АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Мехрибан Нурмамед кызы Керимова**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой
степени доктора философии

Баку – 2023

Диссертационная работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Таир Сади оглы Гаджиев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Вали Магеррам оглы Курбанов

доктор математических наук, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев

кандидат физико-математических наук, доцент
Ариф Ибад оглы Исмайлов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Председатель диссертационного совета:

чл.-корр. НАНА, д.ф.-м.н., профессор
______________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.-м.н.
______________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

действительный член НАНА, д.ф.-м.н., профессор
______________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Эллиптико-параболические уравнения встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера. Эти уравнения из класса вырождающихся уравнений, которые возникают в теории малых изгибаний поверхностей вращения, без моментной теории оболочек, при изучении волновых явлений при фрактальной диффузии, в уравнениях газовой динамики, математической биологии, генетики и медицины и т.д.

Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены Ф.Трикоми, Ф.И.Франклем, И.Н.Векуа, А.В.Бицадзе. Были обнаружены важные приложения такого типа уравнений в газовой динамике, отмечена важность уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, сформулирован принцип экстремума для уравнений смешанного типа, из которого, в частности, следует единственность решения.

В дальнейшем эти результаты были развиты в работах К.И.Бабенко, А.М.Нахушева, Е.Хольмгрена, С.Геллерстеда, П.Жермена и Р.Бадера, Л.Вольфсдорфа, М.Л.Краснова, И.А.Киприянова, М.С.Салахитдинова и З.Х.Кадырова, Л.С.Парасюка , Х.Наджафова и др.

Важную роль играют задачи смешанного типа, которые могут быть описаны с помощью операции дробного интегро-дифференцирования. Роль дробного исчисления в теории уравнений смешанного типа связана с возникновением проблемы поиска аналога задачи Ф.Трикоми в многомерных областях с пространственно-ориентированной поверхностью параболического вырождения. Это проблема, поставленная А.В. Бицадзе, в последние годы сильно развилась. Изучение нелокальных краевых и краевых задач требовало изучения дробного исчисления, которое имеет приложения в вырождающихся дифференциальных уравнениях.

Принципиальное значение в развитие теории вырождающихся эллиптических уравнений имела работа М.В.Келдыша. Эта работа послужила началом для дальнейшего развития такого типа задач.

В случае многомерных задач такого типа особо отметим работы Г.Фикеры, О.А. Олейник, М.И.Вишика, С.Г.Михлина, А.М.Ильина и др.

В данной работе рассматриваются линейные дивергентные и недивергентные вырождающиеся уравнения типа эллиптико-параболических, и их главная часть также вырождается. В связи с этим отметим работы M.Franciosi, A.Alvino, G. Trombetti, в которых доказана сильная разрешимость первой краевой задачи для эллиптико-параболических уравнений в недивергентной форме с гладкими коэффициентами. В работах G. Talenti, И.Т.Мамедова и его учеников, V. Iftimie, G. Fiortio, G.C.Wen доказана однозначная сильная разрешимость первой краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка в недивергентной форме и с разрывными коэффициентами при условии типа Кордеса, также эллиптико-параболические уравнения разных типов. Укажем также работы, И.И. Кона, Л.Ниренберга, О.А.Ладыженской, В.А.Солонникова, Н.Н.Уральцевой, Е.М.Ландиса и др.

В работах H.Gajewski и I.V.Skrypnik, P.Benilan и P.Wittbold рассмотрены системы уравнений эллиптико-параболического типов.

В работах Т.С.Гаджиева и Э.Р.Гасымовой рассмотрены недивергентные линейные эллиптико-параболические уравнения с разрывными коэффициентами.

Диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств линейных дивергентных вырождающихся эллиптико-параболических уравнений и изучению сильной разрешимости линейных недивергентных вырождающихся уравнений эллиптико-параболического типа. Поэтому тему диссертационной работы можно считать актуальной.

Объект и предмет исследования.

Объектом настоящей диссертации являются линейные дивергентные вырождающиеся уравнения эллиптико-параболического типа и линейные недивергентные вырождающиеся уравнения эллиптико-параболического типа. В диссертации исследованы качественные свойства линейных дивергентных вырождающихся уравнений эллиптико-параболического типа и однозначная сильная разрешимость первой краевой задачи линейных недивергентных вырождающихся уравнений эллиптико-параболических типа.

Цель и задачи исследования.

Целью настоящей диссертации является исследование качественных свойств решений линейных дивергентных вырождающихся уравнений типа эллиптико-параболических и исследование однозначной сильной (почти всюду) разрешимости первой краевой задачи для линейных недивергентных вырождающихся уравнений типа эллиптико-параболических.

Методы исследования.

