{2-\alpha} W(x,t) \to \infty$, *при* $x \to \infty$. *Тогда положительного решения неравенства* $Lu + W(x,t)u \le 0$ *в* $Q_T^{R,\infty}$ *не существует.*

Лемма 1.7. *Пусть* $\alpha = 2 - n$, $0 \le W(x,t) \in L_{\infty,loc}(Q_T^{R,\infty})$, $W(x,t+T) = W(x,t)$ *и* $|x|^n \ln|x| W(x,t) \to \infty$ *при* $x \to \infty$. *Тогда не*

существует положительное решение неравенства $Lu + W(x,t)u \le 0$ *в* $Q_T^{R,\infty}$.

Используя эти леммы доказываются следующие теоремы.

Теорема 1.6. *Пусть* $n \ge 3,\ q > 1,\ \ 2 - n \le \alpha < 2,$ $a_0(x,t) \ge C|x|^{\sigma},\ \sigma \in R,\ C = const > 0.$ *Если* $\sigma + 2 - \alpha + (2 - n - \alpha)(q-1) \ge 0,$ *то уравнение (13) не имеет положительных решений в* $Q_T^{R,\infty}$.

Теорема 1.7. *Пусть* $n \ge 3,\ q > 1,\ \alpha < 2 - n,\ \ a_0(x,t) \ge C|x|^{\sigma},$ $\sigma \in R,\ \ C = const > 0.$ *Тогда для каждого* $\sigma \in (-\infty, +\infty),\ q > 1$ *уравнение (13) не имеет положительных решений в* $Q_T^{R,\infty}$.

Показывается, что полученная оценка не существования положительных решений точная. Для этого рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(|x|^{\alpha}\nabla u\right) + |x|^{\sigma}|u|^{q-1}u \qquad (14)$$

и решение ищется в виде

$$u(x,t) = A|x|^{-\mu}.$$

Подставляя это в уравнение, показывается, что при $\sigma + 2 - \alpha + (2 - n - \alpha)(q-1) < 0$ уравнение (14) имеет положительное решение

$$u(x,t) = \left[-\frac{\sigma + 1 - \alpha}{q-1} \frac{\sigma + 1 - \alpha + (2 - n - \alpha)(q-1)}{q-1} \right]^{\frac{1}{q-1}} |x|^{-\frac{\sigma + 2 - \alpha}{q-1}}.$$

В параграфе 1.4 первой главы в цилиндре $Q = \Omega \times (-\infty, +\infty)$ рассматривается следующее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + C|x|^{\sigma}|u|^{p-1}u, \qquad (15)$$

где

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv div(A\nabla u)(x,t) + B(x,t)\nabla u(x,t),$$

$$A = A(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{n}, \quad B(x,t) = (b_1(x,t),...,b_n(x,t)).$$

Предполагается, что $n \geq 3$, $p > 1$, $\sigma > -2$, коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ измеримые, T периодические функции по t в $R^n \times (-\infty,+\infty)$ и $a_{ij}(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

I) $A(x,t)$ симметрическая матрица, $a_{ij}(x,t)$ Гельдерова непрерывные функции в $R^n \times (-\infty,+\infty)$ и существует константа $\lambda > 1$ такая, что $\lambda^{-1} I \leq A(x,t) \leq \lambda I$ для всех $(x,t) \in R^n \times [0,T]$.

Полулинейные уравнения с младшими членами рассмотрены в работах следующих авторов: C. Budd, V. Galaktionov, V. Kondratiev, V. Liskevich, Z. Sobol, V. Moroz, D. Smets, A. Tesei, Qi S. Zhang.

Решение уравнения (15) понимается в обобщенном смысле. Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением уравнения (15), если $u(x,t) \in W_{2,loc}^{1,\frac{1}{2}}(Q_T) \cap L_{\infty,loc}(Q_T)$, $B\nabla u \in L_{1,loc}(Q_T)$ и для любой $\varphi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$ выполняется интегральное тождество

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik) \int_{\Omega} u_k \varphi_{-k}(x)dx + \int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dxdt -$$

$$- \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\, dxdt = C\int_{Q_T} |x|^{\sigma} |u|^{p-1} u\varphi\, dxdt.$$

Определение. *Пусть* $H(x) \in L_{1,loc}(R^n)$. *Говорят, что* $H(x)$ *принадлежит классу* $\hat{K}_{n+1,\infty}$, *если*

$$M_{n+1}(H) \equiv \sup_{x \in R^n} \int_{R^n} \frac{|H(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy < \infty .$$

Предполагается, что $B(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям:

II) $|B(x,t)| \le C_3 |V(x)|$, где $V(x) \in \hat{K}_{n+1,\infty}$ и существует такая $\varepsilon > 0$, что $M_{n+1}(V) < \varepsilon$.

III) Существуют константы $C_4 > 0$, $\beta \in (0,1)$ такие, что

$$\int_{Q_T^{R,\infty}} |\overline{B}|^2 \varphi^2 dxdt \le C_4 \int_{Q_T^{R,\infty}} |\nabla \varphi|^2 dxdt ,$$

$$(1-\beta) \int_{Q_T^{R,\infty}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dxdt - \int_{Q_T^{R,\infty}} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{b}_i(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi dxdt \ge 0$$

для любой $\varphi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{R,\infty})$, где $\overline{B} := BX_{Q_T^{R,\infty}}$, $X_{Q_T^{R,\infty}}$ характеристическая функция области $Q_T^{R,\infty}$.

Доказываются следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1.8. *Пусть* $A(x,t)$, $B(x,t)$ *удовлетворяют условиям I), II), III) и* $u(x,t)$ *неотрицательное решение неравенства* $Lu - \dfrac{\partial u}{\partial t} \le 0$ *в* $\overline{Q}_T^{R_0,\infty}$ *такая, что* $u\big|_{|x|=R_0} > 0$. *Тогда существуют константы* $C_0, R > R_0$ *такие, что* $u(x,t) \ge C_0 |x|^{2-n}$ *в* $Q_T^{R,\infty}$.

