АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ДИСКРЕТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Специальность: 1211.01–Дифференциальные уравнения
Отрасль науки: Математика
Соискатель: **Вюсала Сабир кызы Султанова**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку- 2022

Диссертационная работа выполнена на кафедре Математики и информатики Лянкяранского Государственного Университета.

Научные руководители: док. наук по мат., профессор
Нихан Алипанах оглы Алиев
док. наук по мат., профессор
Натиг Сахраб оглы Ибрагимов

Официальные оппоненты: док. наук по мат., профессор
Рафик Галандар оглы Тагиев

док. наук по математике
Юсиф Солтан оглы Касумов

кан. физ.-мат. наук, доцент
Тофик Мовсум оглы Алиев

Диссертационный совет FD 2.17 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Бакинского Государственного Университета

Председатель диссертационного совета:
действительный член НАНА, д.ф.-м.н, профессор

____________ **Магомед Фарман оглы Мехтиев**

Ученый секретарь диссертационного совета: д.н. по мех., доцент

____________ **Лаура Фаик кызы Фатуллаева**

Председатель научного семинара: д.н. по математике, профессор

____________ **Ягуб Амияр оглы Шарифов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень изученности темы. Математические модели практически многих природных явлений, химических, биологических и медицинских явлений приводятся к задачам, поставленным для обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с частными производными. Это, в основном, задача Коши, смешанные и граничные задачи. Этими вопросами занимаются на курсах по обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики и уравнениям с частными производными. Для обыкновенных дифференциальных уравнений были рассмотрены задача Коши и граничные задачи, а для уравнений с частными производными - задача Коши, смешанные и граничные задачи.

Для уравнений с частными производными в основном были рассмотрены задачи для уравнений трех типов, для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов. Для уравнений гиперболического и параболического типов были рассмотрены задача Коши и смешанные задачи, а для уравнений эллиптического типа - граничные задачи. Канонической формой уравнения гиперболического типа является уравнение колебания струны, канонической формой уравнения параболического типа - уравнение теплопроводности, а канонической формой уравнения эллиптического типа - уравнение Лапласа.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений число условий в рассматриваемых задачах должно быть равно порядку уравнения. В задаче Коши число исходных условий, а в граничных задачах число граничных условий должно быть равно порядку уравнения.

В уравнениях с частными производными число исходных условий равно порядку производной по времени, входящей в заданное уравнение, тогда как число граничных условий (если число фазовых переменных больше единицы и граница является гладкой областью) равно половине порядка производной по фазовым переменным. Так, если уравнение Лапласа является дифференциальным уравнением с производной второго порядка, то считается, что одно граничное условие уже задано. Это либо условие Дирихле, либо условие Неймана, либо условие Пуанкаре. Эти условия называются локальными условиями. Поскольку бигармоническое уравнение является уравнением с производной четвертого порядка, бывают заданы два граничных условия. Поэтому в уравнениях математической физики и уравнениях с частными производными граничные задачи, в основном, рассматриваются для уравнений с парными производными.

Уравнение Коши-Римана является уравнением эллиптического типа первого порядка. Тогда в каком виде для него должна рассматриваться граничная задача, чтобы задача была правильной задачей типа Фредгольма.

Показано, что если рассматривать уравнение Коши-Римана в области плоскости с гладкой границей, то, делением границы на две области, для уравнения Коши-Римана достаточно условия нелокальной границы, полученной присоединением в этих частях значений искомой функции. То есть в пределах нелокального граничного условия, заданного подобным образом, задача имеет тип Фредгольма. Иными словами, задача в пределах условия нелокальной границы, заданная для уравнения Коши-Римана с разделением границы на две части, приводится к системе интегральных уравнений типа Фредгольма второго типа без сингулярности в ядре в нормальном виде относительно граничного значения функции, определяющейся с помощью полученных в работе необходимых условий.

Анализ, который мы проходим в средних школах и вузах, является аддитивным анализом, то есть производная суммы равна сумме производных, а интеграл суммы равен сумме интегралов. Здесь имеется свойство аддитивности. Несмотря на то, что мультипликативный анализ появился в прошлом веке (в книге Гантмахера “Теория матриц” приведены мультипликативная производная, мультипликативный интеграл и их простые свойства), задачи для уравнений с мультипликативной производной стали рассматриваться только сейчас.