Для исследования рассматриваемых задач используются методы дифференциальных уравнений в частных производных, теории функций и функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие основные положения:

- Результаты исследования вопросов о получение весовых априорных оценок для решений вырождающихся линейных дивергентных уравнений эллиптико-параболического типа;
- Результаты исследования вопросов об изучении качественных свойств решений вырождающихся линейных дивергентных уравнений эллиптико-параболического типа;

- Результаты исследования вопросов о получении коэрцитивных оценок для решений вырождающихся линейных недивергентных уравнений эллиптико-параболического типа;
- Результаты исследования вопросов о доказательстве сильной разрешимости первой краевой задачи вырождающихся линейных недивергентных уравнений эллиптико-параболического типа;

Научная новизна. Получены следующие результаты:

- Получены весовые априорные оценки для решений вырождающихся линейных дивергентных уравнений;
- Изучены качественные свойства решений вырождающихся линейных дивергентных уравнений;
- Получены коэрцитивные оценки для решений вырождающихся линейных недивергентных уравнений;
- Доказана сильная разрешимость первой краевой задачи для линейных недивергентных вырождающихся уравнений.

Теоретическая и практическая ценность исследования.

Результаты, полученные в диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными и в задачах физики и механики.

Апробация и применение.

Основные результаты диссертации докладывались в Институте Математики и Механики НАНА на семинарах отделов «Функциональный анализ» (проф. Г.И.Асланов), «Дифференциальные уравнения» (проф. А.Б.Алиев), а также на XXI Международной конференции “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU, Украина, 2013), Международной конференции, посвященная 55-летию Института Математики и Механики НАНА (Баку, 2014), “Caucasion Mathematics Conference I” Международной конференции, (CMCI, Tbilisi, 2014) Международной конференции “International Workshop on Operator Theory and Applications-2015” (IWOTA, Тбилиси-2015), “Mathematical Analysis, Differential Equations and Their

Applications-7" Международной конференции (MADEA-7, Баку, 2015), XXVII Международной конференции "Problems of Decision Making under Uncertainties" (PDMU, Батуми, 2016), Международной конференции –"Operators in Morrey-type Spaces and Applications" (OMTSA, Турция,2017), XXXVII Международной конференции -"Problems of Decision Making under Uncertainties" (PDMU, Киев,2022), Международной научной конференции – Теоретические и прикладные проблемы матемтики (СГУ, Сумгаит-2023)

Личный вклад автора. Все выводы и полученные результаты принадлежат лично автору.

Публикации автора. По теме диссертации опубликовано 15 работ, список которых приведен в конце автореферата. Три статьи были опубликованы в международных сводных и индексационных системах (Scopus,Web of Science и Zentralblatt MATH).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена в Институте Математики и Механики Министерство Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).

Общий объем диссертационной работы - 218433 знаков (титульная страница - 588 знаков, содержание - 1121 знаков, введение - 56000 знаков, первая глава - 70000 знаков, вторая глава - 90000 знаков, выводы – 724 знаков). Список используемой литературы состоит из 82 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Переходим к описанию краткого содержания и основных результатов диссертационной работы.

Глава 1 посвящена первой краевой задаче для линейного дивергентного вырождающегося уравнения типа эллиптико-параболического и изучению качественных свойств ее обобщенного решения.

Пусть Ω ограниченная область в $n-$мерном евклидовом пространстве R^n, с границей $\partial\Omega$. Предполагаем, что граница $\partial\Omega \subset C^2$. Пусть Q_T цилиндр $\Omega \times (0,T)$, где $T \in (0,\infty)$. В $\xi \in R^n$ рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \psi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} +$$

$$+ c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{2}$$

$$u(x,0) = h(x),\quad x \in \Omega \tag{3}$$

Относительно коэффициентов и правых частей предполагается выполнение следующих условий: $\left\| a_{ij}(x,t) \right\|$- действительная симметрическая матрица с измеримыми в Q_T элементами, причем для любых $(x,t) \in Q_T$ и $\xi \in R^n$ верны неравенства

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2 \tag{4}$$

где γ-постоянная из полуинтервала $(0,1]$, $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$, $i, j = \overline{1,n}$ измеримые функции относительно $(x,t) \in Q_T$. Также

$$c(x,t) \le 0,\ c(x,t) \in L_{n+1}(Q_T) \tag{5}$$

$$|b_i(x,t)|^2 + k \cdot c(x,t) \le 0,\quad b_i(x,t) \in L_{n+2}(Q_T). \tag{6}$$

к - некоторая положительная постоянная .

Здесь $\omega(x)$ весовая функция из A_p-класса Макенхоупта. Для полноты дадим определение. Для $1 < p < \infty$ будет говорить, что вес $\omega : R^n \to [0,\infty)$ принадлежит к классу A_p, если $\omega(x)$ локально интегрируема и существует такая постоянная C, что для любого шара $B \subset R^n$ выполнено

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} \le C < \infty,$$

где $|B|$ – мера Лебега шара B. Мы говорим, что $\omega : R^n \to [0,\infty)$ принадлежит к классу A_1, если существует постоянная C такая что $\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \le C\omega(x),$ для всех $x \in B$.