Лемма 1.9. *Пусть условия леммы 1.8 выполнены,* $0 \le W(x,t) \in L_{loc}^{\infty}(Q_T^{R_0,\infty})$, $W(x,t+T) = W(x,t)$ *и* $|x|^2 W(x,t) \to \infty$ *при* $x \to \infty$. *Тогда в цилиндре* $Q_T^{R_0,\infty}$ *не существует положительных решений неравенства*

$$Lu + W(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \le 0 .$$

В цилиндре $Q_T^{R_0,\infty}$ рассматривается уравнение

$$-\frac{\partial v}{\partial t}+L^{*}v=0, \tag{16}$$

где

$$L^{*}v\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x,t)v).$$

Лемма 1.10. *Пусть выполняются условия I), II), III). Существует такая* $\varepsilon>0$, *что при выполнении условия II) с такой* ε *уравнение (16) имеет решение* $v(x,t)$ *в* $Q_T^{R_0,\infty}$ *и* $C_9\le v(x,t)\le C_{10}$, $0<C_9<C_{10}<\infty$.

В $Q_T^{R,\infty}$ рассматривается линейное уравнение

$$-\frac{\partial v}{\partial t}+Lv+\alpha_1|x|^{-2}v=0, \tag{17}$$

где α_1 достаточно маленькое положительное число.

Лемма 1.11. *Пусть выполняются условия леммы 1.10, и* $v(x,t)$ *неотрицательное решение уравнения (17) в* $Q_T^{R,\infty}$, *такое, что* $v\big|_{|x|=R_0}>0$. *Тогда существуют константы* $C_{11}>0$, $R_1>R$, *такие, что* $v(x,t)\ge C_{11}|x|^{2-n}\log|x|$ *при* $|x|\ge R_1$.

Используя эти леммы доказывается следующая теорема.

Теорема 1.8. *Пусть выполняются условия I), II), III) и* $n\ge 3$, $p>1$, $\sigma>-2$. *Тогда существует такая* $\varepsilon>0$, *что при выполнении условия II) с такой* ε *уравнение (15) при* $2+\sigma+(2-n)(p-1)\ge 0$ *не имеет положительных решений в* Q_T.

В последнем параграфе главы I в области Q_R' изучается следующая слабо связанная система уравнений относительно неизвестных функций u и v:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=div(A\nabla u)+|x|^{\sigma_1}|v|^{q_1},\ \frac{\partial v}{\partial t}=div(A\nabla v)+|x|^{\sigma_2}|u|^{q_2}, \tag{18}$$

где $q_1,q_2>1$ - константы, $A=(a_{ij}(x,t))_{i,j}^{n}$ - симметричная матрица $(a_{ij}=a_{ji})$, элементы $a_{ij}(x,t)$ - ограниченные, измеримые, T - периодические функции и удовлетворяют условию (4).

Решением системы (18) называются такие пары функций $(u(x,t),v(x,t))$, что $u,v\in W_{2,loc}^{1,1/2}\left(Q_T^{R,\infty}\right)\cap L_{\infty,loc}(Q_T^{R,\infty})$ и для любой $\varphi(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}\left(Q_T^{R,\infty}\right)$ выполняются следующие интегральные тождества:

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(ik)\int\limits_{B_R'}u_k(x)\varphi_{-k}(x)dx+\iint\limits_{Q_T^{R,\infty}}(A\nabla u,\nabla\varphi)dxdt=\iint\limits_{Q_T^{R,\infty}}|x|^{\sigma_1}|v|^{q_1}\varphi dxdt,$$

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(ik)\int\limits_{B_R'}v_k(x)\varphi_{-k}(x)dx+\iint\limits_{Q_T^{R,\infty}}(A\nabla v,\nabla\varphi)dxdt=\iint\limits_{Q_T^{R,\infty}}|x|^{\sigma_2}|u|^{q_2}\varphi dxdt.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1.9. *Пусть* $n\ge 3,\ q_1>1,\ q_2>1,\ \sigma_1\in R,\ \sigma_2\in R$. *Если выполняется неравенство* $\max\left\{\dfrac{q_1(\sigma_2+2)+\sigma_1+2}{q_1q_2-1},\dfrac{q_2(\sigma_1+2)+\sigma_2+2}{q_1q_2-1}\right\}\ge n-2$, *то система (15) не имеет положительных решений в области* Q_R'.

Показывается, что при

$$\theta_1=\frac{q_1(\sigma_2+2)+\sigma_1+2}{q_1q_2-1}<n-2 \text{ и } \theta_2=\frac{q_2(\sigma_1+2)+\sigma_2+2}{q_1q_2-1}<n-2,$$

система

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+|x|^{\sigma_1}|v|^{q_1},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\Delta v+|x|^{\sigma_2}|u|^{q_2}$$

имеет глобальное положительное решение (u,v) в виде $u=A|x|^{-\theta_1}$, $v=B|x|^{-\theta_2}$, где константы A и B удовлетворяют равенствам

$$A\theta_1(\theta_1+2-n)+B^{q_1}=0,\quad B\theta_2(\theta_2+2-n)+A^{q_2}=0.$$

В главе 2 исследуются задачи типа Фуджиты для полулинейного параболического уравнения с сингулярным потенциалом и системы таких уравнений

В первом параграфе в цилиндре, где основание есть внешность некоторого компакта, содержащая начало координат, рассматривается полулинейное параболическое уравнение с

весом, с сингулярным потенциалом, а во втором параграфе в таком же цилиндре рассматривается система полулинейных параболических уравнений второго порядка с сингулярным потенциалом. В зависимости от веса, степени нелинейности, коэффициента сингулярности, размерности пространства, найдено достаточное условие обеспечивающее отсутствие глобальных решений. Результаты типа Фуджиты для систем нелинейных эллиптических, параболических уравнений ранее исследовалось в работах Gabriella Caristi; H. Chen, R. Peng and F. Zhou; M. Escobedo, M.A. Herrero; M. Escobedo and H. A. Levine; Wei Guo, Wenjie Gao, Bin Guo; K. Mochizuki and Q. Huang; A. Quaas, B. Sirakov; J. Serrin, H. Zou; Faten Toumi; Y. Uda.