Термины поверативная производная и поверативный интеграл были даны профессором Н.А.Алиевым. Поскольку для этого недостаточно семи алгебраических действий, необходимо установить новое прямое действие и новое обратное действие.

Дискретный вид аддитивного анализа известен издавна. Они называются уравнениями с разностями. Задачи для дискретных мультипликативных и дискретных поверативных уравнений были рассмотрены Н.А.Алиевым. Среди учеников Н.А.Алиева: задачи для дифференциальных уравнений с дискретной аддитивной и дискретной мультипликативной производной встречаются в трудах О.Л.Гасанли и Т.С.Мамиевой, обыкновенных дифференциальных уравнений с дискретной аддитивной, дискретной мультипликативной и дискретной поверативной производной (для двучленных уравнений) - в трудах А.М.Маммадзаде, и, наконец, задачи для дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными с этими тремя дискретными производными - в трудах автора настоящей работы - В.С.Султановой.

Если записать рассматриваемое здесь произвольное уравнение как уравнение с явными разностями, то увидим, что полученное уравнение является очень сложным нелинейным уравнением. Во всех рассматриваемых случаях автору удалось получить аналитическое выражение (явное выражение решения) для решения задачи. Это обуславливает как актуальность, так и степень изученности работы.

Объект и предмет исследования. Обычно, в случаях, когда исследование решения непрерывных задач представляет трудность, поставленная задача дискретизируется, решается полученная система алгебраических уравнений, а рассматриваемый в решении шаг переводится в лимит приближением к нулю, что позволяет прийти к определенному результату для решения непрерывных задач.

Здесь нашей целью является изучение дискретных математических моделей. В основном задача Коши и граничные задачи были рассмотрены для нелинейных уравнений, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для дифференциальных уравнений с частными производными.

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является получение аналитического выражения решения задачи Коши и граничных задач для рассматриваемых очень сложных нелинейных уравнений. Так, сначала определяется общее решение рассматриваемого уравнения, состоящее из определенных произвольных постоянных или произвольных последовательностей (в случае многомерности). Затем произвольные постоянные или последовательности, входящие в общее решение, определяются с помощью заданных исходных или граничных условий.

Методы исследования. Известно, что Эйлер определил инвариантную по аддитивной производной функцию e^x, а затем функцию $e^{\lambda x}$. С помощью этой функции он алгебраизировал линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом. Т.е, он сопоставил дифференциальному уравнению алгебраическое (характеристическое уравнение). Затем было построено общее решение для уравнения и получено аналитическое выражение для решения задач. Здесь также использовался метод, уже известный в этих дифференциальных уравнениях для обыкновенного дифференциального уравнения и дифференциального уравнения с частной производной с дискретной производной.

Основные положения, выносимые на защиту. В диссертации защищены следующие основные положения:

1. постановка сопряженной задачи и определение условия самосопряженности рассматриваемой краевой задачи для

обыкновенных дифференциальных уравнений с дискретными аддитивными производными;

2. получение аналитических выражений для решения задач Коши и краевых задач для дифференциального уравнения первого порядка с дискретными аддитивными и дискретными мультипликативными производными, линейными по производным (фактически нелинейными);

3. получение аналитических выражений для решения (полиномиальных) задач Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений со второй дискретной производной;

4. получение аналитических выражений для решения задачи Коши и краевой задачи для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными аддитивными, мультипликативными и дифференциальными производными.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе была получена следующая научная новизна.

1. Для дифференциальных уравнений с дискретной аддитивной производной были осуществлены (для уравнений с разностями) построение сопряженной задачи к граничным задачам М.А.Наймарка, поставленным для обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Схем решения, данный Л. Эйлером для обыкновенных дифференциальных уравнений, был проведен для уравнений первого и второго порядка с обыкновенными дискретными аддитивными, мультипликативными и поверативными производными.

3. Было рассмотрено такое обыкновенное дифференциальное уравнение с дискретной мультипликативной и дискретной поверативной производной первого порядка, где при исследовании решения не хватает известных семи алгебраических действий, в связи с чем, следует определить новое прямое и новое обратное действие. Это действие (прямое

действие) - действие возведения в степень, обратное ему действие - действие нового логарифмирования.