Весовая функция удовлетворяет условиям

$$\psi(x,t) = \omega(x)\cdot\lambda(\rho)\cdot\varphi(T-t), \tag{7}$$

где $\omega(x) \in A_p$ - вес из класса Макенхоупта, $\lambda(\rho) \ge 0$, $\lambda(\rho) \in C^1[0, diam\Omega]$, причем

$$|\lambda'(\rho)| \le p\sqrt{\lambda(\rho)}\text{, где } \rho = dist(x, \partial\Omega), \tag{8}$$

$$\varphi(z) \ge 0,\ \varphi'(z) \ge 0,\ \varphi(z) \in C^1[0,T],$$

$$\varphi(z) \ge \beta\cdot z\cdot\varphi'(z), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \tag{9}$$

где $p, \beta -$ положительные константы.

В некоторых моментах требуем, чтобы весовая функция обладала производным. Это связана с прикладными задачами. А именно в теории полупроводников весовая функция выбирается так, чтобы у него была производная, где вес выбирается как интеграл Ферми $\sigma = F_{\gamma+1}$, где

$$F_\gamma(u) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\int_0^\infty \frac{s^\gamma ds}{1+\exp(s-u)},\ \gamma > -1,$$

а $\omega(u) = \sigma'$.

Также в задачах разделения фаз появляются такие весы. А именно

$$\sigma(u)=\frac{1}{1+\exp(-u)},\ \omega(u)=\sigma'(u)=\frac{1}{(1+e^{u})(1+e^{-u})}.$$

Относительно правых частей (1)-(3) предполагается выполнение условий

$$f(x,t)\in L_\infty(Q_T)\cap L_\infty\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)\cap L_1\left(0,T;W_\infty^1(\Omega)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\in L_1\left(0,T;L_\infty(\Omega)\right) \tag{10}$$

$$h(x)\in L_\infty(\Omega)\ . \tag{11}$$

Не нарушая общности, для лёгкости вычислений далее $h(x)$ возьмём равным нулю.

Введем некоторые Банаховы пространства функций, заданных на Q_T, с конечными нормами

$$\|u\|_{W_{2,\omega}^{1}(Q_T)}=\left(\int\limits_{Q_T}\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W_2^2(Q_T)}=\left(\int\limits_{Q_T}\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}=\|u\|_{W_2^2(Q_T)}+\|u_t\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\|u\|_{W_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)}=\left(\left(\int\limits_{Q_T}\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}^2+u_t^2\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\psi^2(x,t)u_{tt}^2+\psi(x,t)\sum_{i=1}^{n}u_{x_it}^2\right)dxdt\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W_{2,\psi}^{1,2}(Q_T)}=\left(\left(\int\limits_{Q_T}\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_t^2\right)+\psi^2(x,t)u_{tt}^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{2,\psi}(Q_T)$-подпространство пространства $W^{1,2}_{2,\psi}(Q_T)$ в котором плотным множеством является совокупность всех функций из $C^\infty(\overline{Q}_T)$, обращающихся в нуль на границе $\Gamma(Q_T)$.

Для $R>0$, $x^0\in R^n$ через $B_R(x^0)$ обозначим шар $\{x:|x-x^0|<R\}$, а через $Q_T^R(x^0)$- цилиндр $B_R(x^0)\times(0,T)$. Пусть $\overline{B_R}(x^0)\subset\Omega$. Скажем, что $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$, если $u(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}{}_T^R(x^0)\right)$, $u|_{t=0}=0$ и $\mathrm{supp}\,u\subset\overline{Q}{}_T^\rho(x^0)$ для некоторого $\rho\in(0,R)$. Тогда $u(x,t)\in A_1(Q_T^R(x^0))$ (или сокращённо, $A_1(Q)$), если $u(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}{}_T^R(x^0)\right)$, $u|_{t=0}=0$. И, наконец $u(x,t)\in B(Q_T^R(x^0))$, если $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$ и кроме того $u|_{t=T}=u_t|_{t=T}=0$.

Далее, обозначим для $\rho>0$ множество $\{x:x\in\Omega,\ dist(x,\partial\Omega)>\rho\}$ через Ω_ρ, и пусть $Q_T(\rho)=\Omega_\rho\times(0,T)$. Всюду далее запись $C(\cdot)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содержимого скобок.