Используются следующие обозначения:

$Q_R = B_R \times (0,+\infty)$, $Q'_R = B'_R \times (0,+\infty)$, $C^{2,1}_{x,t}(Q'_R)$ - множество функций дважды непрерывно дифференцируемых по x и непрерывно дифференцируемых по t в Q'_R.

В параграфе 2.1, в области Q'_R, рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(|x|^{\alpha}\nabla u\right) + C_0|x|^{\alpha-2}u + |x|^{\sigma}|u|^{q}, \tag{19}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \tag{20}$$

где $q>1$, $\alpha<2$, $\sigma+2-\alpha>0$, $0 \leq C_0 \leq \left(\frac{\alpha+n-2}{2}\right)^2$, $u_0(x) \in C(B'_R)$.

Исследуется вопрос существования неотрицательных глобальных решений этой задачи. Решение понимается в классическом смысле.

Вводятся обозначения:

$$C_0^* = \left(\frac{\alpha+n-2}{2}\right)^2,\ D = \sqrt{C_0^* - C_0},\ \lambda_{\pm} = -\frac{\alpha+n-2}{2} \pm D.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $n \ge 3,\ q > 1,\ \alpha < 2,\ \sigma + 2 - \alpha > 0$ *и при* $0 \le C_0 < C_0^*,\ \ q \le 1 + \dfrac{\sigma + 2 - \alpha}{\lambda_+ + n}$, *а при* $C_0 = C_0^*,\ \ q < 1 + \dfrac{\sigma + 2 - \alpha}{\lambda_+ + n}$. *Тогда задача (19), (20) не имеет глобальных неотрицательных решений.*

В параграфе 2.2, в области Q_R', рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha_1 \Delta u + \dfrac{C_1}{|x|^2} u + |x|^{\sigma_1} v^{q_1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \alpha_2 \Delta v + \dfrac{C_2}{|x|^2} v + |x|^{\sigma_2} u^{q_2} \end{cases} \tag{21}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), v\big|_{t=0} = v_0(x), \tag{22}$$

где $u_0(x), v_0(x) \in C(B_R')$, $u_0(x) \ge 0$, $v_0(x) \ge 0$, $\alpha_i > 0, \sigma_i > -2$,

$0 \le C_i < \alpha_i \left(\dfrac{n-2}{2} \right)^2$, $q_i > 1$, $i = 1,2$.

Под глобальным решением задачи (21), (22) понимается такие пары функций (u, v), что $u, v \in C_{x,t}^{2,1}(Q_R') \cap C(B_R' \times [0, +\infty))$, и u, v удовлетворяют системе (21) в каждой точке Q_R' и начальному условию (22) при $t = 0$.

Вводятся обозначения:

$$D_1 = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2} \right)^2 - \frac{C_1}{\alpha_1}},\ \ D_2 = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2} \right)^2 - \frac{C_2}{\alpha_2}},$$

$$\lambda_1^+ = -\frac{n-2}{2} + D_1, \quad \lambda_1^- = -\frac{n-2}{2} - D_1,$$

$$\lambda_2^+ = -\frac{n-2}{2} + D_2, \quad \lambda_2^- = -\frac{n-2}{2} - D_2,$$

$$\theta_1 = \frac{\sigma_1 + 2 + q_1(\sigma_2 + 2)}{q_1 q_2 - 1} - \lambda_1^+ - n,$$

$$\theta_2 = \frac{\sigma_2 + 2 + q_2(\sigma_1 + 2)}{q_1 q_2 - 1} - \lambda_2^+ - n.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $n > 2$, $\alpha_i > 0$, $\sigma_i > -2$, $0 \le C_i < \alpha_i \left(\frac{n-2}{2} \right)^2$ *и* $\max(\theta_1, \theta_2) \ge 0$, $i = 1,2$. *Если* $u(x,t) \ge 0$, $v(x,t) \ge 0$ *есть решение задачи (21), (22), то* $u(x,t) \equiv 0$, $v(x,t) \equiv 0$.

Глава 3, состоящая из трех параграфов посвящена вопросу существования неотрицательных решений полулинейных эллиптических, параболических уравнений с бигармоническим оператором в главной части и систем таких уравнений.

В первых двух параграфах этой главы исследуется вопрос об отсутствии глобальных решений полулинейных эллиптических, параболических уравнений четвертого порядка с сингулярным потенциалом, и, в зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства, найден точный критический показатель. В третьем параграфе найден точный критический показатель отсутствия глобальных решений системы полулинейных параболических уравнений четвертого порядка с сингулярным потенциалом.

Аналогичные вопросы для слабо нелинейных уравнений с бигармоническим оператором рассмотрены различными авторами: Г.Г. Лаптев, Ю.В. Володин, X.Xu, V. Ghergu, S.D. Taliaferro, H. Xiong, Y.T. She, P.C. Carriao, R. Demarque, O.H. Miyagaki, Y. Yao, R. Wang, Y. Shen.

В параграфе 3.1, сначала в B_R' исследуется уравнение

$$\Delta^2 u - \frac{C}{|x|^4} u - |x|^\sigma |u|^q = 0, \qquad (23)$$

где $q > 1$, $0 \le C \le (n(n-4)/4)^2$, $\sigma > -4$, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

Изучается вопрос о несуществовании глобального решения уравнения (23), удовлетворяющего условиям

$$\int\limits_{\partial B_R} u dx \geq 0\,, \quad \int\limits_{\partial B_R} \Delta u dx \leq 0. \tag{24}$$

Под глобальным решением задачи (23),(24) понимается функция $u(x) \in C^4(\overline{B}'_R)$, удовлетворяющая условию (24) на границе и уравнению (23) в каждой точке B'_R.