4. Впервые, в данной диссертационной работе были рассмотрены задача Коши и граничные задачи для многомерных дифференциальных уравнений с дискретной аддитивной, мультипликативной и коммутативной производными. Для решения рассматриваемых задач для двумерных дифференциальных уравнений второго порядка также были получены аналитические выражения, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическое и практическое значение исследования. Диссертационную работу теоретического характера также можно использовать для получения приближенного решения. Эти темы преподаются магистрам на кафедре Математические методы прикладного анализа в факультете Прикладная математика и кибернетика Бакинского Государственного Университета.

Апробация и применение работы. Основные положения диссертационной работы регулярно докладывались на семинарах кафедры Математики и информатики Лянкяранского Государственного Университета, а также на следующих научных конференциях: XXXV İnternational Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2020), XXXVI İnternational Conference Problems of decision making under Uncertainties (PDMU-2021) и Республиканская научно-практическая конференция молодых исследователей на тему «Влияние применения современных технологий обучения на качество образования» (Ленкоранский Государственный Университет, 2019).

Личный вклад автора. В работах (в статьях и материалах конференций) автором решены поставленные задачи. Автор отвечает за получение результатов.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 6 статей, 3 материалы конференций и они перечислены в конце автореферата.

Название учреждения, где выполнена работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре Математики и информатики Лянкяранского Государственного Университета.

Общий объем диссертации с указанием объема структурных единиц диссертации отдельно. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Введение - 24 страницы, 31840 знаков, Глава I - 21 страница, 17704 знака, Глава II - 25 страниц, 24884 знака, Глава III - 32 страницы, 25992 знака, заключение - 2 страницы, 406 знаков. Общий объем диссертации 110 страниц, 132750 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертационной работы повествуется о пути постановления дискретных задач. Поскольку основу этих дискретных задач составляют непрерывные задачи, во введении большое место уделено этапам развития непрерывных задач.

Затем осуществлен переход к дискретным задачам и поэтапно показано развитие этого направления математики.

Отметим, что дискретные события плохо изучены. Так, известными дискретными явлениями являются определение общего предела числового ряда, определение общего предела геометрического ряда и определение общего предела последовательности Фибоначчи, показывающего порядок размножения кроликов.

Математическая модель нахождения общего предела числового ряда приводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретной аддитивной производной первого порядка, математическая модель нахождения общего предела геометрического ряда - к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретной мультипликативной производной первого порядка, а нахождение общего предела последовательности Фибоначчи - к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретной аддитивной производной второго порядка.

В первой главе диссертационной работы, состоящей из двух частей, сначала берется граничная задача

$$ly_n = y_n^{(/)} + ay_n = f_n, 0 \leq n < N \,, \tag{1}$$

$$y_N + \alpha y_0 = 0. \tag{2}$$

Сопряженная задача к этой граничной задаче была получена в следующей форме:

$$l^* z_n = (a-1)z_n^{(/)} + az_n = g_n, 0 \leq n < N \tag{3}$$

$$\alpha z_N + z_0 = 0. \tag{4}$$

Здесь f_n и g_n - заданные последовательности, а a и α - заданные постоянные числа.

Условие самосопряженности заданной задачи (1)–(2) имеет форму

$$a = 2,\, \alpha = 1. \tag{5}$$

Полученные результаты, данные в двух теоремах, можно представить в следующей форме.

Теорема 1. Если a, α являются заданными действительными числами, а f_n - последовательностью с заданным действительным значением, то сопряженная задача в (1)–(2) будет иметь форму (3)–(4), а $a = 2$, $\alpha = 1$ - являться условием самосопряженности задачи (1)–(2).