Функцию $u(x,t)\in L_2\ \left(0,T;W^{1,2}_{2,\psi}(\Omega)\right)$ назовем обобщенным решением задачи (1)-(3), если выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\varphi}dxdt+$$

$$+\int_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\varphi}+c(x,t)u\overline{\varphi}\right]dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\psi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{\varphi}dxdt=0 \qquad (12)$$

для произвольной функции $\overline{\varphi} \in C^\infty\left(\overline{Q_T}\right)$ обращающейся в нуль на $\Gamma(Q_T)$, $\overline{\varphi}(\tau, x) = 0$, $x \in \Omega$ для почти всех $\tau \in (0, T)$ и почти всюду для $t \in (0, T)$.

$$u(x,t) - f(x,t) \in L_2\left(0, T; W^{1,2}_{2,\psi}(\Omega)\right). \tag{13}$$

Сначала рассматривается вспомогательная задача, которая получается из задачи (1)-(3) заменой весов $\omega(x)$ и $\psi(x,t)$ регуляризованными $\omega_\varepsilon(x)$, $\psi_\varepsilon(x,t)$. Вместо $\omega(x) = \omega_\varepsilon(x)$, которая

$$\omega_\varepsilon(x) = \max\left\{\omega(x), \omega\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\} \tag{14}$$

для $\varepsilon \in (0, T]$, $\omega_0(x) = \omega(x)$.

Вместо $\psi(x,t) = \psi_\varepsilon(x,t)$, которое для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, T)$ вводится так

$$\psi_\varepsilon(x,t) = \psi(x,\varepsilon) - \frac{\psi'(x,\varepsilon)\varepsilon}{m} + \frac{\psi'(x,\varepsilon)}{m\varepsilon^{m-1}} t^m \text{, при } t \in [0, \varepsilon] \tag{15}$$

и $\psi_\varepsilon(x,t) = \psi(x,t)$ при $t \in [\varepsilon, T]$, $m = \dfrac{2}{\beta}$ для почти всех $x \in \Omega$.

Очевидно, что $\psi_\varepsilon(x,t) \in C^1[0, T]$. Покажем, что для $t \in [0, T]$

$\psi_\varepsilon(x,t) \geq \dfrac{1}{2}\psi(x,t)$ для почти всех $x \in \Omega$. Достаточно доказать это неравенство для $t \in [0, \varepsilon)$. Ясно, что в силу монотонности $\psi(x,t)$ оно будет выполнено, если

$$\psi(x,\varepsilon) - \frac{\psi'(x,\varepsilon)\varepsilon}{m} \geq \frac{1}{2}\psi_\varepsilon(x,\varepsilon)$$

или

$$\psi(x,\varepsilon) \geq \frac{2}{m}\psi'(x,\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

Но последняя оценка верна в силу условий (9). Всюду далее мы ограничиваемся рассмотрением наиболее интересного случая, когда $\psi(x,t) > 0$ при $x > 0,\ t > 0$. Если $\psi(x,t) \equiv 0$, тогда уравнение (1) параболическое и соответствующие результаты можно получить из результатов для параболических уравнений. Но если $\psi(x,t) \equiv 0$ при $t \in [0,t^0]$, тогда решение задачи (1)-(3) может быть получено склейкой решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_{t^0} и решения $v(x,t)$ начально-краевой задачи для параболического уравнения в цилиндре $\Omega \times (t^0, T)$ с краевыми условиями $v(x,t^0) = u(x,t^0),\ v(x,t)\big|_{\partial\Omega \times [t^0,T]} = 0$.

Для решения задачи (1)-(3) верна следующая теорема 1.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4)-(11). Тогда существует константа M_1, зависящая только от известных параметров и независящая от $\varepsilon \in (0,1]$, такая, что решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) с весами $\omega_\varepsilon(x)$, $\psi_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет оценке

$$\underset{t\in(0,T)}{ess}\sup \int_\Omega \{\Lambda_1(u(x,t)) + \Lambda_2(u(x,t))\} dx + \int_{Q_T} \omega_\varepsilon(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt +$$

$$+ \int_{Q_T} \psi_\varepsilon(x,t) \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt \le M_1 \qquad (16)$$

где

$$\Lambda_1(u) = \int_0^u s \cdot \omega(s) ds,\ \Lambda_2(u) = \int_0^u s \cdot \psi(x,s) ds$$

Также верна теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда существует такая константа M_2, зависящая только от известных параметров и независящая от $\varepsilon \in (0,1]$, что решение регуляризованной задачи (1)-(3) удовлетворяет оценке

$$\int_{Q_T}\left[\omega_\varepsilon(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\psi_\varepsilon(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt \le M_2 . \qquad (17)$$

Для доказательства teоремы 2 нам нужна вспомогательная оценка.

Лемма 1. Предположим, что выполняются условия теоремы 1 и выполнено следующая оценка

$$ess\sup_{t\in(0,\tau)}\int_\Omega u^q(x,t)dx \le C_1 \qquad (18)$$

для всех чисел $q\in\left(\frac{2n}{n+2},\frac{n}{2}\right)$, а C_1-постоянная которая зависит лишь от известных параметров. Тогда верна оценка

$$ess\sup_{t\in(0,\tau)}\left\{\int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{pn}{n-2}}dx+\int_\Omega |u(x,t)|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx\right\}\le C_2 \qquad (19)$$

для всех чисел $p>2$, определяемых по равенству

$$p\cdot\frac{n}{n-2}=(p-1)\frac{q}{q-1} \qquad (20)$$

и константа C_2 зависит лишь от известных параметров, и здесь $n\neq 2$. Для случая $n=2$ нужно изменить вычисления.