Для краткости записи вводятся обозначения:

$$\sqrt{(n-2)^2 + C} = D, \quad \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 \pm D} = \alpha_{\pm}\,.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $n > 4, \quad \sigma > -4, \quad 0 \leq C < (n(n-4)/4)^2$ *и* $1 < q \leq 1 + \dfrac{\sigma + 4}{(n-4)/2 + \alpha_-}$. *Если* $u(x)$ *решение уравнения (23) в* B'_R, *удовлетворяющее условию (24), то* $u \equiv 0$.

Затем в параграфе 3.1 в области Q'_R рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} |x|^{\lambda} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u^p + \dfrac{C_0}{|x|^4} u^p + |x|^{\sigma} |u|^q & (25) \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, & (26) \\ \displaystyle\int\limits_0^T \int\limits_{\partial B_R} u dx dt \geq 0, \int\limits_0^T \int\limits_{\partial B_R} \Delta u^p dx dt \leq 0, \ \forall T > 0, & (27) \end{cases}$$

где $n > 4,\ q > 1,\ 0 \leq C_0 < \left(\dfrac{n(n-4)}{4}\right)^2,\ \sigma > -4,\ u_0(x) \in C(\overline{B}'_R)$.

Функция $u(x,t) \in C^{4,1}_{x,t}(Q'_R) \cap C^{2,0}_{x,t}(\overline{B}'_R \times [0,+\infty))$ *называется решением задачи (25)-(27), если* $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению (25) в каждой точке* Q'_R, *условию (26) при* $t = 0$ *и* условию (27) при $|x| = R$. Здесь $C^{4,1}_{x,t}(Q'_R)$ - множество функций,

четырежды непрерывно дифференцируемых по x и непрерывно дифференцируемых по t в Q'_R.

Верна следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть* $n > 4,\ \sigma > -4,\ 1 \le p < q$,

$0 \le C_0 < \left(\frac{n(n-4)}{4}\right)^2$ *и* $q \le p + \frac{\sigma+4}{\frac{n+4}{2} + \lambda + \alpha_-}$. *Если* $u(x,t)$ *решение задачи (25)-(27), то* $u(x,t) \equiv 0$.

В параграфе 3.2 изучается вопрос отсутствия неотрицательных решений уравнений типа Бауенди-Грушина с бигармоническим оператором в главной части. Уравнения типа Бауенди-Грушина рассматривались в работах M.S.Baouendi; Lorenzo D'Ambrosioa, and Sandra Lucente; V.A. Grushin; I. Kombe; Farman Mamedov и т.д..

Вводятся следующие обозначения:

$$x = (x_1,...,x_n) \in \mathrm{R}^n,\ y = (y_1,...,y_m) \in \mathrm{R}^m,\ |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ |y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2},$$

$$B_x(r) = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| < r\},\ B_y(r) = \{y \in \mathrm{R}^m : |y| < r\},$$

$$S_x(r) = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| = r\},\ S_y(r) = \{y \in \mathrm{R}^m : |y| = r\},$$

$$B(r) = B_x(r) \times B_y(r),\ B_x(r_1, r_2) = \{x \in \mathrm{R}^n : r_1 < |x| < r_2\},$$

$$B_y(r_1, r_2) = \{x \in \mathrm{R}^m : r_1 < |y| < r_2\},\ B(r_1, r_2) = B_x(r_1, r_2) \times B_y(r_1, r_2),$$

$$B'_x(R) = \mathrm{R}^n \setminus B_x(R), B'_y(R) = \mathrm{R}^m \setminus B_y(R),\ B'(R) = B'_x(R) \times B'_y(R),$$

$$\partial B'(R) = S_x(R) \times B'_y(R) \cup B'_x(R) \times S_y(R),\ B'_x(1) = B'_x, B'_y(1) = B'.$$

В области $B'(R)$ рассматривается уравнение

$$\Delta_x\left(|x|^{\alpha} \Delta_x u\right) + \Delta_y^2 u - \frac{C_1}{|x|^{4-\alpha}} u - \frac{C_2}{|y|^4} u - |x|^{\sigma_1} |y|^{\sigma_2} |u|^q = 0, \qquad (28)$$

где $\alpha < 4,\ \sigma_1, \sigma_2 \in R,\ q > 1,\ 0 \le C_1 < \left(\dfrac{(n-\alpha)(n+\alpha-4)}{4} \right)^2$,

$0 \le C_2 < \left(\dfrac{m(m-4)}{4} \right)^2$, $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\Delta_y^2 = \Delta_y(\Delta_y)$, $\Delta_y = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2}{\partial y_i^2}$.

Исследуется вопрос отсутствия решений уравнения, удовлетворяющих следующим условиям:

$$u \ge 0,\ \Delta u \le 0 \text{ на } \partial B'(R). \qquad (29)$$

Решение задачи (28),(29) понимается в классическом смысле, а именно функция $u(x, y) \in C^4(B'_R) \cap C^3(\overline{B'_R})$ удовлетворяющая уравнению (28) в каждой точке и условию (29) на $\partial B'_R$, называется глобальным решением задачи (28),(29).