Далее в данной главе была рассмотрена задача

$$ly_n \equiv y_n^{(//)} + ay_n^{(/)} + by_n = f_n\,, 0 \le n \le N - 2, \tag{6}$$

$$\begin{cases} y_N + \alpha y_0 = 0, \\ y_{N-1} + \beta y_1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Сопряженная задача к этой задаче была получена в виде

$$l^* z_n \equiv (1 - a + b) z_n^{\left(\frac{-}{-}\right)} + (2b - a) z_n^{(-)} + bz_n = g_n, \quad 0 \le n \le N - 2, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \beta(a - 2) z_N + \beta z_{N-1} + z_1 = 0, \\ a z_n + (a - 2) z_1 + z_0 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

здесь a, b, α и β - заданные действительные постоянные, f_n и g_n последовательности с заданными действительными значениями. Условие самосопряженности данной задачи (6)–(7) имеет форму

$$a = b = 2, \alpha = \beta = 1. \tag{10}$$

Полученный здесь результат можно представить в следующей форме.

Теорема 2. Если a, b, α и β являются заданными действительными постоянными, а f_n - постоянной с заданным действительными значением, то сопряженная задача к задаче (6)–(7) будет иметь вид (8)–(9), а условие самосопряженности этой задачи - вид (10). Здесь последовательности f_n и g_n не оказывают влияние на сопряженную задачу.

Во второй главе, состоящей из трех частей, сначала рассматривается уравнение

$$y_n^{[/]} + a y_n^{(/)} - a^2 y_n^2 = 0, n \geq 0 \tag{11}$$

где a является данным действительным числом. В пределах условия

$$y_n \neq C\ , \tag{12}$$

общее решение уравнения (11) получается в виде

$$y_n = a^{2^n-1} y_0^{2^n}, n > 0. \tag{13}$$

Если в уравнение (11) добавить начальное условие

$$y_0 = x, \tag{14}$$

то здесь x будет являться заданной действительной постоянной. Тогда решение задачи Коши (11), (14) будет иметь вид

$$y_n = a^{2^n-1} x^{2^n}, n \geq 0. \tag{15}$$

Если в уравнение (11) добавить граничное условие

$$y_0^{\alpha} y_N^{\beta} = \gamma\ , \tag{16}$$

то здесь $\alpha,\ \beta$ и γ будут являться заданными действительными постоянными. Неединственное решение данной граничной задачи имеет вид

$$y_{nk} = a^{2^n-1} \left(\sqrt[\alpha+\beta 2^N]{\alpha \cdot a^{-\beta(2N-1)} e^{i\frac{2\pi k}{\alpha+\beta\cdot 2^N}}} \right)^{2^n}, \quad k \in \mathrm{Z} \tag{17}$$

а действительное решение является единственным и имеет вид

$$y_n = a^{2^n-1} \left(\gamma \alpha^{-\beta\left(2^{N-1}\right)}\right)^{\overline{\frac{2^n}{\alpha+\beta\cdot 2^n}}}. \tag{18}$$

Полученный результат можем представить в следующей форме.

Теорема 3. Если $a,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ и x являются заданными действительными постоянными, то общее решение уравнения (11) в пределах условия (12) будет иметь вид (13), где y_0 является сокращенной постоянной. В таком случае, единственное решение задачи Коши (11), (14) будет иметь вид (15), неединственное решение граничной задачи (11), (16) вид (17), а ее единственное действительное решение - вид (18).

Далее *во второй главе* рассматривается уравнение с дискретной аддитивной и мультипликативной производной второго порядка

$$y_n^{[/]} \cdot y_n^{(/)} \left[\left(y_n^{(/)} \right)^{[/]} - \left(y_n^{[/]} \right)^{(/)} - y_n^{[/]} + 1 \right] + y_n^{(/)} = f_n y_n \,, n \geq 0 \,, \quad (19)$$

общее решение которого имеет вид

$$y_{2m} = y_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) \,, m \geq 1 \,, \quad (20)$$

$$y_{2m+1} = y_1 \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) \,, m \geq 1 \,. \quad (21)$$

Если задать для данного уравнения начальные условия

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta \,, \quad (22)$$

или граничные условия

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta \,, \quad (23)$$

то будет получен следующий результат.