Для доказательства свойств регулярности функции $u(x,t)$ нам нужно также следующее условие на рост

$$\rho_1^{-1}(u^\gamma+1)\le u\le \rho_1(u^\gamma+1),\ u>0,\ 0\le\gamma\le\frac{2}{n-2}, \qquad (21)$$

с некоторым положительным постоянным ρ_1. Из (21) следует, что $u\le\rho_1\left(\frac{u^{\gamma+1}}{\gamma+1}+u\right)$, для $u>0$ с $\gamma+1<\frac{n}{n-2}$. Заметим, что такого типа условия возникают для $n>2$ вместе с ограничением $\gamma+1<\frac{2}{n-2}$.

Для дальнейшего нам нужны следующие леммы.

Лемма 2. Предположим, что выполняются условия теорем 1 и 2, и верно неравенство

$$\underset{t\in(0,\tau)}{ess\sup}\int_{\Omega} u_{+}^{q}(x,t)dx +$$

$$+\iint_{(u>1)}\left[\omega_{\varepsilon}^{2}(x)u^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}+\psi_{\varepsilon}^{2}(x,t)u^{q-2}(x,t)\left|\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}\right|^{2}\right]dxdt \le C_3 \qquad (22)$$

с некоторыми числами $q\in\left[\frac{2+\gamma}{1+\gamma},\frac{n}{2}\right]$, а C_3 – постоянная зависящая лишь от известных параметров. Тогда существует такая положительная константа C_4, что верна оценка

$$\iint_{(u>1)}\left[\omega_{\varepsilon}^{2}(x)u^{q-2+\beta}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}+\psi_{\varepsilon}^{2}(x,t)u^{q-2+\beta}(x,t)\left|\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}\right|^{2}\right]dxdt \le C_4 \qquad (23)$$

При доказательстве этой леммы пользуемся теоремой 2 и леммой 1.

Лемма 3. Предположим что, выполняются условия теоремы 2. Тогда существует такое число $\bar{q}$, что $\bar{q} > \frac{n}{2}$ и постоянная C_5 зависящая только от известных параметров, что верна оценка

$$\underset{t\in(0,\tau)}{ess\sup}\int_{\Omega} u_{+}^{\bar{q}}(x,t)dx +$$

$$\iint_{\{u>1\}}\left[\omega_{\varepsilon}^{2}(x)u^{\bar{q}-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}+\psi_{\varepsilon}^{2}(x,t)u^{\bar{q}-2}(x,t)\left|\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}\right|^{2}\right]dxdt \le C_5 . \qquad (24)$$

Заметим, что через $u_{+}(x,t)$ обозначим $\max\{u(x,t);0\}$. Наконец, в параграфе 1.3 доказываем теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются предположения теоремы 2. Тогда для произвольного $t\in[0,\tau]$, $x', x''\in\Omega$ верны оценки

$$\|u(x,t)\|_{L^{\infty}(Q_T)} \le M_3 ,$$

$$\left|u(x',t)\omega(x') - u(x'',t)\omega(x'')\right| \le M_4 \left|x' - x''\right|^{\eta} \qquad (25)$$

с $\eta \in (0,1)$ и константами M_3, M_4 зависящих только от известных параметров и независящих от ε .

Теорема 4. Пусть выполняются условия (4)-(11), (21) и условие $\omega'(x) \le \rho_2 \omega(x)$, $\rho_2 > 0$ – константа. Тогда существует постоянная M_5 зависящая только от известных параметров и независящая от ε, что произвольное решение задачи (1)-(3) удовлетворяет оценке

$$ess\sup\{|u(x,t)| : (x,t) \in Q_T\} \le M_5 \qquad (26)$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда начально-краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно решение в смысле интегрального тождества (12).

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 4 и дополнительно, условие, что функции $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ локально Липшицевы относительно x. Тогда начально граничная задача (1)-(3) имеет единственное решение.

Таким образом доказывается существование единственного решения.

Доказательство ведется в четыре этапа, для финального результата используем лемму Гронуолла.

Глава 2 посвящена получению априорных оценок и сильной разрешимости первой краевой задачи для линейных недивергентных вырождающихся уравнений типа эллиптико-параболических.