Вводятся обозначения:

$$D_1 = \sqrt{\left(\frac{(n-2)(\alpha-2)}{2} \right)^2 + C_1}, \quad D_2 = \sqrt{(m-2)^2 + C_2},$$

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha-2}{2} \right)^2 \mp D_1}, \qquad \text{при } 2 \le \alpha < 4,$$

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha-2}{2} \right)^2 \pm D_1}, \qquad \text{при } \alpha < 2,$$

$$\beta_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{m-2}{2} \right)^2 + 1 \pm \sqrt{D_2}}, \qquad \gamma = \frac{\dfrac{2\sqrt{D_1}}{|\alpha-2|} - \alpha_+}{\alpha_-},$$

$$a = \frac{m+4}{2} + \beta_- - \sigma_2 \frac{1}{q-1} = \frac{m+4}{2} + \beta_- - \sigma_2(q'-1),$$

$$b = \frac{n+4-\alpha}{2} + \alpha_- - \sigma_1(q'-1),$$

где $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

Теорема 3.3. *Пусть* $\alpha < 4$, $n > 4 - \alpha$, $m > 4$,

$$0 \le C_1 < \left(\frac{(n-\alpha)(n+\alpha-4)}{4} \right)^2, \quad 0 \le C_2 < \left(\frac{m(m-4)}{4} \right)^2 \quad u$$

a) $\sigma_1 > 0, \ \sigma_2 > 0, \ 1 < q \le \min\left\{ 1 + \dfrac{\sigma_1}{\dfrac{n-\alpha+4}{2} + \alpha_-}, 1 + \dfrac{\sigma_2}{\dfrac{m+4}{2} + \beta_-} \right\},$

b) $\sigma_1 > 0, \ \sigma_2 > -4, \ q > \max\left\{ 1, 1 + \dfrac{\sigma_2}{\dfrac{m+4}{2} + \beta_-} \right\}$ *u*

$$q < 1 + \frac{\sigma_1}{\dfrac{n-\alpha+4}{2} + \alpha_-}, \ q \le 1 + \frac{\sigma_2 + 4}{\dfrac{m+4}{2} + \beta_- - 4} \quad \textit{или}$$

$$q = 1 + \frac{\sigma_1}{\dfrac{n-\alpha+4}{2} + \alpha_-}, \ q < 1 + \frac{\sigma_2 + 4}{\dfrac{m+4}{2} + \beta_- - 4},$$

c) $\sigma_1 > \alpha - 4, \ \sigma_2 > 0, \ q > \max\left\{ 1, 1 + \dfrac{\sigma_1}{\dfrac{n-\alpha+4}{2} + \alpha_-} \right\}$ *u*

$$q < 1 + \frac{\sigma_2}{\dfrac{m+4}{2} + \beta_-}, \ q \le 1 + \frac{\sigma_2 + 4 - \alpha}{\dfrac{n+\alpha-4}{2} + \alpha_- - 4} \quad \textit{или} \quad q = 1 + \frac{\sigma_2}{\dfrac{m+4}{2} + \beta_-},$$

$$q < 1 + \frac{\sigma_1 + 4 - \alpha}{\dfrac{n+\alpha-4}{2} + \alpha_-},$$

d)

$$4-\alpha+\sigma_1+\frac{4-\alpha}{4}\sigma_2>0,\max\left\{1,1+\frac{\sigma_1}{\frac{n-\alpha+4}{2}+\alpha_-},1+\frac{\sigma_2}{\frac{m+4}{2}+\beta_-}\right\}<$$

$$<q\le 1+\frac{4-\alpha+\sigma_1+\frac{4-\alpha}{\alpha}\sigma_2}{\frac{n-\alpha+4}{2}+\alpha_-+\frac{4-\alpha}{4}\left(\frac{m-4}{2}+\beta_-\right)}.$$

Если $u(x,y)$ *решение задачи (28),(29), то* $u\equiv 0$.

В параграфе 3.3 в области Q_R' рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\Delta^2 u_1-\frac{C_1}{|x|^4}u_1&=|x|^{\sigma_1}|u_2|^{q_1}\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+\Delta^2 u_2-\frac{C_2}{|x|^4}u_2&=|x|^{\sigma_2}|u_1|^{q_2}\end{aligned}\qquad(30)$$

с начальным условием

$$|u_i|_{t=0}=u_{i0}(x)\ge 0 \qquad(31)$$

и условиями

$$\int_0^T\int_{\partial B_R}u_i\,dxdt\ge 0,\quad \int_0^T\int_{\partial B_R}\Delta u_i\,dxdt\le 0,\forall T>0, \qquad(32)$$

где

$$n>4,\ q_i>1,\ \sigma_i\in R,\ 0\le C_i<\left(\frac{n(n-4)}{4}\right)^2,\ u_{i0}(x)\in C(B_R'),\Delta^2 u=\Delta(\Delta u).$$

Под глобальным решением задачи (30)-(32) понимается пара функций (u_1,u_2), таких, что $u_1(x,t),u_2(x,t)\in C_{x,t}^{4,1}(Q_R')\cap C_{x,t}^{3,0}(\overline{B}_R'\times(0,+\infty))\cap C(\overline{B}_1'\times[0,+\infty))$ и удовлетворяют системе (30) в каждой точке, начальному условию (31) и условиям (32).

Используются следующие обозначения:

$$D_i = \sqrt{(n-2)^2 + C_i}, \quad \lambda_i^{\pm} = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 \pm D_i},$$

$$\mu_i = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{D_i - \lambda_i^+}{\lambda_i^-}\right), \quad \overline{\mu}_i = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D_i - \lambda_i^+}{\lambda_i^-}\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1^- + \sigma_1 + \frac{n+4}{2}}{\lambda_2^- + \frac{n+4}{2}}, \ \alpha_2 = \frac{\lambda_2^- + \sigma_2 + \frac{n+4}{2}}{\lambda_1^- + \frac{n+4}{2}},$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda_1^- + \sigma_1 + 4 + \frac{n+4}{2}}{\lambda_2^- + \frac{n-4}{2}}, \ \beta_2 = \frac{\lambda_2^- + \sigma_2 + 4 + \frac{n+4}{2}}{\lambda_1^- + \frac{n-4}{2}},$$

$$\theta_1 = \frac{\sigma_1 + 4 + q_1(\sigma_2 + 4)}{q_1 q_2 - 1} - \lambda_1^- - \frac{n+4}{2},$$

$$\theta_2 = \frac{\sigma_2 + 4 + q_2(\sigma_1 + 4)}{q_1 q_2 - 1} - \lambda_2^- - \frac{n+4}{2}, \ \ i = 1,2.$$

Теорема 3.4. *Предположим, что* $n > 4$, $\beta_i > 1$, $0 \le C_i < \left(\frac{n(n-4)}{4}\right)^2$ *и* $1 < q_i \le \beta_i$, $\max(\theta_1, \theta_2) \ge 0$, $(q_1, q_2) \ne (\alpha_1, \beta_2)$ *в случае* $\alpha_1 > 1$, $(q_1, q_2) \ne (\beta_1, \alpha_2)$ *в случае* $\alpha_2 > 1$, $i = 1,2$. *Тогда нетривиальные глобальные решения задачи (30)-(32) не существуют.*

Глава 4 посвящена исследованию асимптотического поведения вблизи бесконечности решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на полуцилиндре, удовлетворяющих однородному условию Неймана на боковой поверхности.