Теорема 4. Если f_n является последовательностью с заданным действительным значением, а α и β являются ненулевыми действительными постоянными, то общее решение уравнения (19) представляется с помощью (20), (21), так, y_0 и y_1 являются произвольными постоянными. В таком случае, задача Коши (19), (22) имеет единственное решение, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) \,, m \geq 1, \\ y_{2m+1} = \beta \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) \,, m \geq 1 \,, \end{cases} \quad (24)$$

если N = 2s+1, то решение граничной задачи (19), (23):

$$\begin{cases} y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) \,, m \geq 1, \\ y_1 = \dfrac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k+1})}, \\ y_{2m+1} = \dfrac{\beta}{\prod_{k=m}^{s+1} (1 + f_{2k+1})} \,, m \geq 1 \,, \end{cases} \quad (25)$$

если N = 2s, то решение уравнения (19) в пределах граничных условий

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta \ , \tag{26}$$

будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k})} \\ y_{2m+1} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1}(1+f_{2k+1}) \ , \ m \geq 1 \ , \\ y_{2n+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k+1})} \ , m \geq 1 \ . \end{cases} \tag{27}$$

Последняя задача *второй глав*ы составлена для уравнения

$$y_n^{\{/\}^{k y_n^{[/]^k}}} = y_n^{k+1} \ , n \geq 0 \ . \tag{28}$$

Для получения общего решения данного уравнения семи известных нам алгебраических действий не хватает. Поэтому, применив новое прямое действие "возведение в степень" и новое обратное действие "новое логарифмирование", для общего решения уравнения (28) получаем выражение

$$y_n = y_0^{(1+\frac{1}{k})^n} , n \geq 1, k \in N \ , \tag{29}$$

здесь y_0 является произвольной постоянной.

Если задать начальное условие

$$y_0 = \ \alpha \ , \tag{30}$$

то решение задачи Коши (28), (30) будет иметь вид

$$y_n = \alpha^{(1+\frac{1}{k})^n} , n \geq 1, k \in N \ . \tag{31}$$

Если задать граничное условие

$$y_N^{\alpha} - y_0^{\beta} = \gamma \ , \tag{32}$$

то получается следующий результат:

Теорема 5. Общее решение обыкновенного уравнения (28) с дискретной мультипликативной и поверативной производной первого порядка имеет вид (29), так, y_0 является произвольной постоянной, решение (31) задачи Коши (28), (30), если $\alpha, \ \beta$ и γ

являются положительными постоянными, то неединственное решение граничной задачи (28), (32) имеет вид

$$y_{nm} = y_{0m}^{(1+\frac{1}{k})^n}, n \geq 1, k \in N, m \in Z, \qquad (33)$$

так,

$$y_{0m} = y^{\frac{1}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}} \cdot e^{i\frac{2m\pi}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}}, m \in Z, \qquad (34)$$

является единственным действительным решением граничной задачи (28), (32) и имеет вид

$$y_n = y^{\frac{(1+\frac{1}{k})^n}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}}.$$

Третья глава диссертационной работы, посвященная исследованию решения многомерных задач, состоит из шести частей, в которых рассматриваются три задачи Коши и три граничные задачи для двумерных дифференциальных уравнений второго порядка с дискретными аддитивными, мультипликативными и поверативными производными.

В первой и пятой частях этой главы для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретной аддитивной производной относительно первой переменной (аргумента) и дискретной мультипликативной производной относительно второго аргумента

$$D_2^{[/]} D_1^{(/)} y_{mn} = f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0, \qquad (35)$$

получаем граничное условие

$$y_{0n} = \alpha_{0n}, n \geq 0;\ y_{s0} = \alpha_{s0}, s \geq 0; \qquad (36)$$

или рассмотрением уравнения (35) в пределах граничных условий $0 \leq m < M; 0 \leq n < N$

$$\begin{cases} y_{Mn} = a y_{0n} + \varphi_n, 0 \leq n \leq N, \\ y_{mN} = b y_{m0} + \psi_m, 0 \leq m \leq M. \end{cases} \qquad (37)$$

Теорема 6. Если при $m \geq 0,\ n \geq 0$ f_{mn} является последовательностью с заданным действительным значением, то общее решение уравнения (35) имеет вид:

$$y_{mn} = y_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0} \right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,, m \geq 1, n \geq 1, \quad (38)$$