Рассматривается первая краевая задача

$$Zu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \psi(x,t) u_{tt} - u_t = f(x,t), \qquad (27)$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T)} = 0. \qquad (28)$$

Здесь $\Gamma(Q_T) = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{(x,t) : t = 0\})$-

параболическая граница цилиндра $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $T \in (0,\infty)$, а $\psi(x,t)$ стремится к нулю. Пусть коэффициенты удовлетворяют следующим условиям: $\|a_{ij}(x,t)\|$ симметрическая матрица и для любых $(x,t) \in Q_T$ и $\xi \in R^n$ верно

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2 \tag{29}$$

где $\gamma \in (0,1]$, $a_{ij}(x,t)$, $i,j=\overline{1,n}$ измеримые функции $(x,t) \in Q_T$, а $\omega(x) \in A_p$ удовлетворяет условию Макенхоупта, а

$$\psi(x,t) = \omega(x)\cdot\lambda(\rho)\cdot\varphi(T-t), \tag{30}$$

где $\rho = \rho(x) = dist(x,\partial\Omega)$, и относительно $\psi(x,t)$ выполняются условия:

$$\lambda(\rho) \ge 0,\ \lambda(\rho) \in C^1[0, diam\Omega] \text{ и } |\lambda'(\rho)| \le p\sqrt{\lambda(\rho)}, \tag{31}$$

$$\varphi(z) \ge 0,\ \varphi'(z) \ge 0,\ \varphi(z) \in C^1[0,T],$$

$$\varphi(z) \ge \beta\cdot z\cdot\varphi'(z), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \tag{32}$$

здесь p и β положительные константы.

В параграфе 2.1 рассматривается модельный оператор

$$Z_0 = \omega(x)\cdot\Delta + \psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - оператор.

Лемма 4. Если относительно $\omega(x)$ выполнено условие Макенхоупта, а $\psi(x,t)$ условие (30)-(32), то существует такое $T_1(\psi(x,t), n, \omega(x))$, что при $T \le T_1$, для любой функции $u(x,t) \in B(Q_T^R(x_0))$ справедлива оценка

$$\int_{Q_T^R(x_0)} \left(\omega(x)\left(\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} + u_t^2\right) + \psi_\varepsilon^2(x,t)u_{tt}^2 + \psi_\varepsilon(x,t)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2\right)dxdt \le$$

$$\leq \left(1+2(n+1)q(T)\right) \int\limits_{Q_T^R(x_0)} \left(Z_\varepsilon u\right)^2 dxdt\,. \qquad (33)$$

Лемма 5. Пусть относительно функции $\psi(x,t)$ выполняются условия (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, а оператор Z_ε при $\varepsilon > 0$ имеет тот же смысл, что и в лемме 1. Тогда при $T \leq T_2(\psi, \omega, n, \Omega)$ для любой функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)$ справедлива оценка

$$\left\|u(x,t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)} \leq C_6(\psi, \omega, n, \Omega) \left\|Z_\varepsilon u - \mu u\right\|_{L_2(Q_T)}, \qquad (34)$$

здесь $\mu = \dfrac{1}{T}$, $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)$–Банахово пространство функций $u(x,t)$ заданных на Q_T с конечной нормой. А ноль сверху – это пополнение множества всех функций из $C^\infty\left(\overline{Q}_T\right)$, обращающихся в нуль на ∂Q_T, по норме пространства $W^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)$. Доказываются некоторые вспомогательные леммы для разрешимости задач для модельного оператора Z_0.

Лемма 6. Пусть относительно функции $\psi(x,t)$ выполнены условия (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, то существует такое $T_1(\psi, \omega, n)$, что при $T \leq T_1$ для любой функции $u(x,t) \in A\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left(\omega(x)\left(\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} + u_t^2 \right) + \psi_\varepsilon^2(x,t) u_{tt}^2 + \psi_\varepsilon(x,t) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 \right) dxdt \leq$$

$$\leq \left(1 + D \cdot S\right) \int\limits_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left(Z_0 u\right)^2 dxdt\,. \qquad (35)$$

где $S = S(\psi, \omega, n)$–некоторая постоянная, $D = D(T) = q(T) + q_1(T)$, $q(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi'(t)$, $q_1(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi(t)$.

Лемма 7. Если относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (29), относительно $\psi(x,t)$ (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, то при $T \le T_2$ для любой функции $u(x,t) \in A\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^{R/2}\left(x^0\right)\right)} \le C_7 \|Zu\|_{L_2\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)} +$$

$$+ \varepsilon \|u(x,t)\|_{W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)} + \frac{C_8(\psi,\omega,n,\Omega)}{\varepsilon R^2} \|u\|_{L_2\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)} \qquad (36)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Следствие 1. Если относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (29), относительно $\psi(x,t)$ (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, то при $T \le T_2$ и любой $\varepsilon > 0$ для всякой функции $u(x,t) \in C^\infty\left(\overline{Q}_T\right)$, $u\big|_{t=0} = 0$ справедливо оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T(\rho))} \le C_9(\psi,\omega,\sigma,n,\rho,\Omega)\|Zu\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+ \varepsilon \|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} + C_{10}(\psi,\omega,\sigma,n,\rho,\Omega)\|u\|_{L_2(Q_T)} \qquad (37)$$