В параграфе 4.1 исследуется асимптотическое поведение решений вблизи бесконечности полулинейного эллиптического уравнения второго порядка с оператором Лапласа в главной

части. Аналогичные задачи с нелинейностью вида $|u|^{\sigma-1}u$ исследованы в работах Wei Guo, Xinyue Wang and Mingjun Zhou; T.S. Khachlayev; V.A. Kondratiev, Yu.V Egorov, O.A Oleinik; V.A. Kondratiev, L.Veron; A. Pazy; Y. Pinchover.

Пусть G ограниченная область в R^n с Липшицевой границей. Вводятся обозначения:

$\Pi_{a,b} = G \times (a,b), \Pi_{a,\infty} = \Pi_a, \Gamma_{a,b} = \partial G \times (a,b)$, $\Gamma_{a,\infty} = \Gamma_a$.

В параграфе 4.1 изучается поведение на бесконечности решения уравнения

$$u_{tt} + \Delta u - |u|^{\sigma} = 0 \text{ в } \Pi_0, \tag{33}$$

удовлетворяющего условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_0, \tag{34}$$

где $\sigma > 1$, n единичный вектор внешней нормали к ∂G.

В качестве решения задачи (33),(34) понимается обобщенное решение. Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением уравнения (33), удовлетворяющим условию (34), если $u(x,t) \in W_2^1(\Pi_{a,b}) \bigcap L_\infty(\Pi_{a,b})$ при любой $0 < a,b < \infty$ и имеет место равенство:

$$\int\limits_{\Pi_{a,b}} u_t \varphi_t dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi_{a,b}} u_{x_i} \varphi_{x_i} dxdt + \int\limits_{\Pi_{a,b}} |u|^{\sigma} \varphi dxdt = 0$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ такой, что

$\varphi(x,a) = \varphi(x,b) = 0.$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 4.1. *а) Если* $u(x,t) > 0$ *решение уравнения (33), удовлетворяющее условию (34), тогда* $u(x,t) = O\left(t^{-\frac{2}{\sigma-1}}\right)$;

б) Если $u(x,t)$ *решение уравнения (33), удовлетворяющее условию (34), которое меняет знак в каждой области* Π_a, $a>0$, *то*

$$u(x,t)=O(e^{-ht}),$$

где h *не зависит от* $u(x,t)$.

В параграфе 4.2 исследуется поведение на бесконечности решений уравнения:

$$u_{tt}+Lu-(t+1)^{\mu}\left|u\right|^{\sigma}=0 \text{ в } \Pi_0 \tag{35}$$

удовлетворяющих условию:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(x_i,n) \quad на \quad \Gamma_0, \tag{36}$$

где $\sigma>1, \mu>-2$, n-единичный вектор внешней нормали к ∂G и L - оператор вида

$$L\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

коэффициенты $a_{ij}(x), a_i(x)$ ограниченные, измеримые функции, $a_{ij}=a_{ji}$ и выполнено условие (4).

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 4.2. *а) Если* $u(x,t)>0$ *решение уравнения (35), удовлетворяющее условию (36), тогда* $u(x,t)=O(t^{-\frac{\mu+2}{\sigma-1}})$.

б) Если $u(x,t)$ *решение уравнения (35), удовлетворяющее условию (36), которое меняет знак в каждой области* Π_a, $a>0$, *тогда*

$$u(x,t)=O(e^{-ht}).$$

где h *не зависит от* $u(x,t)$.

Выводы

Диссертационная работа посвящена вопросам существования глобальных решений и асимптотике решений вблизи бесконечности полулинейных эллиптических, параболических уравнений второго и четвертого порядков, а также систем таких уравнений в неограниченных областях.

Сначала решается задача об отсутствии глобальных решений полулинейных параболических уравнений с периодическими по времени коэффициентами и системы таких уравнений, а затем полулинейных эллиптических и параболических уравнений второго и четвертого порядка с сингулярным потенциалом и систем таких уравнений. Изучено также асимптотическое поведение решений полулинейных эллиптических уравнений вблизи бесконечности в цилиндрической области.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Найдено достаточное условие, обеспечивающее отсутствие положительного глобального решения в неограниченной области полулинейных параболических уравнений с периодическими по времени коэффициентами со степенной и логарифмической нелинейностью; во всех случаях доказана точность полученных достаточных условий;
2. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, найден критический показатель отсутствия положительных глобальных решений полулинейного параболического уравнения с младшими членами и периодическими по времени коэффициентами;
3. В цилиндре, основанием которого является внешность некоторого компакта, найдено достаточное условие, обеспечивающее отсутствие положительных глобальных решений полулинейного параболического уравнения с весом и периодическими по времени коэффициентами;
4. В цилиндре, где основание внешность некоторого компакта, найдено достаточное условие, обеспечивающее отсутствие

положительных глобальных решений слабо связанной системы полулинейных параболических уравнений с периодическими по времени коэффициентами;