так, y_{0n} и y_{s0} являются произвольными последовательностями, если α_{0n} и α_{s0} заданные в начальных условиях (36), являются последовательностями с действительным значениями, то решение задачи Коши (35), (36) будет иметь вид:

$$y_{mn} = \alpha_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} \alpha_{s0} \right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,, m \geq 1, n \geq 1, \quad (39)$$

если $a \neq 0,\ a \neq 1, b \neq 0$ являются заданными действительными постоянными, а $\varphi_n, 0 \leq n \leq N;\ \psi_m, 0 \leq m \leq M$ - последовательностями с заданными действительными значениями, а также выполняются условия

$$\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} \neq b, m \geq 0\,, \quad (40)$$

и

$$b\varphi_0 + \psi_M = a\psi_0 + \varphi_N, \quad (41)$$

то решение граничных задач (35), (37) будет иметь вид

$$y_{mn} = \frac{1}{a-1} \left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)} \psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp} - \varphi_n \right] +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)} \psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp}. \quad (42)$$

Во второй и третьей части этой главы для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретной аддитивной производной относительно первой переменной (по аргументу), дискретной поверативной производной относительно второй переменной

$$D_2^{\{/\}} D_1^{(/)} u_{mn} = f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0\,, \quad (43)$$

была рассмотрена задача в пределах начальных условий

$$u_{m0} = \alpha_m, u_{0n} = \beta_n, m \geq 0, n \geq 0 \qquad (44)$$

или рассмотрено уравнение (43) в $0 \leq m < M, 0 \leq m < N$ и исследованы задачи в пределах граничных условий

$$\begin{cases} u_{Mn} = a u_{0n} + \varphi_n, 0 \leq n \leq N\,, \\ u_{mN} = b u_{m0} + \psi_m, 0 \ \leq m \leq M\,. \end{cases} \qquad (45)$$

Если при $m \geq 0,\ n \geq 0\ \ f_{mn}$ является последовательностью с действительным значением, то общее решение уравнения (43) имеет вид

$$u_{mn} = u_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}}, m \geq 1, n \geq 1\,, \qquad (46)$$

а u_{0n} и u_{s0} являются произвольными последовательностями, если $\alpha_m, m \geq 0$ и $\beta_n, n \geq 0$, заданные в условии (44), являются последовательностями с действительным значением, то решение задачи Коши (43), (44) имеет вид

$$u_{mn} = \beta_n + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\alpha_{s+1}-\alpha_s}}}}}}, m \geq 1, n \geq 1\,, \qquad (47)$$

так $\alpha_0 = \beta_0$, если a и b являются заданными действительными постоянными, а $\varphi_n,\ 0 \leq n \leq N,\ \psi_m,\ 0 \leq m \leq M$ последовательностью с заданными действительными значениями, то в пределах условия существования решения уравнений

$$a \neq 1\,, \qquad (48)$$

и

$$f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} = b(u_{s+10} - u_{s0}) + \psi_{s+1} + \psi_s,\ \ s \geq 0 \qquad (49)$$

решение граничной задачи (43), (45) имеет вид (46), так,

$$u_{0n} = \frac{\sum_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} - \varphi_n}{a-1}, n \geq 1\,, \qquad (50)$$

а $(u_{s+10} - u_{s0})$ определяется из уравнения (49).

И, наконец, *в четвертой и шестой частях третьей главы* для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретной мультипликативной производной относительно первой переменной и дискретной поверативной производной относительно второй переменной

$$D_2^{\{/\}} D_1^{[/]} u_{mn} = f_{mn}, \qquad m \geq 0, n \geq 0\,, \tag{51}$$

получаем начальное условие

$$u_{m0} = N_m\,, m \geq 0\,;\; u_{0n} = \beta_n, n \geq 0\,;\; \alpha_0 = \beta_0\,, \tag{52}$$

или уравнение (51) рассматривается в $0 \leq m < M$, $0 \leq n < N$ и в пределах граничного условия (45) получается следующий вывод.