Лемма 8. Если относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (29), относительно $\psi(x,t)$ (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, тогда существует такое $\rho_1(\psi,\omega,n)$, что если $T \le T_2$, то при любом $c > 0$ для всякой функции $u(x,t) \in C^\infty\left(\overline{Q}_T\right)$, $u\big|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^1(\rho_1)\right)} \le C_{11}(\psi,\omega,\sigma,n,\rho_1,\Omega)\|Zu\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+ \varepsilon \|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} + \frac{C_{12}(\psi,\omega,\sigma,n,\rho_1,\Omega)}{\varepsilon}\|u\|_{L_2(Q_T)} \qquad (38)$$

где $Q_T^1(\rho_1) = Q_T \setminus Q_T(\rho_1)$.

Лемма 9. В условиях леммы 8 для любых $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)$ при $T \le T_2$ справедлива оценка

$$\left\|u(x,t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)} \le C_{13}(\psi,\omega,n,\Omega)\left\|Zu\right\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+ C_{14}(\psi,\omega,n,\Omega)\left\|u\right\|_{L_2(Q_T)}. \tag{39}$$

В итоге доказывается коэрцитивная оценка.

Теорема 7. Если выполнены условия (29), (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, тогда существует такое $T_0 = T_0(\psi,\omega,\sigma,n,\Omega)$, что при $T \le T_0$, для любой функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q)$ верна оценка

$$\left\|u(x,t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q)} \le C_{15}(\psi,\omega,\sigma,n,\Omega)\left\|Zu\right\|_{L_2(Q)}. \tag{40}$$

В следующих параграфах рассматривается вопрос сильной разрешимости поставленной задачи и доказывается однозначная сильная (почти всюду) разрешимость первой краевой задачи для оператора Z в соответствующем весовом пространстве Соболева при всякой правой части $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Доказательство проводится методом продолжения по параметру.

Перейдем к разрешимости задачи для модельного оператора Z_0, где

$$Z_0 = \omega(x)\cdot\Delta + \psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}$$

Лемма 10. Если относительно $\omega(x)$ выполняется условие Макенхоупта, а $\psi(x,t)$ удовлетворяет условиям (30)-(32), то при $T \le T_5(\psi,\omega)$, $\tau \in [0,1]$ для всякой функции $u(x,t) \in A\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)$ верна оценка

$$\int\limits_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left(\omega^2(x)\left(\sum_{i,j=1}^{n} u^2_{x_i x_j} + u_t^2\right) + \psi^2(x,t)u_{tt}^2 + \psi(x,t)\sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i t}\right)dxdt \le$$

$$\le \left(1 + D(T)\cdot S_2\right)\int\limits_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left(Z_0 u - \frac{\tau}{T}u\right)^2 dxdt. \tag{41}$$

где $S_2 = S_2(\psi,\omega,n)$ – некоторая постоянная,

$$D = D(T) = q(T) + q_1(T),\ q(T) = \sup_{t\in[0,T]} \varphi'(t),\ q_1(T) = \sup_{t\in[0,T]} \varphi(t).$$

Лемма 11. Пусть относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (29), веса $\psi(x,t)$ (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта. Тогда для всякой функции $u(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}_T)$, $u|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ при $T < T_6(\gamma, \sigma, \psi, \omega, n, \Omega)$ и любом $\tau \in [0,1]$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} \le C_{16}(\gamma, \sigma, \psi, \omega, n, \Omega) \left\| Zu - \frac{\tau}{T} u \right\|_{L_2(Q_T)} \tag{42}$$

Сначала приведем теорему о сильной разрешимости вспомогательного оператора. Через M_0 обозначим оператор $Z_0 - \mu$, а через T_0 – минимальное значение константа в лемме 10 и лемме 11.

Теорема 8. Пусть относительно $\psi(x,t)$ выполнены условия (30)-(32), $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта. Тогда при $T \le T^0$ первая краевая задача

$$M_0 u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T$$

$$u|_{\Gamma(Q_T)} = 0$$

однозначно сильно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)$ при всякой функции

$$f(x,t) \in L_2(Q_T).$$

Теперь приведем теорему о сильной разрешимости основной задачи.

Теорема 9. Пусть относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (29), веса $\psi(x,t)$ (30)-(32), а $\omega(x)$ условию Макенхоупта. Тогда при $T \le T^0$ первая краевая задача (27)-(28), однозначно сильно разрешима в пространстве

$\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)$ для всякой функции $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Причем для решения $u(x,t)$ справедлива оценки

$$\|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)} \le C_{17} \|f\|_{L_2(Q_T)}. \qquad (43)$$

В заключение хотелось бы выразить огромную благодарность моему научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Т.С. Гаджиеву за ценные советы в постановке темы исследования и выполнении диссертации.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств линейных дивергентных вырождающихся эллиптико-параболических уравнений и изучению сильной разрешимости линейных недивергентных вырождающихся уравнений эллиптико-параболического типа.