5. В зависимости от веса, степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства получен результат типа Фуджиты для полулинейного параболического уравнения с весом и сингулярным потенциалом;
6. В зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства получен результат типа Фуджиты для системы полулинейных параболических уравнений второго порядка с сингулярным потенциалом;
7. Получены точные оценки отсутствия глобальных решений полулинейных бигармонических уравнений с сингулярным потенциалом, и, в зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства найден критический показатель;
8. Получены точные оценки отсутствия глобальных решений полулинейного бигармонического уравнения типа Бауенди-Грушина с сингулярным потенциалом;
9. Найдено достаточное условие обеспечивающее отсутствие глобальных решений слабосвязанной системы полулинейных бигармонических уравнений с сингулярным потенциалом и в зависимости от степени нелинейности, коэффициента сингулярности и размерности пространства;
10. Получена полная асимптотика на бесконечности решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в полуцилиндре с однородным граничным условием Неймана на его боковой поверхности.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Багыров, Ш.Г., О существовании положительного решения нелинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени // Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.-корр. НАНА, профессора И.Т. Мамедова, Баку – 2005, с.48.
2. Багиров, Ш.Г., Об асимптотических свойствах решений нелинейного эллиптического уравнения // Тезисы XII Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летному юбилею чл.-корр. НАНА, профессора Б.А. Искендерова, Баку, 2006, стр.48.
3. Багыров, Ш.Г. О существовании положительного решения нелинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени // - Москва: Дифференциальные уравнения, - 2007. т.43, № 4, - с. 562–565.
4. Bağırov, Ş.H., Yusifova, P.N., Qeyri-xətti elliptik tənliyin paraboloid tipli oblastda həllinin asimptotikası // Yəhya Məmmədovyn anadan olmasının 80 illik yubileyinə həsr olunmuş Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri adlı Beynəlxalq konfransının materialları, Bakı 27 dekabr, 2010, səh. 14-15.
5. Bagirov, Shirmayil G. On asymptotic properties of solutions to nonlinear elliptic equation // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2010, №4, vol.XXX, pp.35-44.
6. Bagirov, Shirmayil G. On asymptotic properties of solutions of nonlinear elliptic equation // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2011, №1, vol.XXXI, pp.33-44.
7. Guseynov, Sharif E., Aleksejeva Jekaterina V., Timoshchenko, Julia and Bagirov, Shirmail G. Mathematical of biogas production in the household solid waste landfill // Book of Abstracts of the Eurepean Congress of Mathematics (TCM-2012), July 02-07. 2012, Krakow, 1p., (taking as an example the “Kivites” landfill of the Liepaja region in Latvia)

8. Rimshans, J.S., Kobasko, N.I., Guseynov, Sh.E., Bagirov, Sh.G., On direct and inverse initial boundary value problems for intensive quenching processes // Proceedings of the 6th International Quenching ,and Control of Dislortion Conference, September 10-13,2012,Chicago,USA,12p
9. Багыров, Ш.Г. О существовании положительного решения полулинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени // - Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, - 2013. №3, - с. 39-47.
10. Bağırov, Ş.H., Salamova, A.S. Məhdud oblastda qeyri-xətti elliptik tənliyin müsbət həllinin varlığı // Azərbaycanın Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 90 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı respublika elmi konf.mater., s.80, 07-08 may, 2013.
11. Багыров, Ш.Г., Векилов, М.М. О существовании положительного решения полу-линейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэф-фициентами по времени // Heydər Əliyevin anadan olmasının 90 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və informatikanın aktual problemləri" Beynəlxalq konf. tezisləri, s.140, 29-31 may, 2013.
12. Багыров, Ш.Г. Отсутствие положительных решений для полулинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими 195 коэффициентами по времени // - Москва: Дифференциальные уравнения, - 2014. т. 50, № 4, - с. 551–555.
13. Багыров, Ш.Г., Векилов, М.М., Асимптотика решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка в цилиндрических областях // AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda beynəlxalq elmi konfrans, Bakı, 2014, pp. 98.

14. Bagirov, Sh.G. On behavior at infinity of the solutions of a semilinear elliptic equation of second order // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 41 (1), 94-103 (2015).
15. Bagirov, Sh.G., Garayev, T.Z. Absence of positive solutions of a semi-linear parabolic equation with lowest derivatives and time periodic coefficients in external domains // Caspian journal of applied mathematics, ecology and economics vol. 3, no2 (2015) pp. 85-95.
16. Bagirov, Sh.H. Absence of positive solutions of a semilinear parabolic equation with lower derivatives and periodic time coefficients in external domains // Azerbaijan-Turkey-Ukrainian international conference "Mathematical analysis, differential equations and their applications, september 08-13, 2015, Baku, pp. 28-29.
17. Bagirov, Shirmail G., Aliyev, Mushfiq J. On behavior at infinity of the solutions of a semilinear elliptic equation of second order // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences 36 (4), 63-69 (2016).
18. Bagirov, Sh.H., Vakilov, M.M. On absence of solutions of a semi-linear elliptic equation with biharmonic operator in the exterior of a ball // "Qeyri-harmonik analiz və diferensial operatorlar" adlı beynəlxalq seminarda (Bakı, 25-27 may, 2016), səh.26-27.
19. Багыров, Ш.Г., Кязымзаде Н.Н. Отсутствие глобальных решений полулинейного параболического уравнения с бигармоническим оператором // AMEA-nın müxbir üzvü, prof. Qoşqar Əhmədovun anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş respublika elmi konfransı, 02-03 sentyabr 2017, Bakı, səh.165.
20. Bagirov, Sh. G., Absence of positive solution of a second order semilinear parabolic equation with periodic coefficients in time // Proceedings of the International conference devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev "Modern problems of mathematics and mechanics", 6-8 dekabr, Bakı, 2017, səh 53.