Теорема 7. Если при $m \geq 0$, $n \geq 0$ f_{mn} является последовательностью с заданным действительным значением, то общее решение уравнения (51) имеет вид

$$u_{mn} = u_{0n} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}}\,, m \geq 1\,, n \geq 1\,, \tag{53}$$

так, u_{0n} и u_{s0} являются произвольными последовательностями. Если при условии (52) заданные $\alpha_m, m \geq 0$ vә β_n, $n \geq 0$ являются последовательностью с действительным значением, а $\alpha_0 = \beta_0$, то решение задачи Коши (51), (52) будет представлено в виде

$$u_{mn} = \beta_n \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}}}}}}}\,, m \geq 1\,, n \geq 1\,. \tag{54}$$

Если рассматривать уравнение (51) в $0 \leq m < M$, $0 \leq n < N$, то, если, действительные постоянные a, b в граничной задаче (51), (52), являются последовательностями с заданным действительным значением в φ_n, $0 \leq n < N$, ψ_m, $0 \leq m < M$, то в пределах условия существования решения уравнения

$$\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} \neq a, n \geq 0, \tag{55}$$

и

$$\frac{u_{s+10}}{u_{s0}} = log_{f_{s0}} log_{f_{s1}} log_{f_{s2}} \dots log_{f_{sN-1}} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}}, s \geq 0, \tag{56}$$

решение граничной задачи (51), (45) представляется в виде (53), так выражение $\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}$ представляется из уравнения (56), а u_{0n} в пределах условия (55) с помощью выражения

$$u_{0n} = \frac{\varphi_n}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} - a}, n \geq 0. \tag{57}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с дискретной аддитивной производной были составлены сопряженные задачи к рассматриваемым граничным задачам, а также было определено условие самосопряженности задачи.
2. Были рассмотрены задачи Коши и граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с дискретными аддитивными, мультипликативными и поверативными производными и получены аналитические выражения для их решения.
3. Было рассмотрено такое обыкновенное дифференциальное уравнение с дискретной производной первого порядка, для определения общего решения которого недостаточно семи известных нам алгебраических действий. Представилось необходимым определение нового прямого действия (возведение в степень) и нового обратного действия (новое логарифмирование).
4. Были получены аналитические выражения для решения задачи Коши и граничных задач для многомерных уравнений с дискретными производными.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Решение задачи Коши и граничной задачи для уравнения дискретного аддитивного и дискретно мультипликативного первого порядка // “Müasir təlim texnologiyalarının tətbiq olunmasının təhsilin keyfiyyətinə təsiri” mövzusunda gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi-praktik konfransı. Lənkəran Dövlət Universiteti, 2019, s. 64.
2. The adjoim problem to a boundary value problem with an additive discrete derivative // XXXV İnternational Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2020), s. 15 – 16.
3. Boundary value problem for an equation with second-order partial duscrete derivatives //XXXVI İnternational Conference Problems of decision making under Uncertainties (PDMU-2021), may 11 – 14, 2021, Didicated to 80-th anniversary of Professor MykhailoBartish, s. 105 – 106.
4. Construktion of the Adjoint problem to the discret problems for the second order equcation // Advanced Mathermatical Models&Applications. Vol. 6, № 2, 2021, s. 182 – 188.
5. Problems for the first-order differential equations with descrete additive and discrete multiplicative derivatives // Journal of Counferary applied Mathemstics. Vol. 11, № 2, 2021, s. 3 – 10.
6. Задачи Коши для уравнения второго порядка с дискретными производными // Pedaqoji Universitetinin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 2021, № 2, s. 39 – 44.
7. Boundary-Value problem for a two-dimensional second order-type equation with discrete additive and multiplicative derivatives // EESJ (AST EUROPEAN SCIENCE JOURNAL). Vol. 1, № 4(68), 2021, s. 61 – 64.
8. Построение сопряженной задачи к граничной задаче для дискретно аддитивной производной // Pedaqoji

Universitetinin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət emləri seriyası, 2021, № 3, s. 33 – 38.
9. Задача Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными и степенными производными // Proceeding sof the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2021, pp. 202 – 210.

Защита диссертации состоится **27 сентября 2022** года в **14^{00}** на заседании Диссертационного совета FD 2.17, действующего на базе Бакинского Государственного Университета.

Адрес: город Баку, улица акад.З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 28 июля **2022** года.

Подписано в печать: 04.07.2022
Формат бумаги: 60×84 1/16
Объём: 40000
Тираж: 70