Получены следующие основные результаты:

- Получены весовые априорные оценки для решений вырождающихся линейных дивергентных уравнений;
- Изучены качественные свойства решений вырождающихся линейных дивергентных уравнений;
- Получены коэрцитивные оценки для решений вырождающихся линейных недивергентных уравнений;
- Доказана сильная разрешимость первой краевой задачи для решений вырождающихся линейных недивергентных уравнений.

Основное содержание диссертации отражено в следующих опубликованных научных работах автора:

1. Gadjiev, T., Kerimova, M. The solutions degenerate elliptic-parabolic equations// -India: Journal of Advances in Mathematics, -2013. v.3, №3, -pp. 219-235.

Gadjiev, T., Kerimova, M. On some estimations of solutions for degenerate elliptic-parabolic equations// -Baku: Transactions of ANAS, issue mathematics mechanics, series of phys.-tech. & math. sc. - 2013. XXXIII, №4, -pp. 57-72.

2. Gadjiev, T., Kerimova, M. On solutions of the first boundary-value problem for degenerate elliptic-parabolic equations// XXI İnternational of decision making under uncertainties (PDMU-2013) Abstracts, -Ukraine, Skhidnytsia: -May, -13-17, -2013, -pp.36-37.

3. Gadjiev, T., Kerimova, M., Gasanova, G. The solutions degenerate nonlinear elliptic-parabolic equations.//On actual problems of mathematics and mechanics, Proceedings of the International conference devoted to the 55-th ann. of the Institute of Mathematics and Mechanics, -Bakı: -15-16 May, -2014, -p.141.

4. Gadjiev, T., Kerimova, M., Gasanova, G. The solutions degenerate nonlinear elliptic-parabolic equations.//Caucasion mathematics conference, CMC I, -Tbilisi: -September, -5-6, -2014 , -p.86.

5. Gadjiev, T., Kerimova, M., Aliyev, Kh. The behaviour of solutions of degenerate elliptic-parabolic equations.// International workshop on operator theory and applications, IWOTA, -Tbilisi: -6-10 July, -2015, -p.67

6. Gadjiev, T., Kerimova, M. Coercive estimate for degenerate elliptic -parabolic equations// -Baku: Proceedings of the İnstitute of mathematics and mechanics, -2015. v. 41, №1, -pp.123-134.

7. Gadjiev, T., Kerimova, M., Aliyev, Kh. The behaviour of solutions of degenerate elliptic-parabolic equations.// MADEA-7, Azerbaijan-Turkey-Ukrainian İnternational Conference, Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, Abstracts, -Baku: 8-13 September, -2015, p.52.

8. Gadjiev, T., Gasanova, G., Kerimova, M. Solvability of boundary problem for nonlinear degenerate elliptic equations.// XXVII İnternational conference problems of decision making under uncertainties. (PDMU-2016), -Tbilisi- Batumi: -23-27 May, -2016, -p.60.
9. Gadjiev, T., Yagnaliyeva, A., Kerimova, M. The some property of solutions degenerate nonlinear parabolic equations// International conference on "Operators in Morrey-type spaces and applications", dedicated to 60-th birthday of prof. Vagif S.Guliyev, -Kirshehir, Turkey: -10-13 July, -2017, -p.177.
10. Kerimova, M. The boundedness of the solutions of degenerate divergent linear elliptic equations.// International Journal for Research in Mathematics and Statistics, -2018. v.4, issue 11, -pp. 1-5.
11. Kerimova, M. The estimation of solutions nondivergent elliptic-parabolic equations.//- Bulgaria: İnternational Journal of Applied Mathematics, -2019. v.32, №5, -pp.759 -767.
12. Гаджиев, Т., Алиев, С., Керимова, М. Сильная разрешимость краевой задачи для линейных недивергентных вырождаюшихся уравнений эллиптико-параболического типа.//-Baku: Proceeding of IAM, - 2019, v.8, №1, -pp.14-23.
13. Gadjiev, T., Kerimova, M., Gasanova, G. Solvability of a boundary-value problem for degenerate equations//-Ukraine: Ukrainian mathematical journal, -2020. v.72, issue 4, -pp.495-514.
14. Kerimova, M. Investigation of the solution of boundary value problem for elliptic-parabolic equations//XXXVII International Conference problems of decision making under uncertainties (PDMU-2022) Abstracts,-Kyiv:-November,-23-25,-2022,-p.62
15. Керимова, М. Априорные оценки решений для линейных дивергентных вырождающихся уравнений типа эллиптико-параболических.// Теоретические и прикладные проблемы матемтики II Международная научная конференция,-Сумгаит: -25-26, Апрель,-2023,-pp.80-82.

Защита диссертации состоится **17 ноября 2023** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **13 октября 2023** года.

Подписано в печать: 05.10.2023
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 38402
Тираж: 70