21. Bagyrov, Sh, Aliyev, M. J. The existence of global solutions of a semi linear parabolic equation with a singular potential // Caspian journal of applied mathematics, ecology and economics Vol. 5, No1 (2017) pp. 3-15.
22. Багыров, Ш.Г. Отсутствие положительных глобальных решений полулинейного параболического уравнения с сингулярным потенциалом // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2017, №1, с. 108-115.
23. Bagirov, Shirmail G. The absence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with a singular potential, // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics (PIMM), National Academy of Sciences of Azerbaijan 2017, Volume 43, Issue 2, 296-304.
24. Багыров, Ш.Г. Об отсутствии неотрицательных глобальных решений полулинейного параболического уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2018, N1, с. 70-78.
25. Bagirov, Sh.G. Nonexistence of Solutions of a Semilinear Biharmonic Equation with Singular Potential // Math. Notes, 103 (1), 23-32 (2018) (in Russian).
26. Bagyrov, Shrmayil G. On non- existence of positive periodic solution for second order semilinear parabolic equation // Azerbaijan Journal of Mathematics, Vol 8, No 2 (2018): July. 163-180.
27. Bagyrov, Sh.G. Nonexistence of global solutions to the system of semilinear parabolic equations with biharmonic operator and singular potential // Electron J. Differ. Equ. 2018 (9), 1-13 (2018).
28. Багыров, Ш.Г., Алиев, М. Отсутсвие глобальных положительных решений слабо связанных систем полулинейных параболических уравнений с периодическими коэффицентами по времени // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference, İnternational

conference dedicated to Hamlet İsaxanlı 70th annivesary, may 21–24, 2018, Khazar University, Baku, Azerbaijan.
29. Bagyrov, Sh.G., Aliyev, M.C., The absence of global solutions to a semilinear parabolic equation with a biharmonic operator in the main part. //AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri" mövzusunda beynəlxalq elmi konfrans, Bakı, 2019, pp. 151-152.
30. Bagirov, Sh.H. Absence of a global solution of a semilinear parabolic equation with a biharmonic operator in the principal part // International Workshop dedicated to the 80th anniversary of an academician Mirabbas Geogja oğlu Gasymov, Spectral Theory and its applications, Baku, june 7-8, 2019, pp. 53-56.
31. Багыров Ш.Г. Отсутствие глобальных решений полулинейного параболического уравнения с бигармоническим оператором в главной части // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2019, N3, с. 38-49.
32. Bağırov Ş.H., Qasımova X.Ə., Şarın xaricində yarımxətti parabolik tənliyin müsbət qlobal həllinin varlığı. // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı il dönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Konfransı, Bakı-2019, s. 23-24.
33. Bağırov, Ş.H., Musayeva, N.Z. Sinqulyar potensialli yarimxətti parabolik tənliyin müsbət qlobal həllinin yoxluğu // Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 97-ci ildönümünə həsr olunmuş «Riyaziyyat, mexanika və onlarin tətbiqləri» adlı respublika elmi konfransı, Bakı-2020, səh.13-14.
34. Bağırov, Ş.H., Qasımova X.Ə. Zaman arqumentinə nəzərən periodik əmsallı ikitərtibli yarımxətti parabolik tənliyin müsbət qlobal həllinin varlığı, Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 97-ci ildönümünə həsr olunmuş «Riyaziyyat, mexanika və onlarin tətbiqləri» adlı respublika elmi konfransı, Bakı-2020, səh. 15-16.
35. Багыров, Ш.Г. Отсутствие глобальных положительных решений слабо связанных систем полулинейных

параболических уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами по времени // Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, № 6, с. 732-744.
36. Bağırov, Ş.H., Musayeva, N.Z., Sonsuz oblastda yarımxətti elliptik tənliyin müsbət qlobal həllinin varlığı // Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 98-ci ildönümünə həsr olunmuş «Riyaziyyat, mexanika və onlarin tətbiqləri» adlı respublika elmi konfransı, 24-25 may 2021, Bakı, səh. 7.
37. Bagirov, Shirmail G., Guliyev, Abdurrahim F., Absence of global solutions of a semilinear biharmonic equation with a singular potential in exterior domains // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 42 (1), 72-85 (2022).
38. Bağırov, Ş.H., Haşımova, A.R. Baş hissə biharmonik operator olan yarımxətti elliptik tənlik üçün sərhəd məsələsinin müsbət həllinin varlığı // Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş «Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri» adlı Respublika Elmi Konfransı, səh.26, Bakı-2022.
39. Bagyrov, Sh.G., Aliyev, M.J., On the absence of global solutions of inhomogeneous evolution semilinear inequalities with a biharmonic operator in the main part // AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu və Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin birgə təşkilatçılığı ilə Akademik İbrahim İbrahimovun 110–illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri” adlı beynəlxalq konfrans 29 iyun-01 iyul 2022-ci il, Bakı, səh. 65.
40. Bağırov, Şirmayıl; Səlimov, Qüdrət, Sinqulyar potensiallı yarım xətti elliptik tənliyin zəif həllinin varlığı // Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Diferensial və inteqral operatorlar mövzusunda respublika elmi konfransi, Bakı, 7-8 dekabr 2023-cü il Bakı – 2023, səh. 20-21.
41. Bagyrov, Sh.G., Jabrailova, Aynur F., The absence of positive global solution of a second-order semi-linear parabolic equation with time-periodic coefficients, // “Modern problems of

mathematics and mechanics" proceedings of the international conference to the 100-th anniversary of the National leader Heydar Aliyev, 26-28 aprel 2023-Baku, pp 136-138.
42. Bagyrov, Sh.G. The Absence of Positive Global Periodic Solution of a Second-Order Semi Linear Parabolic Equation With Time-Periodic Coefficients // Azerbaijan Journal of Mathematics, Vol 14, No 2 (2024):July

Защита диссертации состоится 30 мая 2024 года в 14:00 часов на заседании Диссертационного совета ED 2.17, действующего при Бакинском Государственном Университете.

Адрес: AZ 1148, город Баку, улица З.Халилова, 23.

С диссертационной работой можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Электронные версии диссертации и автореферата размещены на официальном сайте Бакинского государственного университета.

Автореферат разослан по необходимым адресам 26 апреля 2023 г.

Подписано в печать: 22.04.2024
Формат бумаги: 60х84 1/16.
Объем: 72820 (количество страниц, в знаках)
Тираж: 70